

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ**



**ИНФОРМАТИКА И КИБЕРНЕТИКА**

**2 (28)**

**Донецк – 2022**

УДК 004.3+004.9+004.2+51.7+519.6+519.7

**ИНФОРМАТИКА И КИБЕРНЕТИКА, № 2 (28), 2022,  
Донецк, ДонНТУ.**

Выпуск подготовлен по материалам XIII Международной научно-технической конференции «Информатика, управляющие системы, математическое и компьютерное моделирование – 2022» (ИУСМКМ–2022), проведенной 25 – 26 мая 2022 г. в рамках VIII Международного Научного форума Донецкой Народной Республики. Представлены результаты научно-технической деятельности аспирантов, соискателей и научных работников. Статьи посвящены вопросам приоритетных направлений научно-технического обеспечения в области информатики, кибернетики, вычислительной техники и инженерного образования.

Материалы предназначены для специалистов народного хозяйства, ученых, преподавателей, аспирантов и студентов высших учебных заведений.

Редакционная коллегия

**Главный редактор:** Павлыш В. Н., д.т.н., проф.

**Зам. глав. ред.:** Мальчева Р. В., к.т.н., доц.

**Ответственный секретарь:** Лёвкина А. И.

**Члены редакционной коллегии:** Аверин Г. В., д.т.н., проф.; Аноприенко А. Я., к.т.н., проф.;

Звягинцева А.В., д.т.н., доц.; Зори С. А., д.т.н., доц.; Карабчевский В. В., к.т.н., доц.;

Привалов М. В., к.т.н., доц.; Скобцов Ю. А., д.т.н., проф.; Федяев О. И., к.т.н., доц.;

Шелепов В. Ю., д.ф-м.н., проф.

Рекомендовано к печати ученым советом ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический университет» Министерства образования и науки ДНР. Протокол № 5 от 9 сентября 2022 г.

Свидетельство о регистрации СМИ: серия ААА № 000145 от 20.06.2017.

Приказ МОН ДНР № 135 от 01.02.2019 о включении в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК ДНР.

Контактный адрес редакции

ДНР, 83001, г. Донецк, ул. Артема, 58, ГОУ ВПО «ДонНТУ»,

4-й учебный корпус, к. 36., ул. Кобозева, 17.

Тел.: +7 (856) 301-07-35, +7 (949) 334-89-11

Эл. почта: infcyb.donntu@yandex.ru

Интернет: <http://infcyb.donntu.ru>

## СОДЕРЖАНИЕ

### Информатика и вычислительная техника

<b>Применение нечеткой логики в системах интеллектуального управления светофорами</b> <i>Стрижко М. А., Червинский В. В.</i> .....	5
<b>Процедура формирования грамматики для описания спектрограмм технических каналов утечки информации</b> <i>Третьяков И. А.</i> .....	11
<b>Самоорганизованная критичность в BML–модели транспортного потока</b> <i>Бельков Д. В., Зензеров В. И.</i> .....	17
<b>Анализ методов распознавания эмоций по фотоизображениям</b> <i>Семёнова А. П., Белинская М. А., Павлыш В. Н.</i> .....	23

### Компьютерные науки

<b>Теория обобщенных функций и их применение на практике</b> <i>Добровольский Ю. Н.</i> .....	30
<b>О способах вывода, неоднозначности интегральных соотношений между спиновыми и зарядовыми плотностями и о следствиях из них</b> <i>Климко Г.Т.</i> .....	39
<b>Факторный анализ данных в задаче диагностики рака молочной железы</b> <i>Дубовская В. И., Брыжжина К. А.</i> .....	46

### Короткие сообщения

<b>Анализ метода отказоустойчивой интеграции абстрактных оценок датчиков с использованием декомпозиции с несколькими решениями</b> <i>Иваница С. В., Иванников Д. Д.</i> .....	53
<b>Влияние цифровой экономики на киберпреступность</b> <i>Бондаренко В. В.</i> .....	56
<u>Об авторах</u> .....	60

<u>Требования к статьям, направляемым в редакцию научного журнала «Информатика и кибернетика»</u> .....	62
---	----

# **Информатика и вычислительная техника**

УДК 517.5:004.021

## Применение нечеткой логики в системах интеллектуального управления светофорами

М. А. Стрижко, В. В. Червинский  
Донецкий национальный технический университет, г. Донецк  
[strizhko.mihail@yandex.ru](mailto:strizhko.mihail@yandex.ru)

### **Аннотация**

*В статье рассмотрена актуальность использования систем светофорного управления транспортными потоками с замкнутым контуром на основе методов интеллектуального управления, в частности, нечеткой логики. Описана конфигурация аппарата нечеткой логики применительно к системам светофорного регулирования. Проведено модельное исследование разработанной системы на основе представления перекрестка как системы массового обслуживания. Проанализированы результаты моделирования. Выполнено сравнение интеллектуальной системы управления с системой управления с фиксированными длительностями фаз по таким показателям, как среднее время ожидания и средняя длина очереди автомобилей.*

### **Введение**

Существующие в настоящее время системы светофорного управления транспортными потоками на перекрестках различаются по структуре, степени участия человека в процессе и уровню централизации. Так, в зависимости от структуры они могут иметь замкнутый контур или разомкнутый.

Система с разомкнутым контуром не имеет данных о текущем состоянии объекта управления – транспортного потока. Дорожные контроллеры осуществляют переключение сигналов строго по заданному времени, длительности каждой фазы регулирования не изменяются. Такое управление принято называть жестким или фиксированным.

Структура системы с замкнутым контуром предполагает наличие обратной связи между техническими средствами и объектом управления [1]. Информация о состоянии транспортного потока автоматически собирается при помощи специальных датчиков – детекторов транспорта, а дорожные контроллеры после её обработки определяют режим работы светофоров. В этом случае продолжительность горения сигналов светофоров может изменяться в зависимости от интенсивности движения, что позволяет повысить эффективность управления. Такой метод светофорного регулирования называется адаптивным или гибким.

Ввиду постоянно увеличивающегося количества транспортных средств и интенсивности перевозок во всём мире, проблема оптимизации светофорного управления транспортными потоками является актуальной.

Системам адаптивного светофорного регулирования посвящены работы Г. Д. Антониади [2], А. А. Шинкарева [3]. Отдельное внимание алгоритмам светофорного регулирования уделяется в работе А. Ю. Кретьева [4].

Ввиду высокой динамики изменения характеристик транспортного потока, его оценка и формирование эффективных управляющих воздействий является достаточно сложной задачей. Решение данной задачи возможно при помощи современных интеллектуальных технологий, в частности, нечеткой логики [5]. Такой подход исключает необходимость определения четкого алгоритма управления и позволяет системе принимать решения подобно тому, как это делает человек. Следовательно, при непостоянстве характеристик рассматриваемого процесса и проблематичности его математического описания целесообразно применение интеллектуальных систем управления.

Разработанные на данный момент системы нечеткого светофорного управления существуют только в имитационных средах, хотя и показывают достаточную эффективность [6].

### **Разработка аппарата нечеткой логики**

Управление на основе нечеткой логики предполагает задание функций принадлежности к тому или иному множеству каждой входной и выходной переменной [7]. В случае светофорного управления можно выделить такие нечеткие множества: МАЛО, СРЕДНЕ, МНОГО для количества автомобилей, подъезжающих к перекрестку, и времени горения сигнала светофора. Управление по такому принципу напоминает работу регулятора:

ЕСЛИ поток с севера города БОЛЬШОЙ И поток с востока МАЛЕНЬКИЙ, ТО пропускать поток с севера ДОЛЬШЕ.

ЕСЛИ поток с севера города СРЕДНИЙ И поток с востока СРЕДНИЙ, ТО пропускать поток с обеих сторон СРЕДНЕ.

Рассмотрим систему управления Х-образным перекрёстком, имеющим одну полосу движения в каждом направлении и, соответственно, 4 направления транспортных потоков. Так как движение во встречных направлениях осуществляется одновременно, имеем две входные переменные: «прибытие» – количество транспортных средств, движение которых в данный момент разрешено; и «очередь» – количество транспортных средств, ожидающих разрешающего сигнала светофора. Выходной переменной является приращение времени горения зеленого сигнала в текущем направлении движения. Здесь стоит отметить, что изменение длительности фаз регулирования возможно в определенных пределах во избежание бесконечного пропуска автомобилей в более загруженном направлении. В связи с этим задаётся минимальная фиксированная длительность фазы, а её приращение определяется на основе нечетких правил.

Для каждой нечеткой переменной задаются термы – нечеткие множества. В случае входных переменных отсутствие автомобилей в рассматриваемом направлении соответствует значению «почти ноль» (ZP), 2 автомобиля система воспринимает как «мало» (S), 4 – «средне» (M), 6 и более – «много» (B). Для выходной переменной нечеткое значение «почти ноль» (Z) соответствует нулевому значению приращения времени, значение «мало» (S) соответствует приращению времени, равному 2 секунды, «средне» (M) – 4 секундам, «много» (L) – 6 и более секундам.

Нечеткие множества каждой переменной и их сокращения приведены в табл. 1.

Таблица 1 – Термы нечетких переменных

Прибытие		Очередь		Приращение времени	
Почти ноль	ZP	Почти ноль	ZP	Ноль	Z
Мало	S	Мало	S	Мало	S
Средне	M	Средне	M	Средне	M
Много	B	Много	B	Много	L

В графическом представлении функций принадлежности лингвистических переменных ось ординат отображает степень принадлежности нечеткой переменной к нечеткому множеству. По оси абсцисс для входных переменных

указывается количество автомобилей, считываемое детекторами транспорта. Для выходной нечеткой переменной ось абсцисс отображает приращение времени горения текущего сигнала светофора в секундах.

На рис. 1, 2 приведены графики функций принадлежности входных переменных «Прибытие» и «Очередь».

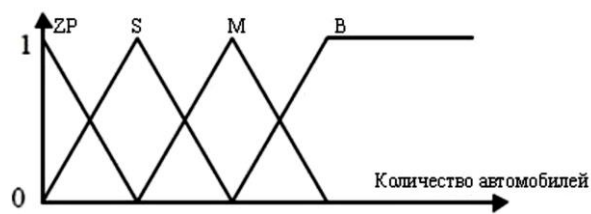


Рисунок 1 – График функции принадлежности для переменной «Прибытие»

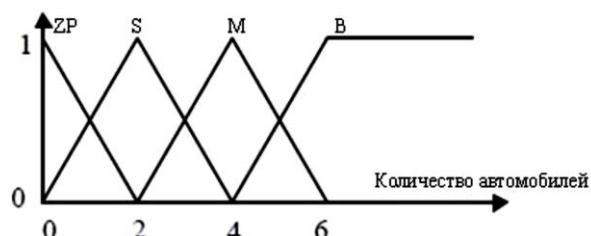


Рисунок 2 – График функции принадлежности для переменной «Очередь»

При рассмотренных значениях входных переменных их принадлежность к тому или иному нечеткому множеству равна единице. В случае же, если переменная принимает промежуточные значения, её принадлежность варьируется в пределах от 0 до 1, что влияет на принятие решения о принадлежности к соответствующему множеству выходной переменной.

График функции принадлежности для выходной переменной «Приращение времени» изображен на рис. 3.

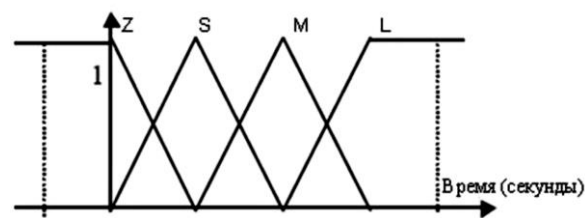


Рисунок 3 – График функции принадлежности для переменной «Приращение времени»

Конфигурация функций принадлежности системы осуществляется на основе экспертного наблюдения системы и окружающей среды. В зависимости от дорожных условий ширина функций принадлежности нечетких множеств и

их центр могут варьироваться и настраиваться в соответствии с обстановкой и условиями движения на каждом отдельном перекрёстке. Если перекрёсток чрезмерно загружен, подмножества входных переменных следует увеличить. В случае менее загруженных перекрёстков ширина функций принадлежности может быть уменьшена. Однако, следует отметить, что при управлении, основанном на нечеткой логике, переход от одного нечеткого подмножества к другому должен осуществляться плавно, поэтому необходимо, чтобы они перекрывали друг друга. Если перекрытие слишком малое или отсутствует, управление в системе будет иметь ступенчатый характер. Таким образом, степень перекрытия функций принадлежности должна составлять порядка 25 %. С другой стороны, если перекрытий слишком много, нечеткости в системе также будет слишком много, что сделает управление более размытым.

На следующем этапе конфигурирования составляются нечеткие правила системы управления, определяющие значение выходной переменной при всех возможных значениях входных переменных. Нечеткие правила системы управления в матричной форме представлены в табл. 2.

Таблица 2 – Нечеткие правила системы управления

Прибытие/ Очередь	ZP	S	M	B
ZP	Z	S	M	L
S	Z	S	M	M
M	Z	Z	S	M
B	Z	Z	Z	S

Размер матрицы и количество правил равно количеству комбинаций функций принадлежности каждой из входных переменных. В данном случае входных переменных две, каждая из которых содержит по четыре функции принадлежности. Тогда количество правил равно шестнадцати.

Нечеткая система управления с помощью максимальной композиции находит степень истинности каждого из подзаключений правил. Когда выполняется правило, функция принадлежности выходной переменной («Приращение времени») устанавливается исходя из условий нечетких подмножеств («Прибытие» и «Очередь»). Когда степень значимости каждой нечеткой переменной найдена, они объединяются в одно нечеткое множество. Далее следует этап дефазификации, результатом которого получается действительное число [8].

### Моделирование системы управления

Тестирование работы системы производится путем моделирования при помощи современных программных средств.

Модель основывается на представлении системы светофорного управления, как частного случая систем массового обслуживания, следовательно, может быть описана с использованием терминов теории массового обслуживания.

Система массового обслуживания (рис. 4) включает в себя входной поток  $\lambda$ , очередь и сервер  $\mu_1$ , который обслуживает поступающие заявки.



Рисунок 4 – Компоненты системы массового обслуживания

Охарактеризовать подобные системы возможно при помощи 6 параметров (Т, Х, С, К, Р, Z), где:

- Т, интенсивность прибытия;
- Х, интенсивность обслуживания;
- С, количество серверов;
- К, емкость очереди;
- Р, численность населения;
- Z, порядок обслуживания.

При моделировании транспортных потоков на перекрёстке емкость очереди К и численность населения Р считаются бесконечными, а порядок обслуживания Z определяется как FIFO (first in, first out – первый вошел, первый вышел). Это сокращает описание системы до 3 компонентов: Т, Х, С. Интенсивности (Т и Х) обычно стандартные: марковские (М), общие (G), детерминированные (D), хотя возможны и другие описания. С – количество серверов, является целым числом.

Очереди на изолированных перекрестках описываются как M/M/1, то есть:

- М, прибытие по Маркову (не зависит от предыдущих прибытий, распределение Пуассона);
- М, обслуживание по Маркову (время обслуживания не зависит от любого предыдущего времени обслуживания, но изменяется по распределению Пуассона в зависимости от типа транспортного средства, размера и возможности ускорения);
- 1, единый элемент управления (сервер) на перекрестке.

Таким образом, транспортный поток по каждой отдельно взятой полосе движения можно описать как ординарный (вероятность одновременного появления двух и более событий равна нулю), нестационарный (частота

появления событий  $\lambda \neq const$ ), без последствия (не зависит от предыдущих событий).

Важным фактором также является наличие бесконечных входных и выходных очередей: сервер будет удерживать любое транспортное средство во входной очереди до тех пор, пока не будет выполнено обслуживание, и все обслуживаемые транспортные средства покинут систему [9].

Оптимизация пропускной способности в одном направлении через перекресток возможна путем достижения подходящего значения интенсивности обслуживания  $\mu$  по отношению к интенсивности прибытия  $\lambda$ . Сложность расчета возрастает, когда рассматриваются конфликтующие потоки с различными значениями  $\lambda$ . Важно отметить, что соотношение  $\mu$  и  $\lambda$  должно быть  $\mu \geq \lambda$ , в противном случае очередь будет постоянно увеличиваться.

Математическое представление транспортного потока в виде формулы (1) было предложено М. Дж. Бекманном. Оно позволяет

достаточно точно оценить среднее время ожидания автомобилей на перекрестке [10].

$$d = \frac{c-g}{c(1-\frac{q}{s})} \left( \frac{q_0}{q} + \frac{c-g+1}{2} \right), \quad (1)$$

где:  $d$  – среднее время ожидания автомобилей на перекрестке, с;  
 $c$  – длительность цикла регулирования, с;  
 $g$  – время горения зеленого сигнала светофора, с;  
 $q$  – интенсивность прибытия, авт./с;  
 $s$  – интенсивность обслуживания, авт./с;  
 $q_0$  – величина оставшейся очереди, авт.

Для каждого обслуживаемого направления создается модель (рис. 5). На схеме слева направо: генератор поступающих транспортных средств; очередь; пропускной шлюз, разрешающий и запрещающий движение в соответствии с сигналами светофора; сервер, формирующий выходной поток.

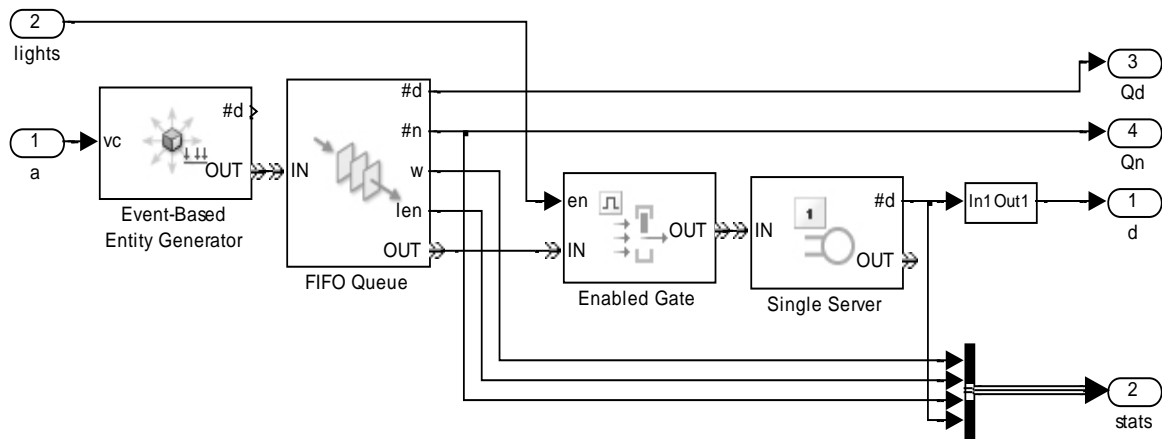


Рисунок 5 – Схема моделирования транспортного потока

Поступление автомобилей на перекресток имеет одинаковую интенсивность в каждом направлении и является случайным процессом с распределением Пуассона. Графики изменения количества автомобилей на перекрестке за каждый цикл регулирования приведены на рис. 6, 7.

Оценка качества управления производится по двум показателям: среднее время ожидания и средняя длина очереди. Для оценки эффективности нечеткой системы управления выполним сравнение её показателей с данными, полученными при фиксированном управлении. Длительность разрешающей фазы регулирования при использовании нечеткой системы управления варьируется в пределах от 29 до 35 секунд, для системы с фиксированным управлением равняется 32 секундам. Результаты моделирования приведены в табл. 3.

Согласно результатам моделирования, при использовании нечеткой системы управления

среднее время ожидания на перекрестке уменьшилось на 11%, а средняя длина очереди – на 8% по сравнению с управлением с фиксированными длительностями фаз.

Стоит отметить, что чем больше динамика изменения интенсивности транспортного потока, тем более эффективным будет адаптивное управление по отношению к фиксированному. Если же интенсивность транспортного потока относительно постоянна, показатели качества рассматриваемых систем будут близкими.

Таблица 3 – Результаты моделирования

Система управления	Ср. время ожидания, с	Ср. длина очереди, авт.
Fixed	10,2	6,8
Fuzzy	11,3	7,4



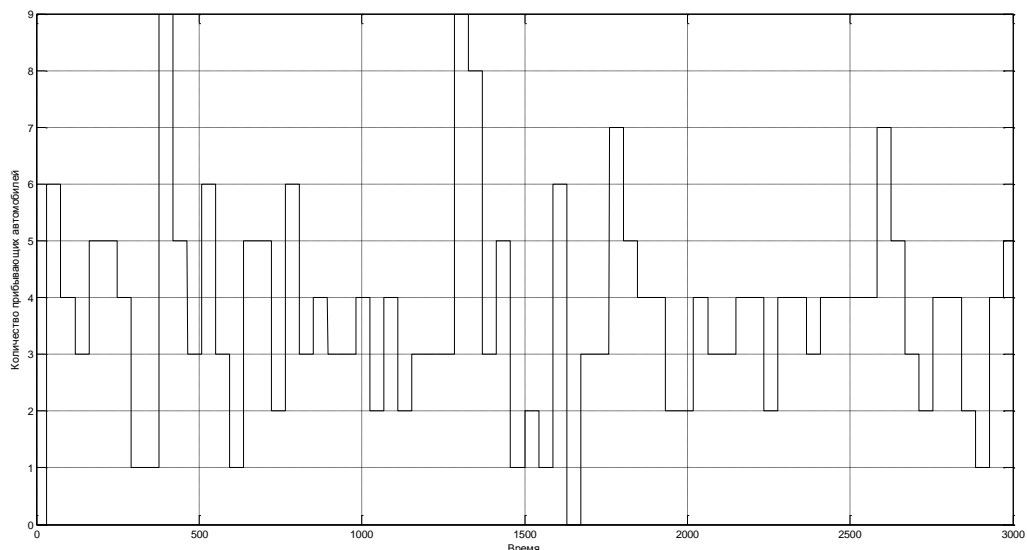


Рисунок 6 – График изменения количества автомобилей на перекрестке в направлении «север-юг»

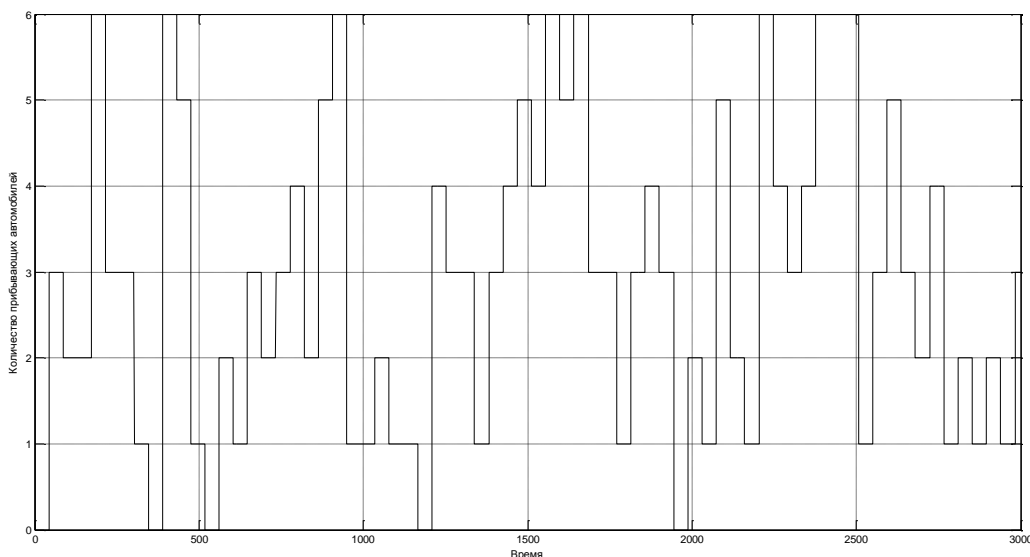


Рисунок 7 – График изменения количества автомобилей на перекрестке в направлении «запад-восток»

### Выводы

Таким образом, в статье рассмотрена актуальность использования систем управления светофорами с замкнутым контуром на основе методов интеллектуального управления, в частности, нечеткой логики. Разработана система интеллектуального управления светофором на X-образном перекрестке с односторонним движением в каждую сторону. Проведено модельное исследование разработанной системы на основе представления перекрестка как системы массового обслуживания. Результаты моделирования показали улучшение качества работы системы управления светофором по таким показателям, как среднее время ожидания автомобилем в очереди и средняя длина очереди автомобилей.

### Литература

1. Белов, Ю. В. Интеллектуальные средства и технологии инфраструктуры городского дорожного движения / Ю. В. Белов, А. Н. Полетайкин // Автомобильный транспорт. – Харьков: Изд-во ХНАДУ, 2014. – Вып. 35. – С. 13-21.
2. Антониади, Г. Д. Интеллектуальная система адаптивного управления работой перекрестка автомобильных дорог / Г. Д. Антониади, В. О. Архипов, А. А. Цуприков // Транспорт: наука, техника, управление. – М.: ВИНТИ, НТС, 2019. – №6. – С 210-215.
3. Шинкарев, А. А. Управление движением транспорта в крупных городах / А. А. Шинкарев // Управление в социальных и экономических системах: сборник

научных трудов / под ред. О.В. Логиновского. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2015. – Вып. 3. – С. 117-125.

4. Кретов, А. Ю. Обзор некоторых адаптивных алгоритмов светофорного регулирования перекрестков / А. Ю. Кретов, И. Е. Агуреев, И. Ю. Мацур // Известия ТулГУ. Технические науки. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2013. – Вып. 7. Ч. 2. – С. 61–66.

5. Абрамова, Л. С. Постановка задачи оптимизации адаптивного управления дорожным движением / Л. С. Абрамова, Н. С. Чернобаев // Вісник ДІАТ. – Донецьк: Вид-во ПП Рекламно-виробнича фірма «Молнія», 2009. – №1. – С. 7–12.

6. Хаханов, В. И. Зеленая волна – облако мониторинга и управления дорожным

движением / В. И. Хаханов // Автоматизированные системы управления. – Харьков: ХНУРЭ, 2012. – Вып. 160. – С. 4–21.

7. Бураков, М. В. Нечеткие регуляторы: учеб. пособие. / М. В. Бураков. – СПб.: ГУАП, 2010. – 237 с.

8. Павлов, А. Н. Принятие решений в условиях нечеткой логики: учеб. пособие / А. Н. Павлов, Б. В. Соколов. – СПб.: ГУАП, 2006. – 72с.

9. Солнышкина, И. В. Теория систем массового обслуживания: учеб. пособие / И. В. Солнышкина. – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВПО «КНАГТУ», 2015. – 76 с.

10. Хейт, Ф. Математическая теория транспортных потоков / Ф. Хейт. – М.: Мир, 1966. – 284 с.

**Стрижко М. А., Червинский В. В. Применение нечеткой логики в системах интеллектуального управления светофорами.** В статье рассмотрена актуальность использования систем светофорного управления транспортными потоками с замкнутым контуром на основе методов интеллектуального управления, в частности, нечеткой логики. Описана конфигурация аппарата нечеткой логики применительно к системам светофорного регулирования. Проведено модельное исследование разработанной системы на основе представления перекрестка как системы массового обслуживания. Проанализированы результаты моделирования. Выполнено сравнение интеллектуальной системы управления с системой управления с фиксированными длительностями фаз по таким показателям, как среднее время ожидания и средняя длина очереди автомобилей.

**Ключевые слова:** светофор, транспортный поток, нечеткая логика, моделирование, система управления, перекресток.

**Strizhko M., Chervinskiy V. Application of fuzzy logic in intelligent traffic light control systems.** The article considers the relevance of using closed-loop traffic light control systems based on intelligent control methods, in particular, fuzzy logic. The configuration of the fuzzy logic apparatus in relation to traffic light control systems is described. A model study of the developed system based on the representation of the intersection as a queuing system was carried out. The analysis of modeling results is carried out. The comparison of an intelligent traffic light control system with a control system with fixed phase durations was carried out according to such indicators as the average waiting time and the average length of the queue of cars.

**Keywords:** traffic light, traffic flow, fuzzy logic, simulation, control system, junction.

Статья поступила в редакцию 26.05.2022  
Рекомендована к публикации профессором Мальчевой Р. В.

УДК 004.056:004.93

## Процедура формирования грамматики для описания спектрограмм технических каналов утечки информации

И. А. Третьяков

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк  
i.tretiakov@mail.ru

### Аннотация

*В данной работе подробно рассмотрена реализация этапа присвоения сегментированным участкам спектрограмм символов некоторого алфавита, соответствующим определенным типам поведения в структурно-лингвистическом подходе анализа данных к задаче обнаружения технических каналов утечки информации. Решена задача построения трансформационной грамматики. Реализован метод построения цепочки, ближайшей к заданному множеству. Получены лингвистические описания исследуемых спектрограмм.*

### Введение

В настоящее время актуальной научно-технической задачей в области информационной безопасности является задача обнаружения технических каналов утечки информации и побочных электромагнитных излучений и наводок [1-4].

В данной работе рассмотрено решение этой задачи в рамках структурно-лингвистического подхода [5, 6] к анализу экспериментальных данных.

Структурный анализ предполагает последовательность реализации трех основных этапов обработки спектрограмм:

- выделения и распознавания характерных участков (сегментация);
- присвоения выделенным участкам символов некоторого алфавита, соответствующих определенным типам поведения кривой (формирование грамматики);
- анализа полученных последовательностей символов.

Данная статья посвящена реализации второго этапа - формированию грамматики для описания спектрограмм технических каналов утечки информации. В рамках этого этапа набор присваиваемых символов представляет собой алфавит, в котором компоненты являются кодовыми обозначениями поведения кривой на каждом участке.

Для формирования такого алфавита необходимо применять алгоритмы автоматической классификации, которые будут осуществлять распределение массивов векторов на классы, количество которых определяется самим алфавитом, и устанавливать критерии, по которым каждый новый вектор будет распределен в тот или иной класс. Иными словами будут присваивать им конкретные символы.

### Постановка задачи формирования грамматики

В качестве массива экспериментальных данных для реализации процедуры формирования грамматики послужили спектрограммы технических каналов утечки информации, полученные с помощью программно-определяемой радиосистемы (SDR) (рис. 1) на базе RTL2832 и R820T в ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет».



Рисунок 1 – Внешний вид программно-определяемой радиосистемы

SDR представляют набор программных и специальных аппаратных средств, которые позволяют решать круг задач анализа взаимодействия радиоизлучений в широком диапазоне частот. Некоторые SDR системы могут использоваться для решения задач мониторинга спектра радиочастот [7, 8]. Данный класс устройств, благодаря возможностям программного управления, реализует функции физического уровня, что обеспечивает возможность обработки различных типов сигналов без изменения аппаратной части принимающего устройства. На рис. 2 показан процесс выявления технических каналов утечки информации и образец получаемых спектрограмм.

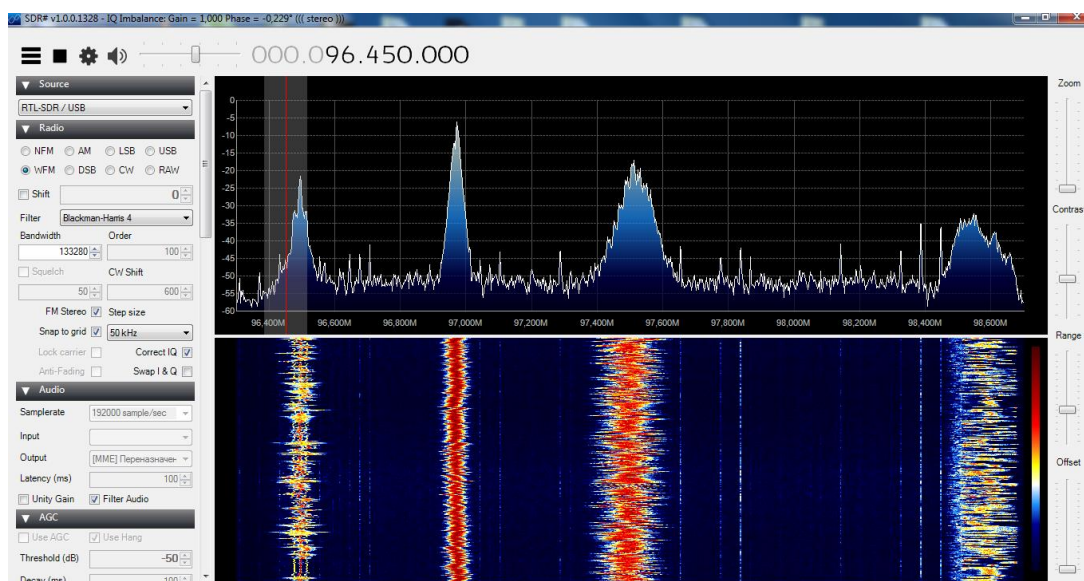


Рисунок 2 – Визуализация спектра радиобстановки

В результате выполнения первого этапа, а именно применения алгоритмов сегментации и классификации выделенных фрагментов [9] анализируемая спектрограмма оказывается представленной в виде упорядоченной последовательности символов конечного алфавита. Такую последовательность можно рассматривать как некоторый текст на неизвестном языке, в данном случае языке, специально приспособленном для описания обрабатываемых спектрограмм. При этом каждую цепочку можно рассматривать как некоторую фразу на данном языке.

Для описания получаемых спектрограмм зададим следующий алфавит: передний фронт обозначим символом  $L$  (left), центральную часть -  $C$  (central), задний фронт -  $R$  (right). Не информативные (фоновые) участки будут обозначаться символом  $b$  (background). Таким образом сформирован алфавит языка описания исследуемых спектрограмм, состоящий из 4х символов  $A = \{L, C, R, b\}$ .

С такой точки зрения задачу формирования языка описания спектрограмм технических каналов утечки информации можно сформулировать следующим образом:

- задано некоторое количество текстов в виде множества упорядоченных последовательностей символов;

- необходимо сформулировать алфавит более крупных лингвистических единиц, чем отдельные символы, т. е. словарь слов, каждое из которых есть и том или ином смысле устойчивая цепочка символов;

- необходимо представить каждый из заданных текстов в виде одного или нескольких слов этого словаря.

Пусть имеется всего один достаточно длинный текст  $T = \langle a_1 \dots a_N \rangle$ . Каждая

упорядоченная пара индексов  $(i, j)$ ,  $i \leq j$ ,  $1 \leq i, j \leq N$  вырезает из  $T$  некоторый отрезок последовательности, получающийся стиранием в  $T$  символов с индексами, меньшими  $i$  и большими  $j$ :  $c(i, j) = \langle a_i, a_{i+1}, \dots, a_j \rangle$ . Каждому отрезку соответствует образ — упорядоченная последовательность его символов, у которых отброшены индексы, учитывающие местоположение этого отрезка в тексте  $T$ . Очевидно, что в тексте может встретиться несколько отрезков, соответствующих одному образу. Необходимо найти такие наборы образов, из которых можно составить заданный текст  $T$ . Один из таких наборов и есть искомым словарь.

### Формирование грамматики

Разбиение  $D$  текста  $T$  на непересекающиеся отрезки задает некоторый словарь  $M(D)$ . Формирование словаря можно рассматривать как выделение набора макрособытий в развитии исследуемого процесса. Эти макрособытия отражены в символическом представлении спектрограмм в виде стабильных цепочек символов. Например, в задаче распознавания устной речи такого рода слова можно отождествлять с фонемами. В этом случае выделение фонем в сигнале речи является не процессом сегментации этого сигнала, а процессом его лингвистического анализа.

Пусть сформирован словарь  $M$ . Обозначим через  $L$ , множество всех конечных цепочек символов из алфавита  $A$ . Рассмотрим подмножество  $\hat{L}(M) \subset L$  всех таких цепочек, каждая из которых представляет собой последовательность слов из словаря  $M$ . Подмножество цепочек  $\hat{L}(M)$  является языком, полностью определяемым словарем  $M$ . Цепочка

$T$  принадлежит языку  $\hat{L}(M)$ , т.е. является его правильной цепочкой, тогда и только тогда, когда существует такое ее разбиение  $D$ , что образ каждого отрезка из  $D$  является в точности словом из  $M$ . При этом всякое слово также является правильной цепочкой языка  $\hat{L}(M)$ .

Язык, в котором любая последовательность слов из  $M$  является правильной цепочкой, будет являться языком с морфологической грамматикой. Для того чтобы морфологическую грамматику можно было использовать для анализа текстов, т.е. других экспериментальных данных, необходимо иметь процедуру преобразования символьного текста в упорядоченный набор слов, или же процедуру разбиения текста на слова из словаря. Иными словами, необходима процедура распознавания правильности этого текста на языке  $\hat{L}(M)$ .

Исследуемые спектрограммы можно описать правильными текстами вполне строго. Задачи их обработки нацелены на автоматизацию анализа таких данных, в которых смена состояний исследуемого процесса не имеет жесткой логической закономерности. Даже если алгоритмы сегментации и формирования алфавита используются для обработки высокоструктурированных сигналов (например, речевых), то и в этом случае алгоритмы сегментации и автоматической классификации вносят в формируемые ими последовательности символов существенный элемент случайности.

Таким образом, такую морфологическую грамматику следует рассматривать лишь как модель, более или менее точно аппроксимирующую тексты, порождаемые экспериментальными данными. Чтобы ее использовать в полной мере, требуется дополнить механизм порождения правильных текстов над словарем некоторым искажающим механизмом, позволяющим порождать цепочки, мало отличающиеся от правильных. Для этого прежде всего необходимо задать некоторую меру сходства двух произвольных цепочек символов алфавита  $A$ . Она должна отражать степень искажения при переходе от одной из цепочек к другой. Роль искажающего механизма необходимо возложить на трансформационную грамматику, содержащую некоторое множество элементарных трансформаций, т.е. единичных искажений. Тогда в качестве меры сходства между двумя цепочками естественно принять минимальное число элементарных трансформаций, необходимых для перехода от одной цепочки к другой.

Назовем язык  $\hat{L}(M)$  ядром нечеткого языка  $\xi$ , определяемого парой  $\langle \hat{L}(M), \mathcal{Q} \rangle$ , где  $\mathcal{Q}$  — некоторая трансформационная грамматика.

Пусть  $\mathcal{Q}$  определяет меру отличия  $r(\hat{T}, T)$  произвольной цепочки  $T \in L$  от ядерной цепочки  $\hat{T} \in \hat{L}(M)$ . Под степенью несоответствия  $\rho(T, \xi)$  данной цепочки  $T$  нечеткому языку  $\xi$  понимается величина:

$$\rho(T, \xi) = \min_{\hat{T} \in \hat{L}(M)} r(\hat{T}, T). \quad (1)$$

Тогда задача анализа текста  $T$  может представлять собой нахождение для данной цепочки  $T$  последовательность слов  $\langle m_1, m_2, \dots, m_k \rangle = \hat{T}$  из словаря  $M$  такую, чтобы мера отличия  $T$  от ядерной цепочки  $\hat{T}$  имела минимальное значение на множестве всех возможных ядерных цепочек, что является естественным аналогом задачи нахождения жесткого разбиения текста на слова. Полученная в результате ее решения последовательность слов принимается в качестве окончательного описания анализируемой спектрограммы.

### Построение трансформационной грамматики

Рассмотрим на примере элементарные трансформации текста, такие как стирание и дописывание одного символа из алфавита  $A$ . Пусть  $T_1 = \langle LCLL \rangle$  и  $T_2 = \langle LLCL \rangle$ . Каждой паре цепочек  $\langle T_1, T_2 \rangle$  сопоставим сеть  $G(T_1, T_2)$ .

Каждый путь  $S$ , ведущий из истока в сток сети  $G(T_1, T_2)$ , порождает цепочку элементарных трансформаций, переводящую  $T_1$  в  $T_2$ . При этом движение по левой вертикали клетки  $(i, j)$  означает, что между последним символом уже трансформированной части цепочки  $T_1$  и первым символом еще не трансформированной ее части (в данном случае это символ, стоящий в  $T_1$  на  $i$ -м месте) вставляется символ, стоящий в  $T_2$  на  $j$ -м месте. Движение по верхней горизонтали этой клетки означает, что в  $T_1$  требуется удалить символ, стоящий на  $i$ -м месте. Движение по диагонали означает, что символ, стоящий в  $T_1$  на  $i$ -м месте, остается в выстраиваемой цепочке без изменения.

Зададим на множестве дуг сети  $G(T_1, T_2)$  систему весов, а именно: каждой вертикальной и горизонтальной дуге припишем вес 1, а каждой диагональной дуге припишем вес 0. Длину пути  $l(S)$  определим как сумму весов всех дуг, лежащих на этом пути. В качестве меры сходства цепочек  $T_1$  и  $T_2$  примем минимум из длин всех путей из множества (1). Сеть  $G(T_1, T_2)$ , соответствующая паре цепочек  $T_1 = \langle LCLL \rangle$  и

$T_2 = \langle LLCL \rangle$ , представлена на рис. 3.

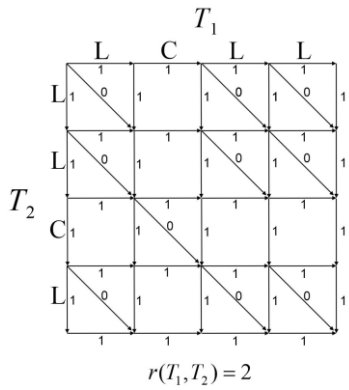


Рисунок 3 – Сеть трансформации цепочек

Теперь зададим ядро  $\hat{L}(M)$  и рассмотрим цепочку  $T \in L$  конечной длины, полученную при обработке исследуемой спектрограммы. Правильным описанием данной спектрограммы на языке  $\hat{L}(M)$ , аппроксимирующем исходный текст  $T$ , является цепочка удовлетворяет условию:

$$r(\hat{T}, T) = \min_{T' \in \hat{L}(M)} r(T', T). \quad (2)$$

Идея нахождения правильного описания для данного текста полностью раскрывается на примере, изображенном на рис. 4, и описывается далее.

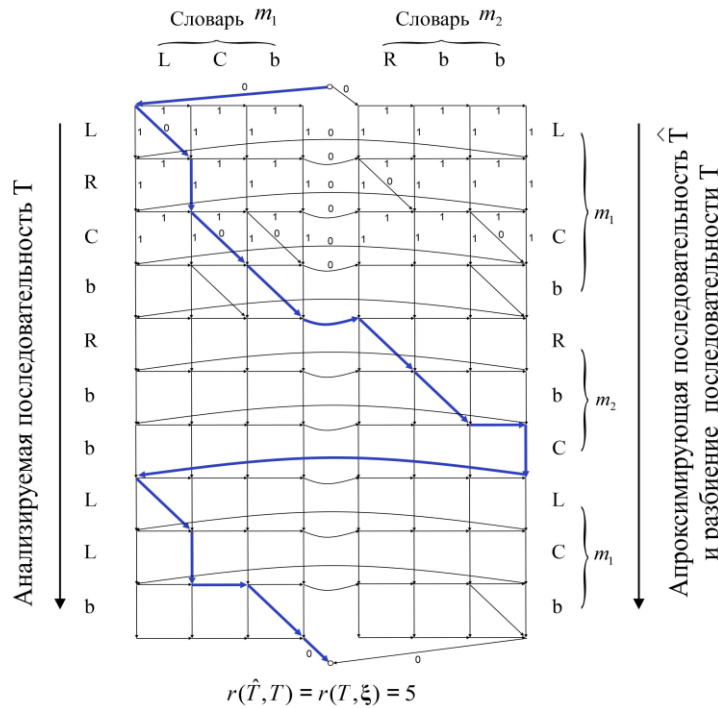


Рисунок 4 – Разбиение цепочки в соответствии с заданным словарем

Пусть словарь  $M$  состоит из двух слов:  $m_1 = \langle LCb \rangle$ ,  $m_2 = \langle Rbb \rangle$ ,  $A = \{L, C, R, b\}$ . Для анализа предъявлена цепочка  $\langle LRCbRbbLLb \rangle$ , состоящая из 10 символов. Построим две прямоугольные решетки для каждого слова отдельно точно так же, как это делалось при построении сети  $G(T_1, T_2)$ . При этом вершины клеток понимаются как вершины графа, а ребра, ориентированные соответствующим образом как его дуги. Каждой дуге припишем вес, равный единице. Такой граф, построенный на основе двух решеток, является несвязным. Добавим в него еще ряд дуг, имеющих нулевые веса, а именно:

- диагональные дуги в клетках, сверху и слева от которых стоят одинаковые символы;
- дуги, соединяющие вершины крайнего

правого вертикального ряда каждого слова с вершинами крайнего левого вертикального ряда других слов, расположенных в том же горизонтальном ряду (кроме верхнего и нижнего рядов);

- дуги, ведущие из специальной входной вершины (истока) в верхние вершины левых вертикальных рядов каждого из слов, а также из нижних вершин правых рядов в выходную вершину (сток).

Входную и выходную вершины полученного графа связывают все те и только те пути, по которым предъявленная цепочка  $T$  может быть получена в соответствии с правильными последовательностями трансформаций из всевозможных последовательностей слов данного словаря, а длина пути равна числу необходимых при этом элементарных трансформаций и, следовательно,

значению меры различия соответствующей правильной цепочки  $\hat{T}$  ядра языка  $\hat{L}(M)$  и анализируемой цепочки  $T$ . Кратчайший путь дает морфологический анализ предъявленной цепочки  $T$  в виде последовательности слов, а длина этого пути дает степень ее несоответствия (2) правильному описанию  $\hat{T}$ .

**Метод построения цепочки, ближайшей к заданному множеству**

Рассмотрим на примере реализацию метода построения цепочки, ближайшей к заданному множеству цепочек. Пусть  $\{T_1, \dots, T_n\}$  — некоторый массив цепочек. Разбором  $R$  этого массива называется прямоугольная таблица, состоящая из  $n$  строк и некоторого числа  $k$  столбцов, каждая клетка которой либо пуста, либо содержит один символ из алфавита  $A$  причем символы в  $j$  й строке, расположенные в порядке возрастания номеров столбцов, составляют цепочку  $T_j$ , а цепочка, составленная из символов в клетках одного столбца, является повторением одного символа. Например, для массива из трех цепочек  $\{\langle CRL \rangle, \langle CLR \rangle, \langle bCLR \rangle\}$  могут быть записаны, в частности, два разбора, показанные на рисунке 5.

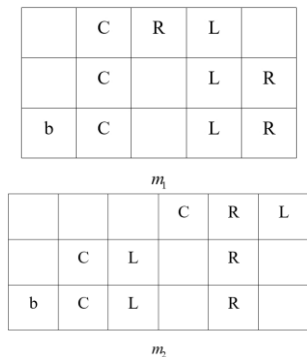


Рисунок 5 – Разбиение цепочки в соответствии с заданным словарем

Запись двух цепочек  $T_{j_1}$  и  $T_{j_2}$  в некоторых двух строках разбора указывает способ перехода от одной цепочки к другой с помощью последовательности элементарных трансформаций. Их число равно числу столбцов, в которых есть символ в одной из этих строк и нет в другой. Пусть  $R$  – некоторый разбор,  $k$  – число столбцов в нем,  $n$  – число строк (число цепочек в массиве). Каждый столбец разбора содержит некоторое число повторений одного и того же символа. Цепочка, образованную символами столбцов, обозначим как  $T(R)$  и будет объединяющей цепочкой разбора  $R$ .

Для каждого  $i$ -го столбца подсчитаем число символов в нем  $n_i(R)$  и величину  $p_i(R) = n_i(R)/n$ , называемую частотой символа в  $i$ -м столбце. В цепочке  $T(R)$  выделим символы, для которых  $p_i(R) \geq 0,5$ . Цепочку, образованную этими символами, обозначим как  $\tilde{T}(R) = \langle a_{i_1} \dots a_{i_s} \rangle$  и будем считать собственной цепочкой разбора  $R$ . Для приведенных на рисунке 5 двух примеров разбора:

$$T(R_1) = \langle bCRLR \rangle, T(R_2) = \langle bCLCRL \rangle,$$

$$\tilde{T}(R_1) = \langle CL \rangle, \tilde{T}(R_2) = \langle CLR \rangle.$$

Рассмотрим оптимальное дописывание нового столбца к построенному разбору, показанного на рисунке 6.

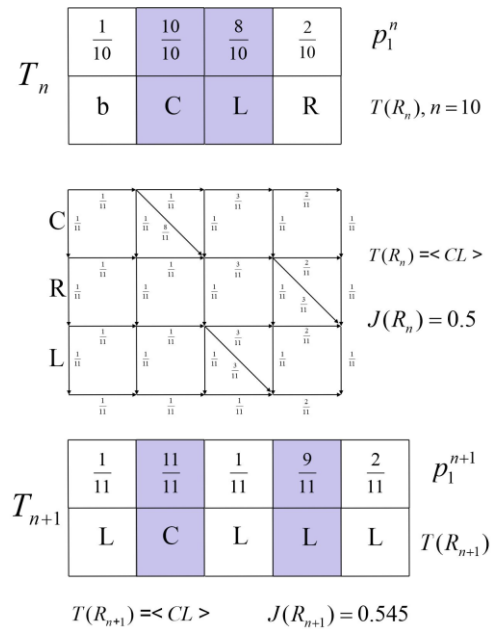


Рисунок 6 – Дописывание новой строки к построенному разбору

На рисунке 6 в закрашенных столбцах обозначены символы с частотами  $p_i \geq 0,5$ , образующие собственные цепочки  $\tilde{T}(R_n)$  и  $\tilde{T}(R_{n+1})$ . Для понимания правил вычисления весов дуг сети эти веса, а также частоты символов объединяющих цепочек  $T(R_n)$  и  $T(R_{n+1})$  представлены в виде правильных дробей.

**Выводы**

В результате применения структурно-лингвистического подхода к задаче обнаружения технических каналов утечки информации и побочных электромагнитных излучений и

наводок можно заключить, что полученные лингвистические описания исследуемых спектрограмм представляют короткие и надежные правила для их анализа и позволяют в автоматизированном режиме выявлять изменения этих сигналов.

### Литература

1. Фаустов, И. С. Радиоконтроль служебных параметров сигналов Bluetooth / И. С. Фаустов, А. Б. Токарев, В. А. Сладких, В. А. Козьмин, И. Б. Крыжко // Системы управления, связи и безопасности. – 2021. – №3. – С. 135-151.
2. Ашихмин, А. В. Способ однопозиционного местоопределения источников радиоизлучения с использованием бортового радиопеленгатора беспилотного летательного аппарата вертолетного типа / А. В. Ашихмин, А. Д. Виноградов, А. М. Рембовский, В. А. Сладких // Системы управления, связи и безопасности. – 2021. – № 4. – С. 40-57.
3. Третьяков, И. А. Спектральный анализ радиосигналов в реальном времени на основе применения эхо-эффекта / И. А. Третьяков, В. В. Данилов // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 1. С. 53-59.
4. Третьяков, И. А. Исследование спектрограмм радиочастот методами лингвистического анализа / И. А. Третьяков, В. В. Данилов // Вестник Астраханского

государственного технического университета. Серия: управление, вычислительная техника и информатика. – 2020. – № 3. – С. 26-33.

5. Моттль, В.В. Лингвистический анализ экспериментальных кривых / В. В. Моттль, И. Б. Мучник // ТИИЭР. – 1979. – Т.69. – №5. – С. 12-39.
6. Чистова, Г. К. Методы и процедуры построения лингвистической системы обнаружения и распознавания нарушителя / Г. К. Чистова, В. И. Волчихин // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Приборостроение». – 2004. – № 3. – С. 96-114.
7. Рушечников, Я. И. Информационная технология радиомониторинга на основе программно-определяемой радиосистемы / Я. И. Рушечников, В. В. Данилов // Вестник Донецкого национального университета. Серия Г: Технические науки. – 2020. – № 1. – С. 31-36.
8. Рушечников, Я. И. Информационная технология автоматизированной локализации источника излучения / Я. И. Рушечников, В. В. Данилов, С. В. Борщевский // Вестник Донецкого национального университета. Серия Г: Технические науки. – 2020. – № 4. – С. 26-34.
9. Данилов, В. В. Алгоритмы идентификации переходных участков экспериментальных кривых с применением аппроксимации / В. В. Данилов, И. А. Третьяков, А. В. Шалаев, Я. И. Рушечников // Сборник научных трудов ДОНИЖТ. – 2018. – № 48. – С. 19-23.

**Третьяков И.А. Процедура формирования грамматики для описания спектрограмм технических каналов утечки информации.** В данной работе подробно рассмотрена реализация этапа присвоения сегментированным участкам спектрограмм символов некоторого алфавита, соответствующим определенным типам поведения в структурно-лингвистическом подходе анализа данных к задаче обнаружения технических каналов утечки информации. Решена задача построения трансформационной грамматики. Реализован метод построения цепочки, ближайшей к заданному множеству. Получены лингвистические описания исследуемых спектрограмм.

**Ключевые слова:** структурно-лингвистический подход, программно-определяемая радиосистема, анализ данных, формирование грамматики, радиомониторинг

**Tretiakov I.A. The procedure for forming a grammar for describing spectrograms of technical channels of information leakage.** In this paper, the implementation of the stage of assigning segmented sections of spectrograms of symbols of a certain alphabet corresponding to certain types of behavior in the structural-linguistic approach of data analysis to the task of detecting technical channels of information leakage is considered in detail. The problem of constructing a transformational grammar is solved. The method of constructing a chain closest to a given set is implemented. Linguistic descriptions of the studied spectrograms are obtained.

**Key words:** structural-linguistic approach, software-defined radio system, data analysis, grammar formation, radio monitoring.

Статья поступила в редакцию 19.05.2022  
Рекомендована к публикации



## Самоорганизованная критичность в BML–модели транспортного потока

Д. В. Бельков, В. И. Зензеров  
Донецкий национальный технический университет  
E-mail: [belkovdv@list.ru](mailto:belkovdv@list.ru)

### Аннотация

Выполнено исследование модели BML (Biham-Middleton-Levine) движения автотранспорта с учетом самоорганизованной критичности. В результате определено, что в синхронизированном потоке имеется набор метастабильных критических состояний, переходящих друг в друга посредством лавин, процесс уменьшения потока при изменении плотности в пределах 0,5 – 0,8 происходит по степенному закону с достоверностью не ниже 0,77, а также получена ступенчатая зависимость параметра порядка  $d$  от управляющего параметра  $p$  при пороговом значении равном 0,5.

### Введение

Для поиска эффективных стратегий управления транспортными потоками в мегаполисе, оптимальных решений по проектированию улично-дорожной сети и организации дорожного движения необходимо учитывать широкий спектр характеристик транспортного потока, закономерности влияния внешних и внутренних факторов на динамические характеристики потока.

Для моделирования движения автотранспорта получили большое развитие клеточные автоматы. В связи с этим, в теории транспортных потоков предложено множество моделей [1,2,3]. Целью данной статьи является моделирование плотного транспортного потока с учетом фаз синхронизированного потока и затора. Задача – исследование модели BML (Biham-Middleton-Levine) движения автотранспорта с учетом самоорганизованной критичности (SOC).

Теория самоорганизованной критичности является одной из парадигм синергетики. Она призвана объяснить такие закономерности, как масштабная инвариантность и прерывистое равновесие [4]. Согласно теории SOC естественная динамика сложных систем приводит их к критическим состояниям, т.е. системы самоорганизуют себя таким образом, чтобы оказаться в критическом состоянии.

Явление самоорганизованной критичности представляет собой по структуре набор метастабильных критических состояний, переходящих друг в друга посредством «лавин». Лавины могут быть как малыми, так и охватывающими всю систему, и те, и другие вызываются одинаково малыми внешними возмущениями.

### Фазы транспортного потока

В современной теории транспортного потока важное место занимает фундаментальная диаграмма. Это зависимость потока от его плотности. Величина потока  $q(x,t)$  равна числу машин, пересекающих сечение автомагистрали в точке  $x$  за единицу времени. Идеальная фундаментальная диаграмма, предложенная в модели Лайтхилла–Уизема, показана на рис. 1.

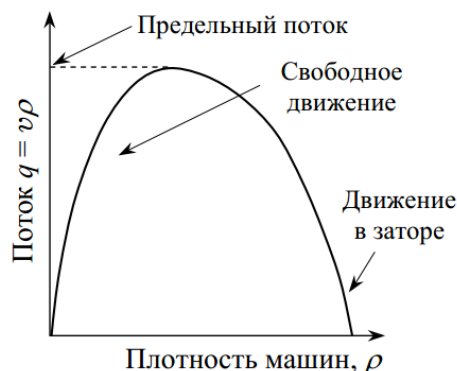


Рисунок 1 – Фундаментальная диаграмма

В транспортном потоке различают свободный и плотный потоки. В модели Б.С. Кернера [5] плотный поток состоит из двух фаз: синхронизированный поток и широкие перемещающиеся пробки. Таким образом, различаются три фазы движения транспортного потока и его свойства объясняются с помощью фазовых переходов между перечисленными состояниями потока. Эти состояния соответствуют различным фрагментам основной диаграммы.

При свободном движении, когда дорога не загружена, водители придерживаются желаемой скорости, свободно переходя на соседние полосы. Корреляции в движении

отдельных автомобилей подавлены, и средняя скорость машин определяется только средним расстоянием между ними.

Синхронизированное движение, соответствующее убывающей ветви основной диаграммы, возникает, когда водители не могут свободно маневрировать, и вынуждены согласовывать свою скорость со скоростью потока. Машин мешают друг другу разогнаться до оптимальной скорости, но поток не переходит в состояние затора. В таком потоке формируются большие кластеры автомобилей, которые перемещаются по автомагистрали как единое целое. Такой кластер может распространяться на все ряды магистрали и содержать десятки машин по направлению движения. В этом случае корреляции в движении отдельных автомобилей достаточно велики. С ростом плотности потока движение становится неустойчивым, и поток распадается на отдельные группы автомобилей с неравномерным движением. При уменьшении средней скорости до 20 км/ч начинается формирование заторов. Фазовые состояния в реальном транспортном потоке показаны на рис. 2.

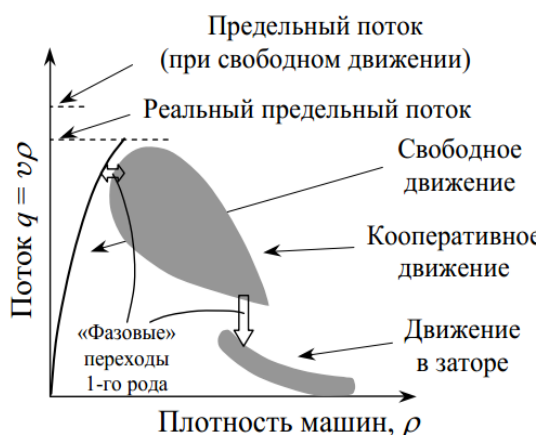


Рисунок 2 – Фазовые состояния транспортного потока

Переход от свободного (F) к плотному потоку в теории трех фаз соответствует возникновению фазы синхронизованного потока, т.е. фазовому переходу  $F \rightarrow S$ . Природу  $F \rightarrow S$  перехода можно объяснить с помощью «соревнования» во времени и пространстве двух противоположных процессов: ускорения машин при обгоне более медленного автомобиля впереди, (переускорение), и в случае, когда обгон невозможен, торможения машин до скорости более медленного автомобиля (адаптация скорости). Переускорение поддерживает дальнейшее существование свободного потока. Адаптация скорости ведет к синхронизованному потоку.

Спонтанный  $F \rightarrow S$  переход может произойти в широком диапазоне значений

величины потока  $q$  в свободном транспортном потоке. Основываясь на эмпирических данных измерений, Б.С. Кернером был сделан вывод, что существует бесконечное число значений пропускной способности автомагистрали в свободном потоке. Как показано на рис. 3, это бесконечное число значений пропускной способности находится в диапазоне между минимальным  $q_{th}$  и максимальным  $q_{max}$  значениями пропускной способности. Если величина потока близка к максимальному значению пропускной способности, то достаточно малое возмущение в свободном потоке вблизи узкого места приведет к спонтанному  $F \rightarrow S$  фазовому переходу. Если величина потока близка к минимальному значению пропускной способности, то только возмущение большой амплитуды способно привести к спонтанному  $F \rightarrow S$  фазовому переходу.

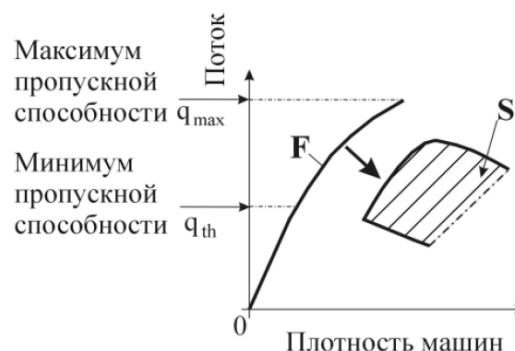


Рисунок 3 – Максимум и минимум пропускной способности

В теории трех фаз движение в заторе соответствует широкому движущемуся кластеру автомобилей. Такое состояние (wide moving jam, фаза J) не возникает в свободном потоке, но может возникнуть в области синхронизованного потока [6,7]. Образование затора является результатом каскада  $F \rightarrow S \rightarrow J$  фазовых переходов, показанного на рис. 4.

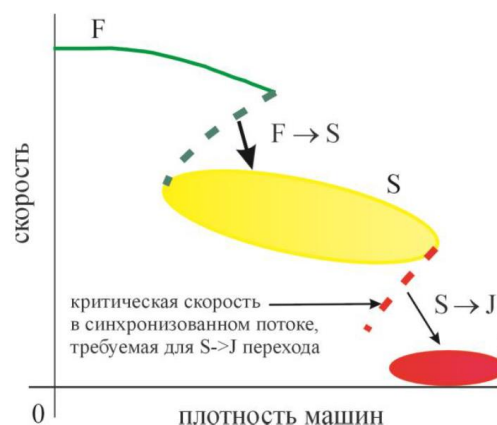


Рисунок 4 – Каскад фазовых переходов

Важной особенностью транспортного потока является переход в затор через последовательность метастабильных состояний синхронизованного потока. Область метастабильных состояний показана на рис. 5.

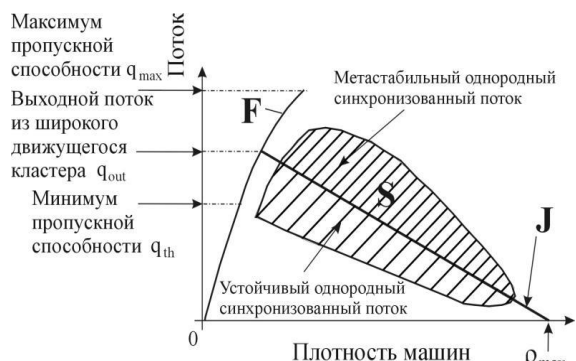


Рисунок 5 – Область метастабильных состояний

На рис. 6 показана последовательность метастабильных состояний при переходе от свободного потока к затору [8]. Скорость потока со временем уменьшается, возникает несколько метастабильных состояний синхронизованного потока.

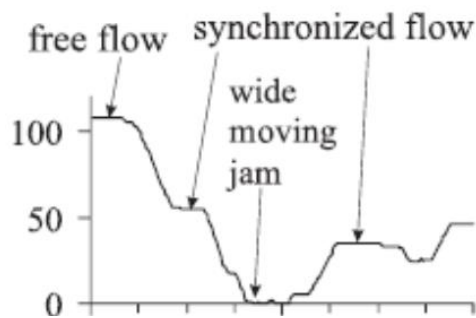


Рисунок 6 – Метастабильные состояния синхронизованного потока

### Самоорганизованная критичность

В данной статье сделано предположение, что набор метастабильных состояний синхронизованного потока соответствует состоянию самоорганизованной критичности. Реализация в системе такого состояния означает, что она под влиянием малых внешних возмущений приходит в критическое состояние, которое в процессе дальнейшей эволюции является самоподдерживающимся. По структуре оно представляет собой набор метастабильных состояний, переходящих друг в друга посредством лавин, инициируемых малыми внешними возмущениями. Размеры возникающих лавин демонстрируют степенное распределение.

Базовой моделью теории SOC является куча песка. Рассмотрим кучу песка, изображенную на рис. 7.

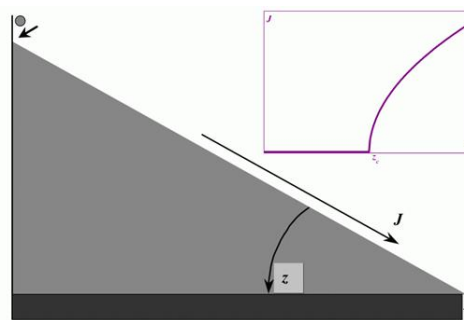


Рисунок 7 – Куча песка

Состояние системы полностью определяется наклоном поверхности. В тех местах, где локальный наклон оказывается больше порога устойчивости, происходит осыпание песчинок вниз по склону на соседние участки поверхности (лавина). Состояние песка определяется углом наклона поверхности  $y$ . При его изменении происходит фазовый переход от неподвижного состояния к состоянию непрерывного тока песка. Если средний наклон поверхности  $y$  меньше чем  $y_c$ , то песок неподвижен. Если наклон превышает значение  $y_c$ , возникает спонтанный ток песка  $J$  по поверхности. Возникает фазовый переход, в котором управляющим параметром является наклон  $y$ , а параметром порядка – ток песка  $J$ . Критическое значение наклона  $y_c$  разделяет хаотическую ( $y < y_c$ ) и упорядоченную ( $y > y_c$ ) фазы. Обе эти фазы соответствуют состоянию системы устойчивому к малым возмущениям. В хаотической фазе они еще быстро затухают во времени и пространстве, а в упорядоченной – уже не могут существенно влиять на величину тока. Зависимость параметра порядка от управляющего параметра приведена на врезке рис. 7.

Одной из областей, где теория самоорганизованной критичности позволила добиться успеха при моделировании процесса, является биологическая эволюция. Объектом эволюции является вид, представляющий собой группу особей, упорядоченных по возрастанию приспособленности к условиям окружающей среды. Приспособленность видов изменяется в результате двух различных процессов. Во-первых, переход от одной особи к соседней особи увеличивает приспособленность вида, и он поднимается выше по эволюционному ландшафту. Этот процесс можно назвать мутацией особей. Во-вторых, переход от одного вида к другому обеспечивает связь между видами. В результате такой мутации видов изменяется эволюционный ландшафт. В критическом состоянии экосистема демонстрирует прерывистое равновесие (перемежаемость). Пример [9] прерывистого равновесия в модели эволюции показан на рис. 8.

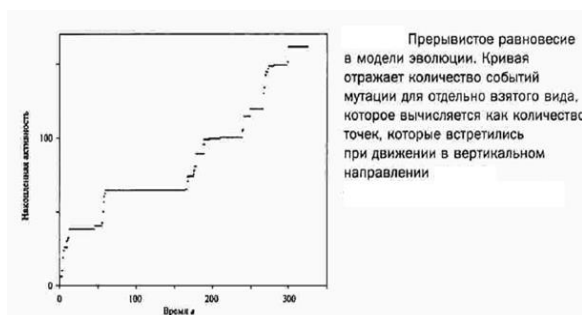


Рисунок 8 – Пример прерывистого равновесия

Аналогия между эволюцией видов и процессом перехода в затор показана в табл. 1.

Таблица 1 – Аналогия процессов

Эволюция видов	Переход в затор
Особь	Автомобиль
Вид	Метаустойчивое состояние потока
Мутация особей	Переход между метастабильными состояниями (лавина)
Мутация видов	Движение в метастабильных состояниях потока
Общая накопленная приспособленность	Скорость свободного потока
Эволюционный ландшафт	Ландшафт скорости

### Вычислительный эксперимент

При исследовании фазовых состояний транспортного потока в данной статье используется модель BML [10], реализованная в среде программирования R. Она известна как самоорганизующаяся модель транспортного потока на основе детерминированного клеточного автомата. Подвижные элементы представлены точками на решетке со случайным стартовым положением. Модель BML является двумерной аналогией движения по правилу 184.

Правило 184 – модель, в которой подвижные элементы подобно частицам движутся в одном направлении, останавливаясь и продолжая движение в зависимости от наличия элементов впереди. Эта модель является наиболее простым примером применения клеточных автоматов к моделированию потоков и служит основой для других, более сложных, моделей.

Модель имеет следующие правила перехода: если ячейка  $i$  не пуста, а  $(i + 1)$  – пуста, то на следующем шаге ячейка  $(i + 1)$  оказывается занята. Значение ячейки  $i$  для новой итерации определяется её левым соседом, для которого схема определения состояния аналогична.

BML-модель позволяет в зависимости от значения параметра  $p$  (плотность машин)

получать различные метастабильные состояния величины  $v$  (количество подвижных машин). Результаты моделирования показаны на рис. 9–16.



Рисунок 9 – Метаустойчивые состояния в синхронизированном потоке при  $p=0,5$

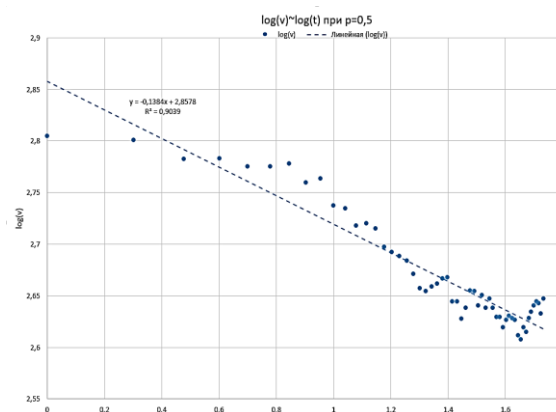


Рисунок 10 – Степенной закон уменьшения скорости при  $p=0,5$

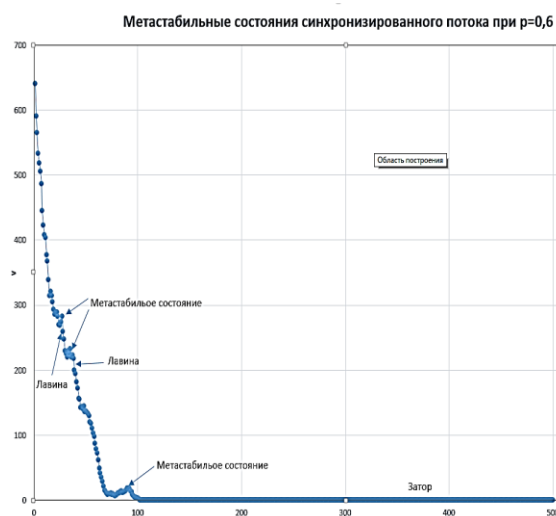


Рисунок 11 – Метаустойчивые состояния в синхронизированном потоке при  $p=0,6$

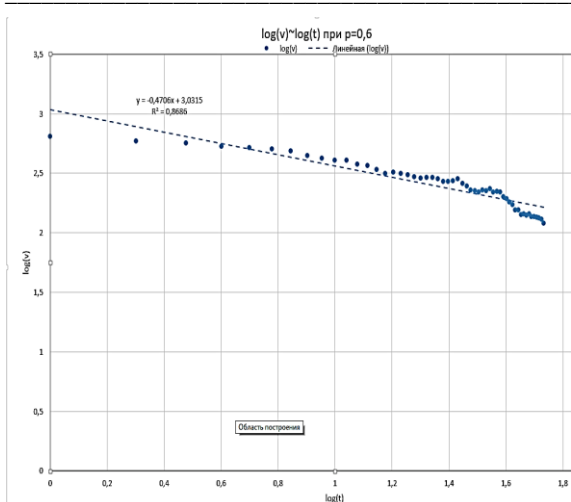


Рисунок 12 – Степенной закон уменьшения скорости при  $\rho=0,6$



Рисунок 15 – Метастабильные состояния в синхронизированном потоке при  $\rho=0,8$

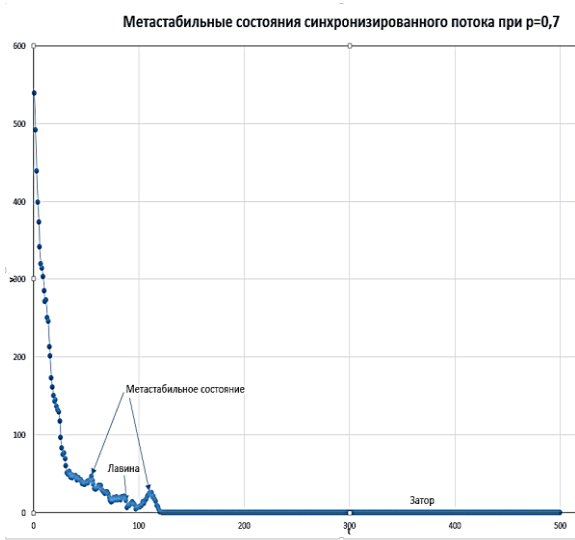


Рисунок 13 – Метастабильные состояния в синхронизированном потоке при  $\rho=0,7$

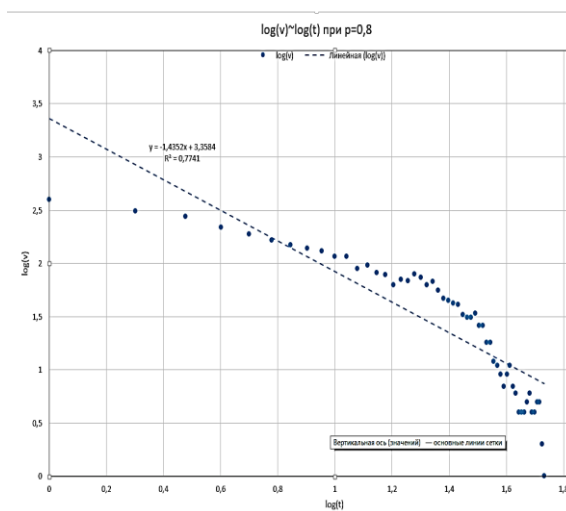


Рисунок 16 – Степенной закон уменьшения скорости при  $\rho=0,8$

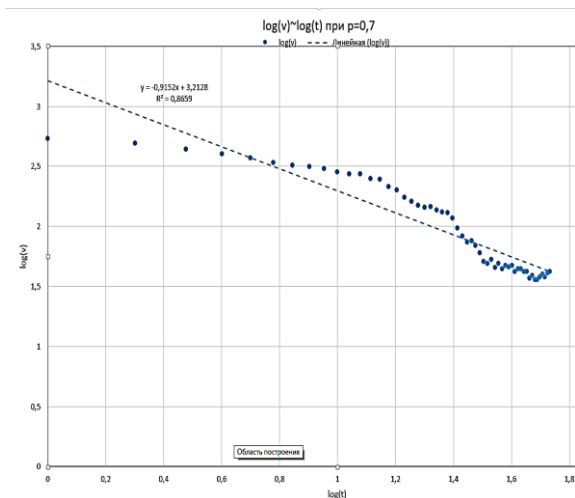


Рисунок 14 – Степенной закон уменьшения скорости при  $\rho=0,7$

На рис. 17 показана зависимость длительности затора  $d$  от плотности машин  $\rho$ .

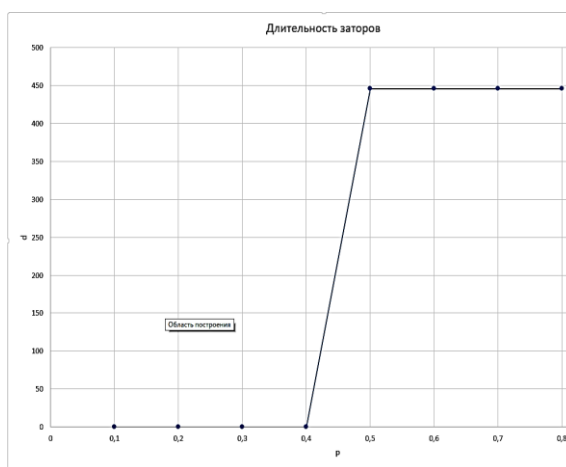


Рисунок 17 – Зависимость параметра порядка  $d$  от управляющего параметра  $\rho$

## Выводы

В работе выполнено исследование модели BML (Biham-Middleton-Levine) движения автотранспорта с учетом самоорганизованной критичности. Получены следующие результаты: в синхронизированном потоке имеется набор метастабильных критических состояний, переходящих друг в друга посредством лавин; процесс уменьшения потока  $d$  при плотности  $p=0,5$  происходит по степенному закону  $d=t^{-0,14}$ , достоверность –  $R^2=0,9$ ; процесс уменьшения потока  $d$  при плотности  $p=0,6$  происходит по степенному закону  $d=t^{-0,47}$ , достоверность –  $R^2=0,87$ ; процесс уменьшения потока  $d$  при плотности  $p=0,7$  происходит по степенному закону  $d=t^{-0,92}$ , достоверность –  $R^2=0,87$ ; процесс уменьшения потока  $d$  при плотности  $p=0,8$  происходит по степенному закону  $d=t^{-1,44}$ , достоверность –  $R^2=0,77$ . Получена ступенчатая зависимость параметра порядка  $d$  от управляющего параметра  $p$ , пороговое значение –  $p=0,5$ .

## Литература

1. Долгушин Д.Ю. Многофакторное моделирование автотранспортных потоков на основе клеточных автоматов. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. – Омск: СибАДИ, 2011. – 21 с.
2. Долгушин Д.Ю., Мызникова Т.А. Применение клеточных автоматов к

моделированию автотранспортных потоков. – Омск: СибАДИ, 2012. – 112 с.

3. Лубашевский И.А., Гусейн-Заде Н.Г., Гарнисов К.Г. Макроскопические фазовые состояния автотранспортного потока в туннелях. <https://b-ok.org/book/2980831/71d08c>
4. Подлазов А.В. Теория самоорганизованной критичности – наука о сложности. [Электронный ресурс], 2008. – Режим доступа: <http://www.nonlin.ru/articles/podlazov/soc>
5. Семенов В.В. Математическое моделирование автотранспортных потоков. [http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=ipmp&paperid=817&option\\_lang=rus](http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=ipmp&paperid=817&option_lang=rus)
6. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: учеб. пособие / Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А., Холодов Я.А., Шамрай Н.Б.; Под ред. А.В. Гасникова. — М.: МФТИ, 2012. — 362 с.
7. Кленов С.Л. Стохастические математические модели транспортного потока в рамках теории трех фаз. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Москва – 2019. – 34 с.
8. B.S. Kerner, S.L. Klenov, M. Schreckenberg. Simple cellular automaton model for traffic breakdown, highway capacity, and synchronized flow. // <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1805/1805.05555.pdf>
9. Бак П. Как работает природа. Теория самоорганизованной критичности. Москва. – 2013. – 276 с.
10. Модель движения Biham-leton-Levine. <http://ru.knowledgr.com/18079938/ТранспортнаяМодельBihamMiddletonLevine>

**Бельков Д.В., Зензеров В.И. Самоорганизованная критичность в BML-модели транспортного потока.** Выполнено исследование модели BML (Biham-Middleton-Levine) движения автотранспорта с учетом самоорганизованной критичности. В результате определено, что в синхронизированном потоке имеется набор метастабильных критических состояний, переходящих друг в друга посредством лавин, процесс уменьшения потока при изменении плотности в пределах 0,5 – 0,8 происходит по степенному закону с достоверностью не ниже 0,77, а также получена ступенчатая зависимость параметра порядка  $d$  от управляющего параметра  $p$  при пороговом значении равном 0,5.

**Ключевые слова:** синхронизированный транспортный поток, затор, метастабильные состояния, самоорганизованная критичность.

**Belkov D., Zenzerov V. Self-organized criticality in the BML-model of the transport flow.** Investigates the BML (Biham-Middleton-Levine) model of vehicular traffic, taking into account self-organized criticality. As a result, it was determined that in a synchronized flow there is a set of metastable critical states that pass into each other through avalanches, the process of reducing the flow with a change in density within 0.5 - 0.8 occurs according to a power law with a confidence of at least 0.77, and a step dependence of the order parameter  $d$  on the control parameter  $p$  is obtained with a threshold value of 0.5.

**Keywords:** synchronized transport flow, congestion, metastable states, self-organized criticality.

Статья поступила в редакцию 25.08.2022  
Рекомендуется к публикации профессором Павлышом В. Н.

УДК 004.92, 004.93

## Анализ методов распознавания эмоций по фотоизображениям

А. П. Семёнова, М. А. Белинская, В. Н. Павлыш  
Донецкий национальный технический университет  
[nastena-semenova19@rambler.ru](mailto:nastena-semenova19@rambler.ru)

### Аннотация

*В работе рассмотрен актуальный на сегодняшний день метод обнаружения лица на изображении. Проанализированы различные подходы для классификации эмоций, как классический, предусматривающий использование ключевых точек, так и с применением глубокого обучения. Определены модели категоризации эмоций: дискретная, многомерная и гибридная. Сделан вывод, что для получения более точных результатов необходимо применять комбинированные методы с использованием различных входных данных.*

### Введение

Распознавание эмоций является одной из самых обсуждаемых тем в области машинного обучения. Задача распознавания эмоций является трудно формализуемой, и потому при ее постановке часто возникает ряд проблем, главными из которых являются отсутствие стандарта мимических картин и субъективность мнения эксперта, поскольку человек не может в полной мере воспринимать все микродвижения собеседника. Однако, опираясь на исследования специалистов, можно выделить несколько универсальных эмоций, мимические проявления которых не зависят от расы и культуры человека [1-8].

Распознавание эмоций – это задача, решение которой может служить для совершенно разных целей. Она может применяться, как для маркетинга, систем видео аналитики, для создания мультимедиа приложений и игр, так и для более сложных задач, таких как анализ психического и эмоционального состояния людей, мониторинга учащихся и т.д. [9].

### Поиск лица на изображении

Первым шагом к распознаванию эмоций на лице является обнаружение самого лица на фотоизображении. Рассмотрим наиболее популярный метод обнаружения лиц – метод Виолы-Джонса. Этот метод обеспечивает высокую точность и достаточно быструю скорость нахождения объектов на изображении.

Метод Виолы-Джонса (Viola-Jones object detection) – алгоритм обнаружения объектов на изображении в реальном времени, разработанный в 2001 году П. Виолой и М. Джонсоном [10,11]. Несмотря на то, что главной задачей этого метода является нахождение лиц, его используют и для распознавания других объектов. Существует множество реализаций, в том числе в составе библиотеки компьютерного

зрения OpenCV (например, функция `cvHaarDetectObjects()`).

Метод Виолы-Джонса использует принцип сканирующего окна, который состоит из пяти основных этапов:

1) поступление исходного изображения размерностью  $N \times M$  пикселей на вход, при этом все пиксели имеют значение от 0 до 255 для каждого цветового канала (канал одного цвета для монохромного и трех цветов для цветного изображения);

2) обработка изображения (применение различных фильтров, масштабирование, удаление шумов и т.д.);

3) сканирование изображения при помощи скользящего окна;

4) проход скользящего окна по каждому пикселю изображения;

5) применение классификатора на основе метода бустинга (усиления слабых классификаторов).

Процесс обнаружения лица методом Виолы-Джонса имеет ряд особенностей:

– изображения применяют в интегральном виде для быстроты расчетов;

– проводится анализ признаков Хаара для поиска нужных объектов на изображениях;

– применяется метод усиления слабых классификаторов на определенной части изображения для выбора наиболее подходящих признаков при поиске объекта;

– применяются простые бинарные классификаторы для принятия решения «true» или «false»;

– применяются каскады признаков для быстрого отбрасывания окон без искомого объекта.

Метод позволяет выполнить быстрое вычисление суммарной яркости произвольного прямоугольника с постоянным временем, независимо от размеров этого прямоугольника благодаря обработке изображения в интегральной форме. Представление

изображения происходит в матричном виде (размер матрицы совпадает с размером изображения). В каждом элементе матрицы хранится сумма интенсивностей всех пикселей, которые находятся левее и выше данного элемента.

Применяемые алгоритмом признаки используют суммирование пикселей из прямоугольных областей и содержат более одной прямоугольной области (рис. 1).

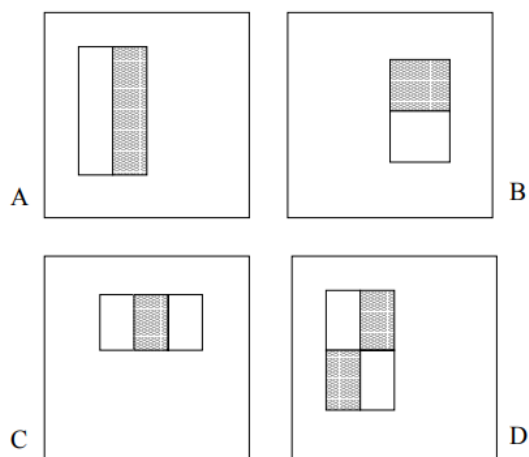


Рисунок 1 – Признаки алгоритма Виоли-Джонса

На рисунке 1 приведены четыре различных варианта признаков. Для вычисления значения каждого признака нужно из суммы пикселей белых прямоугольников вычесть сумму пикселей серых областей.

Прямоугольные признаки примитивнее, чем поворачивающийся фильтр, и результат их поиска грубее. Но их преимущество состоит в том, что благодаря хранению изображения в интегральной форме, проверка прямоугольного признака на конкретной позиции выполняется за константное время.

Каждая прямоугольная область используемых признаков всегда смежна с другой прямоугольной областью, поэтому расчет признака с двумя прямоугольными областями состоит из шести обращений в интегральный массив, для признака с тремя прямоугольными областями – из восьми, а с четырьмя – из девяти.

Преимуществами данного алгоритма являются:

- эффективный набор признаков;
- быстрое вычисление значений признаков;
- масштабирование признаков вместо масштабирования изображения.

К недостаткам алгоритма относятся:

- чувствительность к углу падения света;
- невозможность распознать требуемый

объект при его повороте более чем на 45 градусов;

– значительные временные затраты на обучение классификаторов.

### Категоризация эмоций

Следующим этапом распознавания эмоций является их категоризация. Сегодня существуют три наиболее популярных модели категоризации эмоций: дискретная, гибридная и многомерная [1,5,12].

Дискретная модель основана на классификации эмоций на основе естественного языка. Каждая эмоция связана с семантическим параметром, то есть обладает конкретным значением или набором значений. Теория базовых (универсальных) эмоций является ярким примером данного подхода. Таким образом, например, ностальгия – это сочетание таких базовых эмоций как радость и печаль.

Различные исследователи выделяют разное количество и типы базовых эмоций. П. Экман выделяет 6 первичных эмоций (гнев, страх, отвращение, удивление, печаль и радость), психозволюционная теория Р. Плутчика рассматривает 8 базисных эмоций (одобрение, печаль, ожидание, отвращение, радость, страх, гнев, удивление), а Дж. Грей – 3 основные эмоции. По мнению, Мауэра следует говорить, только о 2 первичных эмоциях: боль и удовольствие.

На рисунке 2 изображена модель эмоций Р. Плутчика.

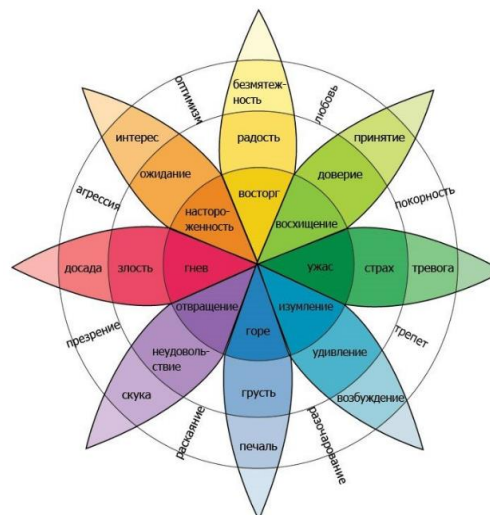


Рисунок 2 – Колесо эмоций Р. Плутчика

Многомерная модель представляет эмоции в координатном многомерном пространстве. Так как пространство является неразрывным и непрерывным, то эмоции различаются по одному или нескольким параметрам (при этом они могут иметь одинаковую основу).





Рисунок 3 – Двумерная модель эмоций Дж. Рассела

Ярким примером описываемого подхода является модель Дж. Рассела (см. рис. 3). В ней водится двумерный базис, в котором каждая эмоция характеризуется знаком (valence) и интенсивностью (arousal). Данная модель в контексте решение задачи классификации является одной из самых востребованных.

Гибридные модели объединяют как дискретные, так и многомерные подходы. Отличным примером, иллюстрирующим данную модель, являются «Песочные часы эмоций», которые были предложены Камбрией, Ливингстоном, Хуссейном. Каждое измерение характеризуется 6 уровнями силы, с которой выражены эмоции. Данные уровни обозначаются набором из 24 эмоций. Поэтому совершенно любая эмоция может рассматриваться, как фиксированное состояние, так и часть пространства, связанная с другими эмоциями нелинейными отношениями.

### Определение ключевых точек

На сегодняшний день, один из популярных способов определения эмоций основан на классификации по ключевым точкам на изображении лица [13]. Существует множество алгоритмов поиска ключевых точек на изображении. Первые методы поиска основаны на подборе параметров деформации для лицевой модели. Наиболее известные классы алгоритмов включают Constrained Local Model (CLM), Active Appearance Model (AAM), Active Shape Model (ASM) [14,15]. С помощью деформируемой модели лица вычисляются координаты каждой ключевой точки. Часто такие алгоритмы используют в качестве основы статистические методы. Они достаточно хороши на наборах данных в

контролируемых условиях (правильное освещение, наклон головы и т.д.), но плохо справляются с обработкой зашумленных изображений. Лучший результат поиска ключевых точек лица на наборах данных с большой вариацией поз и частичным перекрытием показывают регрессионные нейросетевые методы.

Чаще всего на изображении определяют от 5 до 68 точек, которые привязывают к положению бровей, глаз, носа, рта и челюсти. Данная привязка позволяет захватить мимику объекта. На рисунке 4 представлена модель с использованием 68 и 10 ключевых точек.

Полученные координаты точек нормируются и непосредственно передаются в классификатор. В роли классификатора может выступать метод опорных векторов (SVM) или, например, Random Forest.

Для распознавания эмоции необходимо иметь представление о точном положении ключевых точек лица. Для понимания процесса их поиска рассмотрим несколько ключевых понятий.

Двигательная единица (action units) – величина, которая принимает значения из диапазона от 0 до 1, и определяет насколько далеко находится конкретная ключевая точка от линии глаз или нормали к этой прямой. Если значение двигательной единицы принимает значение больше 0, то ее называют активированной.

Нейтральное расстояние – величина, определяющая среднее расстояние от конкретной ключевой точки до нужной прямой при нейтральном выражении лица, т.е. когда коэффициенты проявления каждой конкретной эмоции принимают значения не более 0,26.

Максимальное расстояние – расстояние от прямой до ключевой точки, относящейся к двигательной единице связанной с проявлением той или иной эмоции. Стрелки на рис. 5

показывают направления для изменения положения ключевых точек (в данном примере таких точек 10: 2 для зрачков, по 4 для бровей и губ) для активации двигательных единиц.

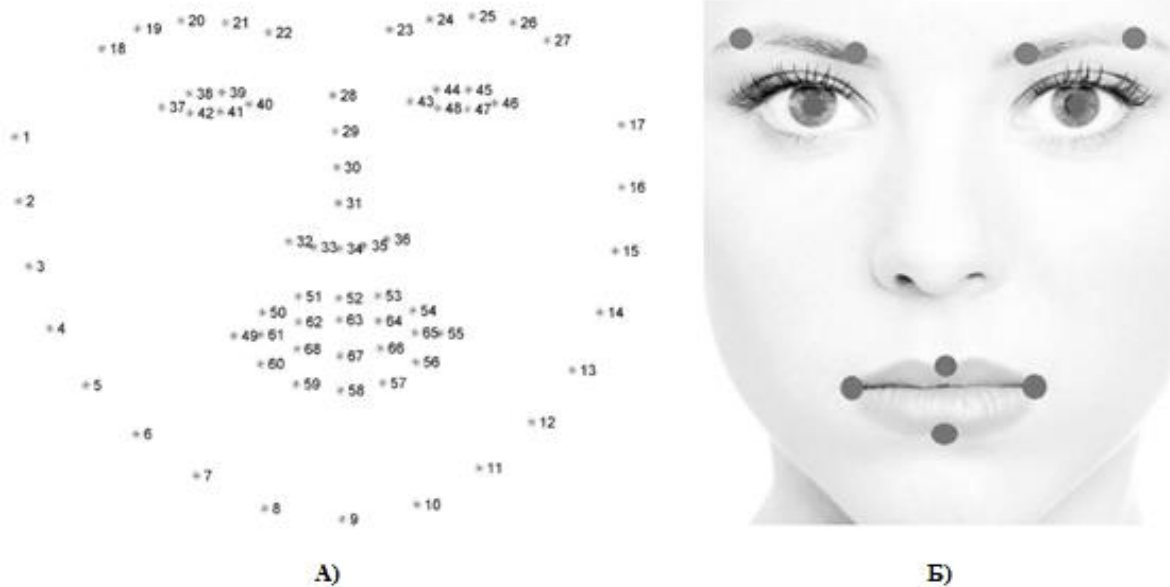


Рисунок 4 – Ключевые точки лица (А) – 68 точек, Б) – 10 точек)

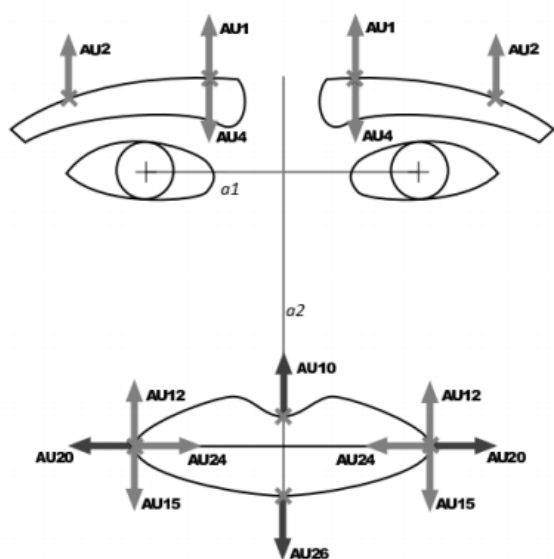


Рисунок 5 – Двигательные единицы

Для каждой точки определяется область интереса на анализируемом фотоизображении. Чтобы уменьшить зону поиска и снизить время на их нахождение, эти области определяют с помощью различных классификаторов для обнаружения зон лица, рта, глаз и т.д.

Для поиска ключевых точек в зоне бровей можно использовать адаптивный контрастный фильтр, задав ему минимальное и

максимальное значения серого цвета, чтобы обнаружить границы бровей и представить их в виде набора соединённых точек или полигона. Для поиска зрачков можно использовать классификатор, позволяющий определить точное положение глаз и зрачков на фотоизображении. Для определения положения остальных четырёх точек нужно, используя классификатор, разбить зону поиска на 4 части, а после применить адаптивный контрастный фильтр для нахождения граничных точек.

Для классификации эмоции по ключевым точкам используется система кодирования лицевых движений (Facial Action Coding System), разработанная П. Экманом и У. Фризенном [16,17].

После определения всех ключевых точек вычисляются значения двигательных единиц. Для этого задаются нейтральное и максимальное расстояния от ключевых точек до прямой, проходящей через координаты зрачков или нормали к этой прямой. Средние значения этих расстояний можно получить с помощью анализа нескольких фотоизображений.

Далее на анализируемом фотоизображении необходимо рассчитать расстояния от ключевых точек до нужных прямых и сравнить с нейтральным и максимальным расстояниями.

Так как, размеры фотоизображений могут отличаться, то за 1 нужно взять расстояние между зрачками. Если полученное расстояние

больше или равно максимальному, то значение двигательной единицы становится равным 1, если оно меньше нейтрального, то – 0, а если находится между нейтральным и максимальным расстоянием, то значение вычисляется с помощью линейной интерполяции.

Для определения конкретных эмоций необходимо сложить полученные значения двигательных единиц, отвечающих за проявление конкретной эмоции и разделить на общее количество взятых единиц. Таким образом, получится число в диапазоне от 0 до 1, показывающее степень выраженности той или иной эмоции.

### **Классификация эмоций с применением глубинного обучения**

При анализе визуальных данных лучшим выбором является использование глубоких сверточных нейронных сетей [18-20]. Мгновенные снимки не достаточно точно отражают текущую эмоцию, поэтому для определения эмоции необходимо использовать последовательность кадров. В качестве нейросетевого классификатора можно использовать сеть для распознавания лиц.

Решение задачи анализа последовательности кадров можно решить двумя способами: использование рекуррентной сети (LSTM) или использование архитектуры 3D-CNN. В первом варианте входные данные необходимо подать на сверточную сеть. Высокоуровневые признаки, полученные от CNN, которая классифицирует каждый отдельный кадр, затем передаются в рекуррентную сеть. В ней происходит обработка временной составляющей. Во втором случае непосредственная подача последовательности кадров с некоторым шагом выполняется прямо на входе сверточной нейронной сети 3D-CNN. Данная сеть использует свертки с тремя степенями свободы, которые преобразует четырехмерный вход в трехмерные карты признаков.

### **Заключение**

В работе рассмотрен основной и актуальный на сегодняшний день метод обнаружения лица на изображении – метод Виолы-Джонса. Данный метод имеет ряд таких достоинств как:

- быстрое вычисление значений признаков;
- эффективный набор признаков;
- масштабирование признаков вместо изображения.

Однако он не универсален и имеет свои требования к исходному изображению.

Проанализированы различные подходы

для классификации эмоций, как классический с использованием ключевых точек, так и с применением глубинного обучения. Наиболее лучшие результаты показывают методы с применением сетей глубинного обучения (CNN). Существуют также иные методы, с использованием аудио (речь) и видео (лицо и мимика) материалов. Для получения более точных результатов необходимо применять комбинированные методы с использованием различных входных данных.

### **Литература**

1. Леонтьев, В. О. Классификация эмоций / В. О. Леонтьев. – Одесса: Инновационно-ипотечный центр, 2002. – 84 с.
2. Ильин, Е. П. Эмоции и чувства / Е. П. Ильин. – СПб.: Питер, 2001. – 752 с.
3. Джеймс, У. Психология / У. Джеймс. – М.: Педагогика, 1991. – 368 с.
4. Ланге, Г. Душевные движения / Г. Ланге. – СПб.: Питер, 1996. – 180 с.
5. Миненко, А. С. Формальная модель эмоций / А. С. Миненко, А. П. Семенова // Проблемы искусственного интеллекта, 2018. – №3(10). – С. 84-93.
6. Миненко, А. С. Моделирование и информационные технологии при распознавании лица человека по его мимическим изображениям // Проблемы искусственного интеллекта, 2016. – № 2(3). – С. 48-54.
7. Семенова, А. П. Математическая модель эмоций // Международная научно-техническая конференция молодых ученых БГТУ им. В.Г. Шухова. Материалы национальной конференции с международным участием. – Белгород, 2019. – С. 4584-4587.
8. Семёнова, А. П. Анализ мимических выражений для задачи распознавания эмоций / А. П. Семёнова, В. Н. Павлыш // Проблемы искусственного интеллекта, 2020. – № 4(19). – С. 69-79.
9. Семенова, А. П. Область применения алгоритма распознавания эмоций в информационных технологиях / А. П. Семенова, А. С. Миненко, Т. В. Ванжа // Цифровой регион: опыт, компетенции, проекты: сборник статей Международной научно-практической конференции (г. Брянск, 30 ноября 2018 г.). – Брянск: Брян. гос. инженерно-технол. ун-т., 2018. – С. 443-446.
10. Yang, Ming-Hsuan. Detecting Faces in Images: a Survey / Ming-Hsuan Yang // IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence – 2002. – № 11. – P. 34–58.
11. Viola, P. Robust real-time face detection / P. Viola. – International Journal of Computer Vision, 2005. –V. 58. – № 2. – P 137–155.

12. Экман, П. Психология эмоций. Я знаю, что ты чувствуешь. / П. Экман – СПб. : Питер, 2010. – 334 с.
13. Семёнова, А. П. Поиск ключевых точек лица для задачи распознавания эмоций / А.П. Семёнова, В.Н. Павлыш // Информатика и кибернетика, 2021. – № 1-2 (23-24). – С. 59-64
14. Wang, N. Facial feature point detection: A comprehensive survey / N. Wang [et al.] // Neuro computing, 2018. – №275. – P. 50-65.
15. Wu, Y. Facial Landmark Detection: A Literature Survey / Y. Wu, Q. Ji // International Journal of Computer Vision, 2018. – №.127. – P. 115-142.
16. Friesen, W. EMFACS-7: Emotional Facial Action Coding System. Unpublished manual / W. Frisen, P. Ekman. – California: University of California, 1983.
17. Ekman P. Facial Action Coding System: A Technique for the Measurement of Facial Movement / P. Ekman, W. Friesen. – Palo Alto: Consulting Psychologists Press, 1978. – 117 p
18. Семёнова, А. П. Анализ методов распознавания выражений лица / А. П. Семёнова, А. С. Миненко // Искусственный интеллект: теоретические аспекты, практическое применение: материалы Донецкого международного научного круглого стола. – Донецк: ГУ ИПИИ, 2020. – С.192-197.
19. Subject independent facial expression recognition with robust face detection using a convolutional neural network [Текст] / M. Masakazu, K. Mori, Y. Mitari, Y. Kaneda // Neural Networks, 2003. – № 5 (16). – P. 555-559.
20. Facial expression recognition via a boosted deep belief network. [Текст] / P. Liu, S. Ha, Z. Meng, Y. Tong // Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), Columbus, OH, USA, 24–27 June 2014. – P. 1805–1812.

**Семёнова А. П., Белинская М. А., Павлыш В. Н. Анализ методов распознавания эмоций по фотоизображениям.** В работе рассмотрен актуальный на сегодняшний день метод обнаружения лица на изображении. Проанализированы различные подходы для классификации эмоций, как классический, предусматривающий использование ключевых точек, так и с применением глубокого обучения. Определены модели категоризации эмоций: дискретная, многомерная и гибридная. Сделан вывод, что для получения более точных результатов необходимо применять комбинированные методы с использованием различных входных данных.

**Ключевые слова:** метод Виолы-Джонса, базовые эмоции, ключевые точки лица, двигательные единицы, глубинное обучение.

**Semenova A.P., Belinskaya M.A., Pavlysh V.N. Analysis of emotion recognition methods based on photo images.** The paper considers the current method of detecting a face in an image. Various approaches for the classification of emotions are analyzed, both classical, involving the use of key points, and with the use of deep learning. Emotion categorization models are defined: discrete, multidimensional and hybrid. It is concluded that in order to obtain more accurate results, it is necessary to apply combined methods using different input data.

**Key words:** Viola-Jones object detection, basic emotions, key points of the face, action units, deep learning.

Статья поступила в редакцию 25.05.2022  
Рекомендуется к публикации профессором Мальчевой Р. В.

# Компьютерные науки

## Теория обобщенных функций и их применение на практике

Ю. Н. Добровольский

Донецкий национальный технический университет, г. Донецк

dyn\_don\_20.14@mail.ru

### Аннотация

*Рассмотрены основные этапы развития теории обобщенных функций. Введено пространство  $D$  – бесконечно дифференцируемых, финитных функций на всей числовой прямой. На пространстве  $D$  определили линейный непрерывный функционал и назвали его обобщенной функцией. Ввели понятие слабой сходимости последовательностей функционалов. Обобщенные функции разделили на два класса: регулярные и сингулярные. Изучили основные свойства обобщенных функций. Привели обобщенное решение простейших дифференциальных уравнений.*

### Введение

Теория обобщенных функций – область функционального анализа, которая возникла и развивалась в связи с потребностями современной математической физики и позволила правильно поставить и решить ряд теоретических и прикладных задач. Если возникает необходимость серьезно заниматься исследованием математических моделей физических явлений, то обязательно потребуется изучить основной язык современной математической физики – теорию обобщенных функций.

Необходимость во введении понятий, называемых обобщенными функциями, возникла при попытке дать строгое описание сосредоточенных объектов, которые являются удобными физическими идеализациями. С другой стороны, обобщенные функции позволяют также с единой точки зрения рассматривать производные гладких и разрывных функций, преобразование Фурье убывающих и растущих функций и др., то есть в них имеется и чисто математическая потребность.

Дифференциальное исчисление и теория дифференциальных уравнений базируются на понятии производной, которая первоначально вводится в классическом смысле. Например, любая монотонно неубывающая функция имеет не более чем счетное число точек разрыва первого рода, в которых функция заведомо не дифференцируема в классическом смысле.

В физике и разделах математики: в дифференциальных уравнениях и теории вероятностей возникает потребность расширить понятие производной, вводя обобщенную производную, с помощью которой функция, имеющая разрывы первого рода, становится дифференцируемой в точках разрыва. Как результат дифференцирования в обобщенном

смысле разрывных функций возникают обобщенные функции.

Важный вклад в формирование нового математического подхода понятию функции в физике принадлежит Н. М. Гюнтеру, который предлагал рассматривать вместо точечных характеристик типа плотности соответствующие функции множеств еще в 1916 году и пытался переосмыслить на этой основе понятие решения уравнения математической физики.

**Актуальность данной темы** заключается в том, что обобщенные функции необходимо рассматривать и изучать для решения ряда задач физики и математики. Обобщенные функции позволяют правильно поставить и разрешить ряд классических проблем прикладного значения.

**Тема исследования:** Обобщенные функции и действия над ними.

**Объект исследования:** обобщенные функции.

**Предмет исследования:** развитие теории обобщенных функций.

**Цель исследования:** дать теоретическое обоснование понятия «обобщенная функция» и рассмотреть основные действия, применяемые к ним.

### Задачи исследования:

1. Рассмотреть обобщенные функции как линейные функционалы.

2. Изучить действия над обобщенными функциями.

3. Рассмотреть пространство обобщенных функций.

4. Привести примеры обобщенных функций.

Для решения поставленных задач использовался комплекс методов исследования:

- обобщение изученных ранее данных;
- анализ научно-методической литературы;
- систематизация информации.

**Научная новизна:** Существуют многие физические модели, которые в терминах обычных функций не могут быть описаны.

Например, задача Коши для уравнения теплопроводности. Мы не можем их описать при помощи обычных функций. Для этого и необходимы обобщенные функции.

**Практическое значение:** материал, рассмотренный в данной статье, может быть использован для решения задач современной математической физики.

**Структура исследования:** работа состоит из введения, пяти разделов, заключения, списка использованной литературы.

## 1. История возникновения теории обобщенных функций

Функция в своём развитии прошла следующие этапы:

1. Установление отдельных зависимостей между величинами (6-5 вв. до н.э. - 13в.);

2. Выделение идеи функциональной зависимости, а именно осознание понятий «зависимая» и «независимая» переменная величина и её выражение в механической и геометрических формах (14 -16 вв.);

3. Доминирование идеи задания функции аналитической формулой и её логический анализ (конец 16 – 18 вв.);

4. Современный этап становления понятия функции (19 -21вв.): его обобщение, расширение и исследование.

Современное определение функции можно применять не только к величинам и числам, но и к другим математическим объектам, например, геометрическим фигурам.

Однако математический анализ XIX века ограничивался исследованием только числовых функций, то есть таких, область определения и множество значений которых - числовые множества. Таким образом, математический анализ XIX века продолжал основываться на определении Дирихле.

Но уже в начале XX века возникла необходимость дальнейшего расширения понятия функции, вызванная потребностями физики. Особенно острой она стала после издания в 1930 г. монографии «*Основы квантовой механики*», которую написал английский физик **Поль Адриен Морис Дирак** (1902–1984).

П. Дирак ввёл понятие так называемой «*дельта-функции*», которая выходила далеко за пределы классического определения функции.

По определению П. Дирака, дельта-функция – это функция  $y = \delta(x)$ , равная нулю при всех  $x$ , кроме  $x = 0$ , где дельта-функция превращается в бесконечность, причём

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

В связи с этим в 30–40 гг. XX в. советский математик **Николай Максимович Гюнтер**

(1871–1941) и другие учёные издали труды, в которых рассматривали не «*функции точки*», а «*функции области*», что лучше соответствовало физической сущности квантово-механических явлений.

Дальнейшие научные исследования привели к понятию «*обобщённой функции*», которое охватывает и *дельта-функцию*. Основной вклад в разработку теории обобщённых функций внесли французский математик **Лоран Шварц** (1915–2002) и выдающийся советский математик **Сергей Львович Соболев** (1908–1989).

Свою теорию обобщённых функций С.Л. Соболев предложил в 1935 г. Через 10 лет к аналогичной идее независимо пришёл и Л. Шварц, который связал вместе все предыдущие подходы и предложил удобный формализм, основанный на теории топологических векторных пространств.

Л.Шварц построил теорию преобразований Фурье обобщённых функций, которой у С.Л. Соболева не было. Однако считается, что именно С.Л. Соболев является первооткрывателем обобщённых функций.

Следует отметить, что важный вклад в развитие теории обобщённых функций внесли советские математики **Израиль Моисеевич Гельфанд** (1913–2009) и **Георгий Евгеньевич Шилов** (в начале научной карьеры известный как **Юрий Боссе**; 1917–1975) и другие.

Итак, понятие функции продолжает развиваться и расширяться в соответствии с потребностями развития математической науки и её практических применений.

## 2. Математические основы теории обобщенных функций

2.1. Понятие обобщенной функции. Пространство обобщенных функций.

Рассмотрим множество всевозможных функций, определенных на всей числовой прямой  $R$  и обладающие следующими двумя свойствами:

1) Каждая  $\varphi(x) \in C^{\infty}(R)$  - к классу

бесконечно дифференцируемых на всей прямой, т.е. имеет производные всех порядков во всех точках.

2) Каждая  $\varphi(x)$  – финитная, т.е. для каждой функции существует интервал  $(-a;a)$  вне которого функция равна нулю:  $\varphi(x)=0$  вне  $(-a;a)$ .

Обозначим  $X_{\varphi} = \{x : \varphi(x) \neq 0\}$ ,  $\overline{X_{\varphi}}$  -

замыкание  $X_{\varphi}$ . Замыкание – это объединение множества  $X_{\varphi}$  и всех его предельных точек.

Множество  $\overline{X_{\varphi}}$  называется носителем функции

$\varphi(x)$ . Обозначение  $\overline{X\varphi} = \text{Supp}\varphi(x)$  (от французского Support).

Это множество всех бесконечно дифференцируемых финитных функций определенных на всей числовой прямой назовем множеством основных функций. Обозначим D.

Пример.

$$w_a(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}, & \text{если } |x| < a, a > 0. \\ 0, & \text{если } |x| \geq a \end{cases}$$

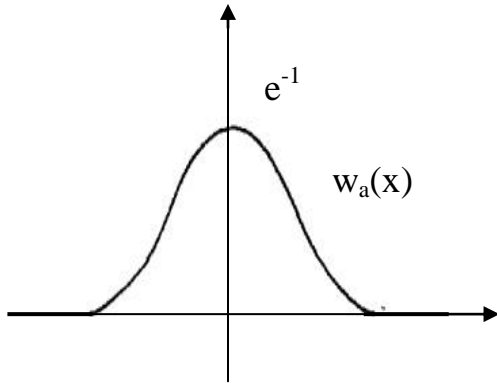


Рисунок 1 - График функции  $W_a(x)$

Совершенно ясно, по виду этой функции, что для  $|x| < a$  и для  $|x| > a$  она бесконечно дифференцируема. Не трудно показать, что в точках  $x = \pm a$  производная существует и равна нулю.  $w_a^{(n)}(\pm a) = 0, \forall n = 1, 2, \dots$

Введем для множества функций D понятие сходимости последовательности основных функций.

**Определение 1.** Будем говорить, что последовательность  $\{\varphi_n(x)\}$  основных функций сходится к  $\varphi(x) \in D$ , если выполнены два условия:

1)  $\exists (-a, a); \forall n: \text{Supp}\varphi_n(x) \in (-a, a)$ . Другими словами: существует общий интервал такой, что носители всех функций лежат на этом интервале.

2)  $\forall k=0, 1, 2, \dots$  последовательность  $\{\varphi_n^{(k)}(x)\} \rightarrow \varphi^{(k)}(x)$  - сходится равномерно на R. Это очень сильное условие. Отметим, что равномерная сходимость на R эквивалентна равномерной сходимости на  $(-a; a)$ .  $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  в пространстве D - это необычная сходимость, а сходимость, как мы ее определили. Множество основных функций D с введенным понятием сходимости называется пространством основных функций.

**Пример.**  $\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \omega_a(x)$ . Докажем, что  $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x) = 0$ . Надо доказать, что

$$\forall k: \left\{ \varphi_n^{(k)}(x) \right\} = \left\{ \frac{1}{n} \omega_a^{(k)}(x) \right\} \rightarrow 0 \text{ на } R$$

или что тоже самое на  $(-a; a)$ .  $\text{Supp}w_a(x) = [-a; a]$ . Воспользуемся равномерной сходимостью связанной с supremumом.

Рассмотрим

$$\text{Sup}_{[-a; a]} \left| \varphi_n^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x) \right| = \text{Sup}_{[-a; a]} \left| \frac{1}{n} \omega_a^{(k)}(x) \right| =$$

$$\frac{1}{n} \text{Sup}_{[-a; a]} \left| \omega_a^{(k)}(x) \right| \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Sup}_{[-a; a]} \left| \varphi_n^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x) \right| = 0, \text{ а это и}$$

означает, что  $\left\{ \varphi_n^{(k)}(x) \right\} \rightarrow \varphi^{(k)}(x) = 0$  на  $[-a; a]$ , т.е.  $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x) = 0$  при  $n \rightarrow \infty$  в пространстве D.

**Определение 2.** Будем говорить, что на пространстве D задан функционал, если указано правило, по которому каждой  $\varphi(x)$  ставится в соответствие  $u(\varphi)$  - число ( $\forall \varphi(x) \rightarrow u(\varphi)$ ).

**Определение 3.** Функционал  $u(\varphi)$  называется линейным, если для любых  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  из D и для любых чисел  $\alpha$  и  $\beta$  ( $\forall \varphi_1(x), \varphi_2(x) \in D$  и  $\forall \alpha, \beta \in R$ ) выполняется равенство:  $u(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha u(\varphi_1) + \beta u(\varphi_2)$ .

**Пример.** Пусть  $f(x)$  определена на всей R и интегрируема на любом сегменте - такая функция называется локально интегрируемой. Каждой  $\varphi(x) \in D$  поставим в соответствие число

$$u(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx. \text{ Интеграл в}$$

этом определении на самом деле собственный. Докажем, что этот функционал линейный:

$$u(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_1(x)dx +$$

$$+ \beta \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_2(x)dx = \alpha u(\varphi_1) + \beta u(\varphi_2)$$

**Пример** нелинейного функционала: множество функций  $\varphi(x)$  задано на  $[a, b]$ ,  $\varphi'(x)$  - непрерывна. Класс таких функций обозначим  $C^1[a, b]$ :  $\varphi(x) \in C^1[a, b]$ . Каждой функции  $\varphi(x)$  поставим в соответствие

$$\ell(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + \varphi'^2(x)} dx, \text{ это длина}$$

кривой  $y=f(x)$ , где  $x \in [a, b]$ .

**Определение 4.** Функционал  $u(\varphi)$  определенный на D называется непрерывным, если  $\forall \{\varphi_n(x)\} \rightarrow \varphi(x)$  в D:  $\{u(\varphi_n)\} \rightarrow u(\varphi)$ .



Существует общий интервал такой, что носители всех функций лежат на этом интервале.

**Замечание.** Применяя соответствующие теоремы предельного перехода под знаком интеграла, можно показать, что функционал

$$u(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx \quad (1), \text{ является}$$

непрерывным.

Введем обозначение:  $\hat{f}$  - функционал, порожденный локально интегрируемой функцией  $f(x)$ , а правую часть равенства (1)

будем обозначать,  $(\hat{f}, \varphi)$ , то есть

$$(\hat{f}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx \quad (2)$$

В дальнейшем значения любого функционала  $\hat{f}$  на функции  $\varphi(x) \in D$  будем обозначать  $(\hat{f}, \varphi)$ .

**Определение 5.** Любой линейный непрерывный функционал, определенный на пространстве  $D$  основных функций назовем обобщенной функцией.

**Определение 6.** Будем говорить, что последовательность  $\{f_n\}$  обобщенных функций сходится к обобщенной функции  $f$ , если  $\forall \varphi(x) \in D: \{(f_n, \varphi)\} \rightarrow (f, \varphi)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Множество всех обобщенных функций с введенным понятием сходимости называется пространством обобщенных функций и обозначается  $D'$ . Записывать будем так:  $f_n \rightarrow f$  при  $n \rightarrow \infty$  в пространстве  $D'$ .

Таким образом пространство  $D$  - это пространство аргументов обобщенных функций и есть пространство обобщенных функций  $D'$ .

Сделаем это пространство линейным: введем операции сложения и умножения элемента пространства на число.

Отметим, что пространство  $D$  основных функций является линейным пространством с обычными операциями сложения двух функций и умножения функции на число. Введем операции сложения и умножения на число в пространстве  $D'$ .

Пусть  $f$  и  $g$  - это обобщенные функции из  $D'$ . Суммой  $f+g$  назовем функционал, определенный равенством

$$\forall \varphi(x) \in D: (f+g, \varphi) = (f, \varphi) + (g, \varphi).$$

Произведением обобщенной функции  $f$  на число  $\alpha$  ( $\alpha f$ ) назовем функционал, действующий по правилу:  $\forall \varphi(x) \in D: (\alpha f, \varphi) = \alpha(f, \varphi)$ .

Надо еще доказать, что введенные таким образом, сумма и произведение обобщенной функции на число являются линейными и

непрерывными функционалами, то есть доказать, что  $f+g$  и  $\alpha f$  являются линейными непрерывными функционалами, то есть обобщенными функциями. Надо еще проверить, что эти действия удовлетворяют аксиомам линейного пространства, что очевидно.

**Задание.** Проверить выполнение аксиом линейного пространства для введенных действий сложения и умножения на число обобщенных функций. Нулевой элемент в пространстве  $D'$  - каждой функции  $\varphi$  ставится в соответствие число 0.

### 3. Регулярные и сингулярные обобщенные функции.

Пусть  $f(x)$  - локально интегрируема функция.

Она порождает функционал  $\hat{f}$ , который действует по правилу:

$$\forall \varphi(x) : (\hat{f}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx.$$

Такие обобщенные функции называются регулярными. Наряду с регулярными, существуют сингулярные обобщенные функции, то есть обобщенные функции не являющиеся регулярными.

Классическим примером сингулярной обобщенной функции является  $\delta$  - функция. Она определяется:  $\forall \varphi(x) \in D: (\delta, \varphi) = \varphi(0)$ .

**Теорема 1.**  $\delta$  - функция является линейным непрерывным функционалом, то есть обобщенной функцией.

Докажем линейность. Рассмотрим действие:

$$(\delta, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha\varphi_1(0) + \beta\varphi_2(0) = \alpha\delta(\varphi_1) + \beta\delta(\varphi_2). \text{ Это значит, что } \delta - \text{ функция линейный функционал.}$$

Докажем непрерывность этого функционала. Надо доказать, что:  $\forall \{\varphi_n(x)\} \rightarrow \varphi$  в пространстве  $D: (\delta, \varphi_n) \rightarrow (\delta, \varphi) = \varphi(0)$  (1).

Так как  $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$  в  $D$ , то  $\varphi_n(x)$  сходится к  $\varphi(x)$  в каждой точке  $x$ , в том числе и в точке  $x=0$ , то есть  $\varphi_n(0) \rightarrow \varphi(0)$ , при  $n \rightarrow \infty$  (2). Так как  $(\delta, \varphi_n) = \varphi_n(0)$ , то из (2) следует  $(\delta, \varphi_n) \rightarrow (\delta, \varphi)$ , что и доказывает непрерывность  $\delta$  - функции.

**Теорема 2.**  $\delta$  - функция является сингулярной обобщенной функцией.

Докажем методом от противного. Предположим, что  $\delta$  - функция - регулярная обобщенная функция, то есть существует локально интегрируема  $f(x)$ , такая, что

$$\forall \varphi(x) \in D: (\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx.$$

Возьмем в качестве  $\varphi(x) = \omega_a(x)$ , тогда

$$(\delta, \omega_a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\omega_a(x)dx = \int_{-a}^{+a} f(x)\omega_a(x)dx.$$

С другой стороны, по определению  $\delta$  – функции:

$$(\delta, \omega_a) = \omega_a(0) = \frac{1}{e}, \text{ следовательно}$$

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\omega_a(x)dx = \frac{1}{e}. \quad (3).$$

Перейдем к пределу при  $a \rightarrow +0$ , тогда левая часть (3) стремится к нулю, но это противоречит тому, что правая часть равна  $\frac{1}{e}$ .

Полученное противоречие доказывает, что наше предположение неверно, и, значит,  $\delta$  – функция сингулярная обобщенная функция.

**Теорема 3.**  $\delta$  – функцию можно представить как предел последовательности регулярных обобщенных функций. Оказывается, что таких последовательностей бесконечно много, достаточно указать одну.

Возьмем:  $\forall a > 0$ , введем функцию

$$\delta_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & \text{если } |x| \leq \frac{a}{2} \\ 0, & \text{если } |x| > \frac{a}{2} \end{cases}$$

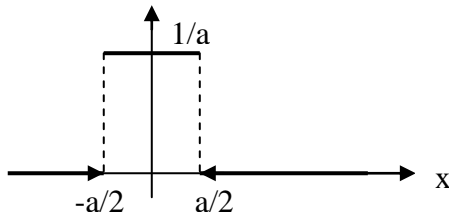


Рисунок 2 - График функции  $\delta_a(x)$

Каждая функция  $\delta_a(x)$  порождает регулярную

обобщенную функцию  $\hat{\delta}_a$ , которая действует следующим образом:

$$\forall \varphi(x) \in D: (\hat{\delta}_a, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x)\varphi(x)dx =$$

$$= \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \varphi(x)dx$$

Докажем, что  $\hat{\delta}_a \xrightarrow{\text{сходится}} \delta$  – функции при  $a \rightarrow +0$  в пространстве  $D'$ . Покажем, что:

$$\forall \varphi(x) \in D: (\hat{\delta}_a, \varphi) \rightarrow (\delta, \varphi) = \varphi(0), \text{ при}$$

$$a \rightarrow +0 \text{ или что тоже самое } (\hat{\delta}_a, \varphi) - \varphi(0) \rightarrow 0$$

при  $a \rightarrow +0$  (4).

По определению обычного предела, надо доказать:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists a_0 > 0: |(\hat{\delta}_a, \varphi) - \varphi(0)| < \varepsilon \quad (5), \text{ при}$$

$$0 < a < a_0.$$

Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$ . Так как  $\varphi(x)$  непрерывна в точке  $x=0$ , то  $\exists a_0 > 0: |\varphi(x) - \varphi(0)| < \varepsilon$ , при  $|x| < a_0$ . Используя это неравенство, получаем:

$$|(\hat{\delta}_a, \varphi) - \varphi(0)| = \left| \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \varphi(x)dx - \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \varphi(0)dx \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} (\varphi(x) - \varphi(0))dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} |\varphi(x) - \varphi(0)| dx \right| < \frac{1}{a} \varepsilon \int_{-a/2}^{a/2} dx = \varepsilon, \text{ при}$$

условии:  $0 < a < a_0$ , т.е. выполнено неравенство (5) и тем самым теорема доказана.

**Вывод:** Разобрались с классической обобщенной функцией, которая называется  $\delta$  – функция. Во первых, что это действительно обобщенная функция – линейный непрерывный функционал. Во вторых – это сингулярная обобщенная функция, в третьих, что ее можно представить как предел обычных регулярных обобщенных функций. Возникает вопрос: почему эти функционалы линейные и непрерывные называются обобщенными функциями, потому что в определенном смысле все обычные функции, по крайней мере все локально интегрируемые функции, они порождают обобщенные функции, которые мы назвали регулярные, но все множество обобщенных функций значительно шире, то оказывается, что не только  $\delta$  – функцию, а любую сингулярную обобщенную функцию можно представить как предел регулярных обобщенных функций, что доказывается в теории обобщенных функций. Значит регулярно обобщенные функции, с одной стороны, порождаемые обычными функциями, а не регулярные сингулярные получены как пределы этих регулярных обобщенных функций, тем самым у истоков стоят обычные функции.

**Подведение итогов:**

1. Ввели пространство основных функций  $D$  – это множество всех бесконечно дифференцируемых функций на всей числовой прямой.
2. Каждая функция финитная, для каждой функции есть интервал, вне которого она равна нулю.
3. На этом пространстве основных функций мы определили функционалы и более того мы ввели понятия линейного и непрерывного функционала. И любой линейный непрерывный функционал, определенный на этом пространстве  $D$  мы назвали обобщенной функцией.

Мы ввели понятие сходимости последовательностей функционалов. Для последовательности обобщенных функций и

вообще функционалов сходимость называется слабая сходимость.

Выяснили, что все обобщенные функции делятся на два класса: регулярные и сингулярные. Что такое регулярная обобщенная функция? Пусть есть  $f(x)$  определенная на  $\mathbb{R}$  и интегрируемая на любом сегменте, такую функцию мы назвали локально интегрируемой.

Каждая такая функция порождает функционал  $\hat{f}$ , определенный на пространстве

$$D: \forall \varphi(x) \in D: (\hat{f}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx, \text{ все}$$

такие обобщенные функции  $\hat{f}$ , порожденные обычными локально интегрируемыми функциями, мы называем регулярными обобщенными функциями, а все обобщенные функции, которые не являются регулярными, мы назвали сингулярными.

Рассмотрели классический пример обобщенных функций – это  $\delta$  – функция.

$(\delta, \varphi) = \varphi(0)$ . Из этого определения следует, что  $\delta$  – функция функционал, но будет он линейным и непрерывным, доказали,  $\delta$  – функция сингулярная.

**Замечание** к теореме 3. Положим  $a = \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots \Rightarrow a \rightarrow +0$  при  $n \rightarrow +\infty$ . Из теоремы 3 следует  $\hat{\delta}_{1/n} \xrightarrow{\text{сходится}} \delta$  – функции, при  $n \rightarrow \infty$  в  $D'$ .

#### 4. Действия над обобщенными функциями. Локальные свойства обобщенных функций.

**Определение 1.** Будем говорить, что обобщенная функция  $f=0$  на интервале  $I$ , если для  $\forall \varphi(x) \in D$ , носитель которой  $\text{Supp}\varphi(x) \subset I$ :  $(f, \varphi) = 0$ . Иногда это записывают так:  $f(x) = 0$  при  $x \in I$ .

**Определение 2.** Обобщенные функции  $f$  и  $g$  называются равными (или равны) на интервале  $I$ , если  $f-g=0$  на интервале  $I$ .

Объединение всех интервалов на которой обобщенная функция  $f=0$ , называется нулевым множеством этой обобщенной функции, обозначение  $O_f$ .

Дополнение множества  $O_f$  до всей прямой, т.е. разность:  $\mathbb{R} - O_f$  называется носителем обобщенной функции  $f$  ( $\mathbb{R} - O_f = \text{Supp}f$ ). Если носитель ограниченное множество, то такая обобщенная функция называется финитной.

**Пример.** Рассмотрим  $\delta$  – функцию. Для  $\forall I$ , не содержащего точку  $x=0$ ,  $\delta(x) = 0$ .

**Доказательство.** Возьмем  $\forall \varphi(x)$ , носитель которой  $\text{Supp}\varphi(x) \in I$ . Отсюда следует  $\varphi(0) = 0$  и значит  $(\delta, \varphi) = \varphi(0) = 0$ . Нулевое множество для  $\delta$  –

функции:  $O_\delta = (x < 0) \cup (x > 0)$ . Значит, носителем  $\delta$  – функции является единственная точка  $x=0$ .  $\text{Supp}\delta = (x=0)$ . Это так называемые локальные свойства  $\delta$  – функции.

#### 4.1. Действия над обобщенными функциями.

1. Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию.

Пусть  $f(x)$  – локально интегрируемая функция, она порождает регулярную обобщенную

функцию  $\hat{f}$  и пусть  $a(x)$  – бесконечно дифференцируемая функция на всей прямой, т.е.  $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Рассмотрим регулярную

обобщенную функцию  $\hat{af}$ .  $\forall \varphi(x) \in D$ :

$$\begin{aligned} (\hat{af}, \varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (a(x)f(x))\varphi(x)dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)a(x)\varphi(x)dx = (\hat{f}, a\varphi) \end{aligned}$$

Итак, для  $\forall$  регулярной обобщенной функции  $\hat{f}$  и для  $\forall a(x) \in C^\infty\mathbb{R}$ , справедливо равенство:

$(\hat{af}, \varphi) = (\hat{f}, a\varphi)$  (1). Равенство (1) получено для регулярных обобщенных функций.

**Замечание 1.** Для сингулярных обобщенных функций равенство (1) принимается в качестве определения.

**Определение 3.** Произведением обобщенной функции  $f$  на  $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$  называется функционал, действующий по

правилу:  $\forall \varphi(x) \in D: (\hat{af}, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{f}, a\varphi)$ .

**Замечание 2.** Отметим, что для регулярных обобщенных функций это равенство доказано, а для сингулярных обобщенных функций принимается в качестве определения.

**Пример.**

$(a(x)\delta(x), \varphi(x)) = (\delta(x), a(x)\varphi(x)) = a(0)\varphi(0) = a(0)(\delta(x), \varphi(x))$ . Отсюда следует, что  $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$

#### 4.2. Линейная замена переменной в обобщенных функциях.

Пусть  $f(x)$  – локально интегрируемая функция и пусть  $a$  и  $b$  – числа, причем  $a \neq 0$ , тогда  $f(ax+b)$  – локально интегрируемая функция.

Обозначим через  $\hat{f}(ax+b)$  – регулярную обобщенную функцию, порождаемой функцией  $f(ax+b)$ .

$$\begin{aligned} \forall \phi(x) \in D: (\hat{f}(ax+b), \phi(x)) &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax+b)\phi(x)dx \end{aligned} \quad (2).$$

Замена переменной  $ax+b=t$ ,

$$x = \frac{t-b}{a}, dx = \frac{dt}{a}.$$

Надо рассмотреть три случая  $a>0$ ,  $a<0$ ,  $a=0$ .

Объединив эти три случая, получим:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax+b)\phi(x)dx &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt = \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi\left(\frac{x-b}{a}\right)dx = \\ &= \frac{1}{|a|} \left( \hat{f}(x), \phi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right) \end{aligned} \quad (3).$$

Из (2) и (3) следует, что

$$(f(ax+b), \phi(x)) = \frac{1}{|a|} \left( \hat{f}(x), \phi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right)$$

Полученное равенство называется формула линейной замены переменной в обобщенных функциях. Она доказана для регулярных обобщенных функций. Для сингулярных обобщенных функций возьмем в качестве определения замены переменной.

**Определение 4.** Обобщенная функция  $f(ax+b)$  – это функционал, действующий по правилу:

$$\begin{aligned} \forall \phi(x) \in D: (f(ax+b), \phi(x)) &= \\ &= \frac{1}{|a|} \left( f(x), \phi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right) \end{aligned}$$

Для регулярных обобщенных функций это доказано. Для сингулярных обобщенных функций принимается в качестве определения.

Рассмотрим два частных случая:

1)  $a=1$ ,  $b=-c$ , тогда  $(f(x-c), \phi(x)) = (f(x), \phi(x+c))$  это формула сдвига аргумента обобщенной функции.

2)  $b=0$ ,  $a \neq 0$ , тогда

$$(f(ax), \phi(x)) = \frac{1}{|a|} \left( f(x), \phi\left(\frac{x}{a}\right) \right) - \text{это формула}$$

растяжения аргумента обобщенной функции.

Рассмотрим, как это выглядит для  $\delta$  – функции. Возьмем  $\delta(x)$ :

$(\delta(x-c), \phi(x)) = (\delta(x), \phi(x+c)) = \phi(x+c)|_{x=0} = \phi(c)$ . И так  $(\delta(x-c), \phi(x)) = \phi(c)$ . Эти формулы встречаются в курсах теоретической физики и в курсах уравнений математической физики.

$$(\delta(ax), \phi(x)) = \frac{1}{|a|} \left( \delta(x), \phi\left(\frac{x}{a}\right) \right) = \frac{1}{|a|} \phi(0)$$

$$(\delta(ax), \phi(x)) = \frac{1}{|a|} (\delta(x), \phi(x)).$$

### Вывод:

Растяжение аргумента у  $\delta$  – функции, а именно, если в место  $x$  взять  $ax$ , то

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x).$$

Возьмем  $a=-1$ , тогда  $\delta(-x) = \delta(x)$  – это четность.  $\delta$  – функции, нельзя понимать в обычном смысле.

### 5. Дифференцирование обобщенных функций.

Пусть  $f(x) \in C^\infty(R)$  и является локально интегрируемой. Производные будем обозначать двойкой:  $f'(x) = Df(x)$ , где  $D$  – оператор дифференцирования, тогда

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' = D(Df) = \\ &= D^2 f, \dots, f^{(n)}(x) = D^n f(x) \end{aligned}$$

Обозначим через  $\hat{D} f$  регулярную обобщенную функцию, порождаемую  $f'(x) = Df(x)$ .

Для

$$\forall \phi(x) \in D: (\hat{D} f, \phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} Df(x)\phi(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\phi(x)dx =$$

$$= f(x)\phi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi'(x)dx =$$

$$= 0 - (\hat{f}, \phi') = -(\hat{f}, D\phi)$$

И так, для регулярной обобщенной функции, бесконечно дифференцируемой:

$$(\hat{D} f, \phi) = -(\hat{f}, D\phi) \quad (4).$$

Аналогично, применяя интегрирование по частям  $n$  раз, приходим к равенству:

$$(\hat{D}^n f, \phi) = (-1)^n (\hat{f}, D^n \phi) \quad (5)$$

$\forall n = 1, 2, \dots$

И так, равенства (4) и (5) получены для бесконечно дифференцируемой, локально интегрируемой функции  $f(x)$ , т.е. они получены для регулярных обобщенных функций.

**Замечание.** Для сингулярных обобщенных функций примем формулы (4) и (5) в качестве определения производных обобщенной функции.

**Определение 1.** Обобщенная функция  $D^n f$  – это функционал, действующий по правилу:  $\forall \phi(x) \in D: (D^n f, \phi) = (-1)^n (f, D^n \phi)$   $n=1, 2, \dots$ . Из этой формулы следует, что любая обобщенная функция имеет производную любого порядка.

**Пример 1.** Введем функцию Хевисайда:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Она применяется в различных разделах теоретической физике, особенно в радиофизике. Она порождает регулярную обобщенную

функцию  $\hat{\Theta}$ .

$$\begin{aligned} \forall \varphi(x) \in D: (\hat{\Theta}, \varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(x)\varphi(x)dx = \\ &= \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx. \end{aligned}$$

По формуле (4):

$$\begin{aligned} (D\hat{\Theta}, \varphi) &= -(\hat{\Theta}, D\varphi) = -(\hat{\Theta}, \varphi') = \\ &= -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = -\varphi(x)|_0^{+\infty} = 0 + \varphi(0) = \\ &= (\delta(x), \varphi(x)) \\ (D\hat{\Theta}, \varphi) &= (\delta(x), \varphi(x)). \text{ Отсюда следует} \\ D\hat{\Theta}(x) &= \delta(x). \end{aligned}$$

**Пример 2.** Вычислить производную  $\delta$  – функции по формуле (4).

$$\begin{aligned} (D\delta(x), \varphi(x)) &= -(\delta(x), D\varphi(x)) = \\ &= -(\delta(x), \varphi'(x)) = -\varphi'(0). \end{aligned}$$

Аналогично:

$$\forall n: (D^n \delta(x), \varphi(x)) = (-1)^n \varphi^{(n)}(0).$$

**Пример 3.** Рассмотрим обобщенные функции, порожденные  $\sin x$  и  $\cos x$ .

$\sin x$  порождает регулярную обобщенную

функцию  $\hat{\sin} x$ , а  $\cos x$  порождает  $\hat{\cos} x$ .

$$(\hat{\sin} x, \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \varphi(x) dx.$$

По формуле (4):

$$\begin{aligned} (D\hat{\sin} x, \varphi(x)) &= -(\hat{\sin} x, \varphi'(x)) = \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \varphi'(x) dx = \\ &= -\sin x \varphi(x)|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cos x dx = \\ &= 0 + (\hat{\cos} x, \varphi(x)) \end{aligned}$$

Это означает, что  $D\hat{\sin} x = \hat{\cos} x$ . Аналогично можно показать, что

$$D\hat{\cos} x = -\hat{\sin} x.$$

### Заключение

Новые задачи физики и математики, появившиеся в XX столетии, привели к

появлению нового понятия функции – обобщенной функции или распределения. Обычное понятие функции, которое ставит в соответствие каждому значению (из некоторой области определения этой функции) соответствующее ему значение, оказалось абсолютно недостаточным. Потребность в подобном обобщении возникает во многих физических и математических задачах. Обобщенные функции дают возможность выразить в математически корректной форме такие идеализированные понятия, как плотность материальной точки, точечного заряда, точечного диполя, (пространственную) плотность простого или двойного слоя, интенсивность мгновенного источника и т.д. Теория обобщенных функций – оформившаяся в последние годы область функционального анализа; она возникла в связи с потребностями математической физики и позволила правильно поставить и разрешить ряд классических проблем прикладного значения. В понятии обобщенной функции находит отражение тот факт, что реально нельзя измерить значение физической величины в точке, а можно измерять лишь ее средние значения в малых окрестностях данной точки. Поэтому, техника обобщенных функций служит удобным и адекватным средством для описания многих распределений различных физических величин.

Строгая математическая теория обобщенных функций была построена С.Л. Соболевым, Л. Шварцем и другими математиками. С.Л. Соболев впервые разработал теорию обобщенных функций в связи с исследованием гиперболических уравнений. Л. Шварц, развивая теорию обобщенных функций (которые он называл распределениями), построил теорию их преобразования Фурье. Большое внимание он уделил их приложениям к математическому анализу и дифференциальным уравнениям.

В настоящее время эта теория нашла приложения почти во всех областях математики и ее приложений, физике и других областях естествознания.

### Литература

1. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики/ В.С Владимиров, В.В. Жаринов. – М.: Физматлит, 2004. – 250 с.
2. Гельфанд, И.М. Обобщенные функции и действия над ними/ И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилков. – М.:Добросвет: КДУ, 2007. – 408 с.
3. Дирак, П. А. Основы квантовой механики/ П.А. Дирак, пер. с англ. – М.: Проспект, 2001. – 210 с.
4. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа/ А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 2006. – 210 с.

5. Лапинова, С.А. Современные методы прикладной математики (обобщенные функции и асимптотические методы) / С.А. Лапинова, А.И. Саичев, В.А. Филимонов. – Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2006. – 260 с.
6. Рид, М. Методы современной математической физики, т. 1. Функциональный анализ / М. Рид, Б. Саймон. – М.: Мир, 2007. – 185 с.
7. Робертсон, А. Топологические векторные пространства / А. Робертсон, В. Робертсон. – М.: Мир, 1999. – 155 с.
8. Рудин, У. Функциональный анализ / У. Рудин. – М.: Мир, 2005. – 200 с.
9. Смирнов, В. И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов. – М.: Наука, 2005. – 200 с
10. Соболев, С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1988. – 333 с
11. Соболев, С.Л. Николай Максимович Гюнтер. Библиографический очерк / С.Л. Соболев, В.И. Смирнов. – М.: ГИТТЛ, 2003. – 195 с.
12. Фалалеев, М.В. Обобщенные функции и действия над ними / М.В. Фалалеев. – Иркутск: Изд-во Иркутского госуд. ун-та, 2011. – 163 с.

*Добровольский Ю. Н. Теория обобщенных функций и их применение на практике. Рассмотрены основные этапы развития теории обобщенных функций. Введено пространство  $D$  – бесконечно дифференцируемых, финитных функций на всей числовой прямой. На пространстве  $D$  определили линейный непрерывный функционал и назвали его обобщенной функцией. Ввели понятие слабой сходимости последовательностей функционалов. Обобщенные функции разделили на два класса: регулярные и сингулярные. Изучили основные свойства обобщенных функций. Привели обобщенное решение простейших дифференциальных уравнений.*

**Ключевые слова:** пространство основных функций, финитная функция, обобщенная функция, функционал, слабая сходимость, регулярные и сингулярные функции.

*Dobrovolsky Yu. N. Theory of generalized functions and their application in practice. The main stages of the development of the theory of generalized functions are considered. The space of  $D$  – infinitely differentiable, finite functions on the entire numerical line is introduced. A linear continuous functional was defined on the space  $D$  and called its generalized function. The concept of weak convergence of sequences of functionals was introduced. Generalized functions were divided into two classes: regular and singular. We have studied the basic properties of generalized functions. A generalized solution of the simplest differential equations was given.*

**Keywords:** space of basic functions, finite function, generalized function, functional, weak convergence, regular and singular functions.

Статья поступила в редакцию 20.08.2022  
Рекомендована к публикации профессором Зори С. А.

## О способах вывода, неоднозначности интегральных соотношений между спиновыми и зарядовыми плотностями и о следствиях из них

Г. Т. Клишко

Донецкий национальный технический университет  
[gtklimko@mail.ru](mailto:gtklimko@mail.ru)

### Аннотация

Получены интегральные соотношения между спиновыми и зарядовыми плотностями с разной формой записи. Их эквивалентность доказана применением изученных свойств плотностей, зависящих только от пространственных координат. Результаты дополняют методы квантовой механики без спина способами их получения и тестирования. Для значений свёрток двух-, трёх- и четырёх-частичных матриц зарядовой плотности с транспозициями, действующими на них с одной стороны, установлен физический смысл. Эти точные результаты применимы для проверки принадлежности модельных функций, их зарядовых и спиновых плотностей чистому спиновому состоянию.

### Введение

Скрытые возможности и координатной [1], и производящей [2] функций Фока, обобщённой на редуцированные матрицы плотности порядка  $p$  (РМП- $p$ ) в [3], изучались в [3 – 11].

Производящая функция Фока для РМП- $p$  между состояниями  $\Psi_{sM'}$  и  $\Psi_{sM}$  со спином,  $s'$ ,  $s$ , и проекцией,  $-s' \leq M' \leq s'$ ,  $-s \leq M \leq s$ , соответственно, даёт общую связь,  $L_{s,v,\tau}^{(p)}$ , - её пространственной компоненты с  $\mu = M' - M$ , стоящей при спиновом множителе РМП- $p$ , с её главными компонентами,  $L_{s,v,\tau}^{(p)}$ , (17) в [11].

Компонента  $L_{s,v,\tau}^{(p)}$  для функций Фока  $\Phi_{s'}$  и  $\Phi_s$ :

$$L_{s,v,\tau}^{(p)}(\{i\}_\tau * \{j\}_{p-\tau} | \{i'\}_{\tau'} * \{j'\}_{p-\tau'}) = L_{s,v,\tau}^{(p)} = \frac{\sqrt{(n+s')(n-s')(n+s)(n-s)!}}{p!(n+s'-\tau)(n-p-s'+\tau)!} \quad (1)$$

$$Sp_r^{2n-p} \left\{ \Phi_{s'}(\dots \{i\}_\tau | \{j\}_{p-\tau} \dots) \Phi_s^*(\dots \{i'\}_{\tau'} | \{j'\}_{p-\tau'} \dots) \right\}.$$

Здесь  $v = s' - s = \tau - \tau'$ , и пространственные не штрихованные и штрихованные координаты частиц, стоящие до и после черты в функциях  $\Phi_{s'}$  и  $\Phi_s$ , указаны их номерами:  $\{i\}_\tau \cup \{j\}_{p-\tau} = \{1, 2, \dots, p\}$  и  $\{i'\}_{\tau'} \cup \{j'\}_{p-\tau'} = \{1', 2', \dots, p'\}$ , как в [11].

Следующий результат [11] – это общее интегральное соотношение (ОИС), получен из условий циклической симметрии  $\Phi_{s'}$  и  $\Phi_s$ . Оно выражает свёртку РМП- $q$ , определяемой (1), но с  $q$  вместо  $p$ , по координатам  $q - p = (k+l+u+u')$  частиц, когда часть из них,  $\{k\}$  и  $\{l\}$ , расположена в  $\Phi_{s'}$  и в  $\Phi_s$  одинаково,  $\{k\}$  – до и  $\{l\}$  – после черты, а интегрируемые переменные других частиц,  $\{u\}$  и  $\{u'\}$ , расположены в них не одинаково – по разные стороны от черты, через РМП  $L_{s,v,\tau}^{(p)}$ . В,  $L_{s,v,\tau}^{(p)}$ ,  $\tau$  и  $\tau' = \tau - v$  частиц

из наборов  $\{\{i\} \cup \{j\}\}_p$  и  $\{\{i'\} \cup \{j'\}\}_{p'}$  стоят в  $\Phi_{s'}$  и  $\Phi_s$  до черты, и возможные значения  $\tau$  в них ограничены,  $\max\{0, v, \rho - u'\} \leq \tau \leq \min\{\rho, \rho' + v\}$ .

Антисимметрию  $L_{s,v,\tau}^{(p)}$  для наборов  $\{i\}_p$  и  $\{i'\}_{p'}$  восстанавливают антисимметризаторы,  $\hat{A}_\rho$ ,  $\hat{A}_{\rho'}$ , в правой части формулы (35) из [11]. В левой части ОИС её имеет интегрируемая РМП- $q$ :

$$L_{s,v,t}^{(q)}(u,u') = L_{s,v,t}^{(q)}(\{k\}\{u\}\{i\}_\rho * \{j\}_{p-\rho} \{u'\}\{l\} | \{k\}\{u'\}\{i\}_{\rho'} * \{j\}_{p-\rho'} \{u\}\{l\}) = \frac{\sqrt{(n+s')(n-s)!}}{q!(n+s'-t)!} \times \frac{\sqrt{(n+s)(n-s)!}}{(n-q-s'+t)!} Sp_r^{N-q} \left\{ \Phi_{s'}(\{k\}\{u\}\{i\}_\rho | \{j\}_{p-\rho} \{u'\}\{l\}) \times \Phi_s^*(\{k\}\{u'\}\{i'\}_{\rho'} | \{u\}\{j'\}_{p-\rho'} \{l\}) \right\}. \quad (2)$$

В (2) числа  $t = k + u + \rho$  и  $t' = k + u' + \rho'$  заменяют  $\tau$  и  $\tau'$  из (1),  $v = \tau - \tau' = t - t'$ , и в обозначении совокупностей,  $\{k\}$ ,  $\{l\}$ ,  $\{u\}$ ,  $\{u'\}$ , из интегрируемых переменных в скобках указан их размер, координаты такого числа частиц.

Если  $u = u' = 0$  и  $k + l = q - p$ , ОИС даёт обычную свёртку (21) из [11] для РМП- $q$  функций Фока, а при  $\{u\} \neq \emptyset$  и/или  $\{u'\} \neq \emptyset$ , – даёт нетривиальное интегральное соотношение (НИС).

Эта работа продолжает статью [11].

Здесь предложен способ получения связи тензорных пространственных компонент РМП- $p$ ,  $R_{(y)\omega}^{(p)}$ , со свёртками от пространственных компонент, РМП- $q$ , для тех же состояний, но большей частичности,  $q > p$ , того же или другого ранга, среди которых могут быть и только зарядовые плотности. Обнаружена для  $p \geq 2$  множественность форм их записи. Установлена причина этого. Показано, что их разные формы записи эквивалентные.

Задача “квантовой механики без спина” [12] решена здесь методом координатной функции Фока [1 – 11], в котором из функций Фока строят и спиновые плотности,  $R_{(\gamma)\omega}^{(p)0}$ , с  $\omega \neq 0$ , и зарядовую плотность,  $R_{sM}^{(p)}$ , с  $\omega = 0$ :

$$R_{sM}^{(p)}(1, \dots, p|1', \dots, p') = R_{(\gamma)0}^{(p)0} = \sum_{\tau} (p!)^{-1} \cdot \binom{p}{\tau} \cdot \sum_{Q \in \pi_p} \widehat{Q} \cdot L_{s,0,\tau}^{(p)}(1, \dots, \tau^* \dots, p|1', \dots, \tau'^* \dots, p') \cdot \widehat{Q}^+ \quad (4)$$

Она не зависит от  $M$ . (В (19) из [11]  $\binom{p}{\tau}$  нет.)

Ранее методом Фока получены в [3, 5] разложения по матрицам Матсена-Пошусты [13] для одно- и двухчастичных зарядовых,  $\rho_s$  и  $R_s = R$ , спиновой,  $d_{ss} = d$ , спин-орбитальной,  $D_{ss} = D$ , и спин-спиновой,  $F_{ss} = F$ , плотностей. Они замещают вычисления сумм с одно и двух частичными генеалогическими коэффициентами для группы перестановок.

### Частные случаи НИС

При  $p = 2$ ,  $s' = s$ ,  $u = u'$ ,  $\rho = \rho' = 1, 2$ , ОИС (35) из [11] для РМП функций Фока  $\Phi_{s'}$  и  $\Phi_s$  воспроизводят вспомогательные интегральные соотношения (5.6) – (5.8) из [4]. Полная свёртка в (2) с  $q = 2n$ ,  $s' = s$  и  $u = u'$ , когда функции отличаются  $u$  транспозициями, даёт тождества

$$Sp_r^{2n} \left\{ L_{s,0,0,(00)}^{(2n)[u,u]} \right\} = \binom{n+s}{u}^{-1}, \quad u \leq n-s. \quad (4)$$

Если  $\langle \Phi_s | \Phi_s \rangle = 1$ , они гарантируют нормировку функций  $\Phi_{sM}$ , (7) в [11], для  $-s < M < s$ :

$$\langle \Phi_{sM} | \Phi_{sM} \rangle = \binom{n-M}{n-s} \cdot \binom{n+s}{n+M} \cdot \binom{2s}{s+M}^{-1} \times \langle \widehat{A}_{n-M} \Phi_s | \widehat{A}_{n-M} \Phi_s \rangle = 1. \quad (5)$$

Значение (5) получим, если учтем разложение (3) из [11] для  $\widehat{A}_{n-M} = (\widehat{A}_{n-M})^2$ , действующих в (5) на координаты  $n-s$  последних частиц, ИС (4) и тождество (17.26) из [14]:

$$\min_{u=0}^{\{n-s, s-M\}} \sum_{u=0} (-1)^u \binom{n+s-u}{n-s-u} \cdot \binom{s-M}{u} = \binom{n+M}{n-s}, \quad (5)$$

$$\langle \Phi_s | \widehat{A}_{n-M} \Phi_s \rangle = \binom{n-M}{n-s}^{-1} \cdot \min_{u=0}^{\{n-s, s-M\}} \sum_{u=0} (-1)^u \times \binom{n-s}{u} \cdot \binom{s-M}{u} \cdot \binom{n+s}{u}^{-1} = \binom{n-M}{n-s}^{-1} \binom{n+s}{n+M}^{-1} \binom{2s}{s+M}.$$

Ниже применены следующие частные случаи ОИС, связывающие свёртки (2) с (1).

Для  $q = 3$ ,  $p = 2$ ,  $k = l = 0$ ,  $[u, u'] = [1, 0]$  или  $[0, 1]$  общее интегральное соотношение (ОИС)

переходит в равенства:

$$Sp_3 \left\{ L_{s,0,1(0,1)}^{(3)[1,0]} \right\} = Sp_3 \left\{ L_{s,0,1(1,0)}^{(3)[0,1]} \right\} = -\frac{1}{3} L_{s,0,0}^{(2)}; \quad (6)$$

$$Sp_3 \left\{ L_{s,0,2(1,2)}^{(3)[1,0]} \right\} = -\frac{2}{3} L_{s,0,1}^{(2)} \widehat{A}_{1'2'}; \quad (6)$$

$$Sp_3 \left\{ L_{s,0,2(2,1)}^{(3)[0,1]} \right\} = -\frac{2}{3} \widehat{A}_{12} L_{s,0,1}^{(2)}.$$

Действуют,  $\widehat{A}_{12}$ ,  $\widehat{A}_{1'2'}$ , на не штрихованные, штрихованные, координаты, соответственно.

В случаях с  $q = 4$  и  $p = 2$ , при ненулевом значении  $u$  и/или  $u'$ , для свёртки  $L_{s,v,t}^{(4)[u,u']}$  по координатам третьей и четвёртой частиц, когда  $k = 0$ ,  $l = 1$  и  $s' = s$ , из ОИС следуют частные ИС:

$$Sp_{34} \left\{ L_{s,0,1(0,1)}^{(4)[1,0]} \right\} = Sp_{34} \left\{ L_{s,0,1(1,0)}^{(4)[0,1]} \right\} = -\frac{n-s-2}{12} L_{s,0,0}^{(2)};$$

$$Sp_{34} \left\{ L_{s,0,2(0,2)}^{(4)[2,0]} \right\} = Sp_{34} \left\{ L_{s,0,2(2,0)}^{(4)[0,2]} \right\} = \frac{1}{6} L_{s,0,0}^{(2)}; \quad (7)$$

$$Sp_{34} \left\{ L_{s,0,2(1,1)}^{(4)[1,1]} \right\} = \frac{1}{12} \left[ (n-s-1) L_{s,0,1}^{(2)} - L_{s,0,0}^{(2)} \right],$$

а для  $k = 1$  и  $l = 0$  оно же даёт тождества:

$$Sp_{34} \left\{ L_{s,0,3(1,2)}^{(4)[1,0]} \right\} = -\frac{n+s-2}{6} L_{s,0,1}^{(2)} \widehat{A}_{1'2'}; \quad (7')$$

$$Sp_{34} \left\{ L_{s,0,3(2,1)}^{(4)[0,1]} \right\} = -\frac{n+s-2}{6} \widehat{A}_{12} L_{s,0,1}^{(2)}.$$

### НИС для тензорных компонент

Преобразования от РМП- $p$  функций Фока  $L_{s,v,\tau}^{(p)}$  (1) к тензорным компонентам РМП  $R_{(\gamma)\omega}^{(p)\mu}$ , как в (18) из [11], обратимые. То есть РМП- $p$ ,  $L_{s,v,\tau}^{(p)}$ , так же однозначно разложимы по компонентам,  $R_{(\gamma)\omega}^{(p)\nu}$  с  $\mu = \nu$ , той же частичности.

Так, для всех компонент РМП-1 [3 – 5]:

$$L_{s,0,1}^{(1)} = L_+ = \frac{\rho_s + s d_{ss}}{2}; \quad L_{s,0,0}^{(1)} = L_- = \frac{\rho_s + s d_{ss}}{2}; \quad (8)$$

$$L_{s,-1,0}^{(1)} = l^{(-1)} = \sqrt{2s(2s-1)} \cdot d_{s-1,s},$$

как суммы зарядовой,  $\rho_s = R_s^{(1)}$ , и спиновой,  $d_s$ , плотности. И с учётом симметрии диагональных по спину тензорных компонент РМП-2 в  $L_{s,v,\tau}^{(2)}$

$$R' = 'R, \quad (\text{или } R = 'R'), \quad (9)$$

$$D + 'D + D' + 'D' = 0, \quad (9')$$

$$F = -'F = -F' = 'F', \quad (9'')$$

$$L_{s,0,2}^{(2)} = L_+ = \frac{R - R' + s(2s-1)F}{6} - \frac{s(D' + 'D)}{4};$$

$$L_{s,0,0}^{(1)} = L_- = \frac{R - R' + s(2s-1)F}{6} + \frac{s(D' + 'D)}{4}; \quad (10)$$

$$L_{s,0,1}^{(2)} = \frac{1}{2} K = \frac{2R + R' - s(2s-1)F}{6} + \frac{s(D - 'D')}{4}.$$

В (9) – (10) штрихи слева и/или справа от  $R, D$  и



$F$  обозначают перестановки штрихованных и/или не штрихованных координат. Из (9) – (9') следует: зарядовая плотность бисимметричная, спин-орбитальную плотность симметризовать нельзя одновременно по не штрихованным и по штрихованным переменным, а спин-спиновая плотность антисимметричная в обоих наборах переменных. Множитель  $1/2$  при  $K$  в (10) согласован с (3).

ОИС, связывающее,  $L_{s,v,t}^{(q)[u,u'](\rho\rho')}$  с  $L_{s,v,\tau}^{(p)}$ , и такие равенства, как (3), (8) – (10), дают ИС между тензорными компонентами РМП разных по рангу и частичности. Процедура вывода. Под знаком свёртки по координатам  $q - p$  частиц плотности,  $R_{(\gamma)\omega}^{(q)v}$ , разложим по,  $L_{s,v,\tau}^{(q)}$ , и для интегралов с ними применить ОИС [11], а затем от РМП,  $L_{s,v,\tau}^{(p)}$ , вернёмся к,  $R_{(\gamma)\omega}^{(p)v}$ . Выполним это, и уравнения, связывающие свёртки от,  $R_{(\gamma')\omega}^{(q)v}$ , с комбинациями,  $R_{(\gamma)\omega}^{(p)v}$ , в базисе,  $L_{s,v,\tau}^{(p)}$ , который является общим для их левых и правых частей, будут итогом этих преобразований.

Связь каждой компоненты РМП- $p$  с комбинацией нетривиальных свёрток РМП- $p$  будет решением системы линейных уравнений. В частности, решение для,  $R_{(\gamma)\omega}^{(p)v}$ , будет зависеть только от зарядовых плотностей (3), если тензорные компоненты с  $q > p$  в каждой свёртке по координатам  $q - p$  частиц любого уравнения системы имеют ранг,  $\omega \equiv 0$ . Так решаем задачи “квантовой механики без спина”. Разрешимы ли они такими методами (без явного учёта спина)? Однозначны ли результаты так получаемые в ней? Физическая причина для математической неоднозначности решений обсуждается ниже.

Возможность из зарядовых плотностей большей частичности,  $R_s^{(q)}$ , получать,  $R_{(1^{p-\omega} \dots)}^{(p)0}$ , с  $q = p + \omega$ , показана алгеброй спинов в [6]. А что любую,  $R_{(\gamma)\omega}^{(p)0}$ , можно получить из главной компоненты,  $R_{(1^{p-\omega} \dots)}^{(p)0}$ , ранга  $\omega$  перестановками только внутри её «наборов» из штрихованных и/или не штрихованных координат, в общем виде доказано в [15].

Неоднозначность записи ИС с  $R_{(\gamma)\omega}^{(p)0}$  в [6] не обсуждалась. Объясним, в чём её причины. Перестановочная симметрия пространственных компонент РМП- $p$  ограничена принципом Паули. Он эквивалентен “характеру симметрии и антисимметрии” Хунда [16] шредингеровской функции, и применению в “квантовой механике без спина” [12, 14] двухстолбцовых схем Юнга. Вследствие этого пространственные тензорные компоненты симметризовать по координатам более, чем двух электронов нельзя. Функцию Фока и антисимметризовать по координатам

более, чем  $n + s$  частиц нельзя. Это порождает линейные зависимости между двух частичными плотностями, полученными свёрткой тензорных компонент большей частичности. Так, зарядовая плотность,  $R_{(1^3)_0}^{(3)0}$ , симметризованная только по её не штрихованным, или по штрихованным, координатам частиц, как и её свёртка по координатам любой частицы, уже равна нулю:

$$Sp_3 \left\{ \sum_{P \in \pi_3} \hat{P} \cdot R_{(1^3)_0}^{(3)0} = \sum_{P' \in \pi_3} R_{(1^3)_0}^{(3)0} \cdot \hat{P}' \equiv 0 \right\}. \quad (11)$$

Учитывая в (11) бисимметричность зарядовой плотности  $R_{(1^3)_0}^{(3)0}$  (3) и свойство редукции:

$$R(1,2|1',2') = \frac{3}{N-2} Sp_3 \left\{ \sum_{P \in \pi_3} R_{(1^3)_0}^{(3)0}(1,2,3|1',2',3) \right\}, \quad (12)$$

для нетривиальной свёртки плотности,  $R_{(1^3)_0}^{(3)0}$ ,

$$Q = Sp_3 \left\{ \hat{P}_{23} R_{(1^3)_0}^{(3)0}(1,2,3|1',2',3) \right\} = Sp_3 \left\{ R_{(1^3)_0}^{(3)0}(1,2,3|1',3,2') \right\} = Q(1,2|1',2'), \quad (13)$$

из (11) следует «линейная» зависимость

$$\frac{N-2}{3} \cdot (R + R') + Q + Q' + Q' = 0. \quad (14)$$

Штрихи указывают перестановки переменных, как в (10),  $N=2n$  – число частиц в системе.

Тождество (14) подтверждается, если в нём перейти к РМП (1) для функций Фока. Переход для  $Q$  (13) следует из НИС (6), (6') и учёта (3) для,  $R_s^{(3)}$ , для  $R, D, F$  они известны [4]:

$$Q(1,2|1',2') = -\frac{n+s-2}{3} L_+ - \frac{n-s-3}{6} K - \frac{1}{6} (K' + K) - \frac{n+s-1}{6} K' - \frac{n-s-4}{3} L_-. \quad (15)$$

$$R = L_+ + \frac{1}{2} (K + K') + L_-; \\ D = \frac{1}{s} \left[ L_+ + \frac{1}{2} (K - K') - L_- \right]; \\ F = \frac{1}{s(2s-1)} \left[ L_+ - \frac{1}{2} (K - K' - K + K') + L_- \right]. \quad (16)$$

Плотности,  $R, D, F$  и  $Q$ , дополняют свёртки по координатам частиц 3 и 4 от зарядовой плотности,  $R_s^{(4)} = R_{(1^4)_0}^{(4)0}$ , (3), которые отличают односторонние транспозиции, на них действующие:

$$V(1,2|1',2') = Sp_{3,4} \left\{ R_{(1^4)_0}^{(4)0}(1,2,4,3|1',2',3,4) \right\}; \\ W(1,2|1',2') = Sp_{3,4} \left\{ R_{(1^4)_0}^{(4)0}(3,4,1,2|1',2',3,4) \right\}. \quad (17)$$

Учёт в правой части первой свёртки (17) формулы (3), НИС (7) с  $\rho = \rho'$ , и редукции (21) [11] дают для  $V$  разложение, сводящееся к линейной комбинации  $R$  и  $R'$ . Плотность  $W$  не зависит от  $R$  и  $Q$ . Это следует, например, из действия  $\hat{P}^r$  на РМП-4,  $\Gamma^{(p)}(x_1, \dots, x_4 | x'_1, \dots, x'_4)$  [11] в спин-орбитальном пространстве,  $x = (r, \sigma)$ :

$$\hat{P}^r \Gamma^{(p)}(x_1, \dots, x_4 | x'_1, \dots, x'_4) = \sum_{(\gamma)\omega\mu} \hat{P}^r R_{(\gamma)\omega}^{(p)\mu} \cdot \hat{T}_{(\gamma)\omega}^{(p)\mu}. \quad (18)$$

Тензор,  $\hat{T}_{(\gamma)\omega}^{(p)\mu}$ , зависит от спиновых координат.

Действия,  $\hat{P}^r = \hat{P}_{3,4}^r$ ,  $\hat{P}^r = \hat{P}_{1,3}^r \hat{P}_{2,4}^r$ , переносятся в (18) на спиновые координаты частиц вследствие антисимметрии  $\Gamma^{(p)}(x_1, \dots, x_4 | x'_1, \dots, x'_4)$  отдельно в каждом наборе её координат, и свёртка по координатам частиц 3 и 4 ведёт к РМП-2:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)} &= Sp_{3,4}^{r,\sigma} \left\{ \hat{P}^r \Gamma^{(p)}(x_1, \dots, x_4 | x'_1, \dots, x'_4) \right\} = \\ &= Sp_{3,4}^{r,\sigma} \left\{ \sum_{(\gamma)\omega\mu} (\mp 1) R_{(\gamma)\omega}^{(p)\mu} \cdot \hat{P}^\sigma \hat{T}_{(\gamma)\omega}^{(p)\mu} \right\}. \end{aligned} \quad (18')$$

Знак зависит от чётности перестановки.

Транспозиции, переставляющие спины, представимы через произведение их спиновых тензоров:

$$\hat{P}_{3,4}^\sigma = -\frac{1}{2} \left[ 1 + 4 \sum_{\mu=-1}^1 \hat{t}_1^\mu(\sigma_3) \cdot \hat{t}_1^{\mu+}(\sigma_4) \right]. \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \hat{P}_{1,3}^\sigma \cdot \hat{P}_{2,4}^\sigma &= \frac{1}{4} \left[ 1 + 4 \sum_{\mu=-1}^1 \hat{t}_1^\mu(\sigma_1) \cdot \hat{t}_1^{\mu+}(\sigma_3) \right] \times \\ &\times \left[ 1 + 4 \sum_{\mu=-1}^1 \hat{t}_1^\mu(\sigma_2) \cdot \hat{t}_1^{\mu+}(\sigma_4) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Свёртка (18') даёт разный результат с  $\hat{P}_{3,4}^\sigma$  (19) и с  $\hat{P}_{1,3}^\sigma \cdot \hat{P}_{2,4}^\sigma$  (20). Для  $V$  в (17), свёртка по спинам  $\sigma_3$  и  $\sigma_4$  включает всю транспозицию (19). Она инвариантна при вращениях в спиновом пространстве, и ранг  $\omega$  слагаемых в (18') не изменит. Для  $W$  (17) свёртка по  $\sigma_3$  и  $\sigma_4$  в РМП-4 (18') затрагивает не все переменные из (20). В ней произведение тензоров "разрываются", и свёртки с  $\hat{t}_1^{\pm 1}(\sigma_3) \cdot \hat{t}_1^{\pm 1}(\sigma_4) \approx \hat{T}_{(1^2)^2}^{(2)\pm 2}$  из слагаемых (18') изменяют, по правилу треугольника для спинов, ранги  $\omega$  спиновых тензоров с  $\omega \geq 2$  до  $\omega \pm 2$ , а с множителем  $R_s^{(4)} = R_{(1^4)^0}^{(4)^0}$  до  $\omega + 2 = 2$ , порождая появление в разложении (18) тензора второго ранга. Аналогично из  $Sp_{3,4}^{r,\sigma} \left\{ \hat{P}_{2,3}^r \Gamma^{(3)} \right\}$  следуют изменения ранга на единицу,  $\Delta\omega \leq 1$ .

И есть основания, что в рамках методов квантовой механики без спина, применяя лишь плотности (17) можем из зарядовых плотностей большей частичности получить все спиновые плотности. Действительно, применяя (3), и НИС (7), (7') для  $W$  в (17) получаем и её разложение по РМП (1) для функций Фока, и её свойства:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3!} \left\{ \binom{n+s-2}{2} L_+ + \frac{(n+s-1)(n-s-3)+2}{4} (K + 'K')_+ \right. \\ &\left. + \frac{3n+s-5}{4} (K' + 'K)_+ \binom{n-s-4}{2} L_- \right\} = W(1,2|1',2'); \quad (21) \\ &W(1,2|1',2') = W(2,1|2',1'). \end{aligned}$$

### Получение распределений для спинов из зарядовых плотностей

Коэффициенты  $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$  разложения плотностей (16) по плотностям из левой части (14), определяемым зарядовыми плотностями  $R_s^{(2)}$  и  $R_s^{(3)}$ , в базисе РМП  $L_+$ ,  $K$ ,  $'K$ ,  $K'$ ,  $'K'$  и  $L_-$ , определяем из системы:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (22)$$

в которой вектор коэффициентов разложения  $R$ ,  $D$  или  $F$  (16),  $\mathbf{b}^T = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)$ , задан в том же базисе, и матрица,  $\mathbf{T} = \mathbf{T}_5$ , в (22) равна:

$$\mathbf{T}_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha & -\alpha & -\alpha & \alpha \\ \frac{1}{2} & 0 & \beta & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \gamma \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \beta & \gamma & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \gamma & \beta & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & \gamma & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \beta \\ 1 & -1 & \delta & -\delta & -\delta & \delta \end{pmatrix}; \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{n+s-2}{3} = 2\gamma + \frac{1}{3}; \\ \beta &= -\frac{n-s-3}{6}; \quad \gamma = -\frac{n+s-1}{6}; \\ \delta &= -\frac{n-s-4}{3} = 2\beta + \frac{1}{3}; \quad \det(\mathbf{T}_5) = 0. \end{aligned}$$

Её столбцы дают разложения для  $R, R', Q, 'Q, Q', 'Q'$  в том же базисе. Из-за (14) её ранг равен 5 и система (22), (23) разрешима, если:

$$b_1 - 2b_2 + 2b_3 + 2b_4 - 2b_5 + b_6 = 0. \quad (24)$$

Её решения – это очевидное  $R \equiv R$  и разложение  $D$  по  $R, R', Q, 'Q, Q', 'Q'$ :

$$D(1,2|1',2') = \left(x \cdot \frac{2n-2}{3} - \frac{n-2}{s(s+1)}\right) \cdot R +$$

$$+ \left(x \cdot \frac{2n-2}{3} - \frac{1}{s(s+1)}\right) \cdot R' +$$

$$+ x \cdot (Q + 'Q + Q') + \left(x - \frac{3}{s(s+1)}\right) \cdot 'Q', \quad (25)$$

с произвольным,  $x = x_3 = x_4 = x_5 = \frac{3}{s(s+1)} + x_6$ , и

$$x_1 = x \cdot \frac{2n-2}{3} - \frac{n-2}{s(s+1)}, \quad x_2 = x \cdot \frac{2n-2}{3} - \frac{1}{s(s+1)}.$$

При  $x = 0$  из (25) следует

$$D = \frac{1}{s(s+1)} \left[ (2-n)R - 'R - 3Sp_3 \left\{ \hat{P}_{13} R_s^{(3)} \right\} \right]. \quad (26)$$

Решение (25) включает множество форм записи, дающих получение спин-орбитальной плотности из зарядовых плотностей. Причина, проясненная выше, следует из принципа Паули.

Система (22) с матрицей (23) не имеет решения для спин-спиновой плотности  $F$ .

После замены плотности  $'Q'$  на  $W$  в системе (22) её неособенная матрица,  $\mathbf{T} = \mathbf{T}_6$ , ранг которой 6, равна:

$$\det(\mathbf{T}_6) \neq 0;$$

$$\mathbf{T}_6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha & -\alpha & -\alpha & \frac{\alpha(3\alpha+1)}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \beta & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{18\beta\gamma+1}{12} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \beta & \gamma & -\frac{2\gamma+\beta}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \gamma & \beta & -\frac{2\gamma+\beta}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \gamma & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{18\beta\gamma+1}{12} \\ 1 & -1 & \delta & -\delta & -\delta & \frac{\delta(3\delta+1)}{4} \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Значения  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\delta$  те же, что в (23). Последний столбец (27) – вектор разложения  $W$  по РМП-2 функций Фока. Система (22) с  $\mathbf{T} = \mathbf{T}_6$  разрешима с любым вектором  $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}^T = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)$ , её решением будет разложение по  $R, R', Q, 'Q, Q'$  и  $W$ .

Так как для шестого столбца матрицы (27) тождество (24) не выполняется, в решении системы (22) для спин-орбитальной плотности,  $D$ , отсутствует,  $W$ . Оно равно (25) с  $x = \frac{3}{s(s+1)}$ :

$$D = \frac{1}{s(s+1)} \left[ n \cdot R + (2n-3)'R + 3(Q + 'Q + Q') \right] =$$

$$= \frac{1}{s(s+1)} \left[ n \cdot R_s^{(2)} + (2n-3)'R_s^{(2)} \right] +$$

$$+ \frac{3}{s(s+1)} Sp_3 \left\{ (1 + \hat{P}_{12} + \hat{P}_{13}) \cdot \hat{P}_{23} \cdot R_s^{(3)} \right\}. \quad (28)$$

Следуя (14), формулы (25), (26) и (28) для спин-орбитальной плотности  $D$  тождественны, и эквивалентны формуле (8) из [7] и результату из [6], полученному в спин-орбитальном подходе.

С вектором  $\tilde{\mathbf{b}} = \frac{1}{2s(2s-1)} \cdot (2, -1, 1, 1, -1, 2)$ ,

для  $F$  (16), из 2-ой и 5-ой строк системы (22) с  $\mathbf{T} = \mathbf{T}_6$  получим:  $x_3 = 0$ , а из 3-го и 4-го уравнений системы:  $x_4 = x_5$ , и значения  $x_1, x_2, x_4$  и  $x_6$  разные.

$$F = \frac{\binom{2s+3}{2}^{-1}}{s(2s-1)} \left\{ [s(s+1) - 3(n^2 - 2n - 1)] \cdot R + \right.$$

$$+ 2[s(s+1) - 3(n-2)^2] \cdot R' -$$

$$\left. - \frac{9}{2}(2n-7)(Q' + 'Q) + 36W \right\}. \quad (29)$$

Согласно (9") плотность (29) должна быть антисимметричной и в штрихованных, и в нештрихованных переменных. Для плотности,  $-(Q' + 'Q)/2$ , из (29) выделим симметричную и антисимметричную части с помощью (14):

$$-\frac{Q' + 'Q}{2} = -\frac{Q' + 'Q}{2} + \frac{0}{4} = \frac{-Q' - 'Q}{2} +$$

$$+ \frac{Q + 'Q + Q' + 'Q' + \frac{N-2}{3} \cdot (R + R')}{4} =$$

$$= \hat{A}_{12} \cdot Q \cdot \hat{A}_{1'2'} + \frac{n-2}{3} \hat{S}_{12} \cdot R \cdot \hat{S}_{1'2'}, \quad (30)$$

где  $(\hat{S}_{12})^2 = \hat{S}_{12}$  – симметризатор.

Тождественные преобразования для  $W$ , с аналогичным (14) равенством, исключают из (29) симметричную составляющую. Иначе, её отсутствие легко проверить, применив в (29) тождество (30) и разложения для  $R$  (16) и  $W$  (21). В итоге имеем:

$$F = \frac{3}{s(s+1)(2s-1)(2s+3)} \hat{A}_{12} \left\{ \lambda \cdot R_s^{(2)} + \right.$$

$$\left. + \nu \cdot Sp_3 \left( \hat{P}_{23}^r R_s^{(3)} \right) + 12Sp_{3,4} \left( \hat{P}_{13}^r \hat{P}_{24}^r R_s^{(4)} \right) \right\} \hat{A}_{1'2'}. \quad (31)$$

В (31)  $\lambda = (n-3)^2 - s(s+1)/3 = x_1 - x_2$ ,  $x_1$  и  $x_2$  равны численным коэффициентам при  $R$  и  $R'$  в (29), и  $\nu = 3(2n-7)$ , как в (9) из [7].

Связывающие пространственные тензоры для РМП-1 и РМП-2 ИС даны в [5] на стр. 590, а формулы (49) – (53) из [3] включают в ИС и переходные по спину плотности.

Формулы, выражающие спиновую, (49) из [3], спин-орбитальную, с формой записи (26), и спин-спиновую, как в (31), плотности через зарядовые плотности, оказались удобными для определения операторов спиновых плотностей в базисе генераторов унитарной группы [7]. Там множители,  $1/s$  и  $1/(s(2s-1))$ , отсутствуют по различию в определении плотностей.

### Физический смысл ряда ИС

Физический смысл ИС для тензорных пространственных компонент РМП- $p$  различной частичности часто связан со значением их полной свёртки. Такие свёртки для РМП-2 и РМП-1 следуют непосредственно из [3, 5] и из определений зарядовой и спиновой плотностей через РМП нормированной функции Фока:

$$Sp\{\rho_s\} = N, Sp\{d_s\} = 2, Sp\{R_s^{(2)}\} = n(2n-1). \quad (32)$$

Свёртка выражения (49) из [3] даёт тождество

$$Sp_{1,2}\{R'\} = -n \cdot (n-2) - s \cdot (s+1). \quad (33)$$

Из (50) – (53) в [3] следуют

$$\begin{aligned} -Sp_{1,2}\{D'_s\} &= -Sp_{1,2}\{D_s\} = (2n-1) = \\ &= Sp_{1,2}\{D_s\} = Sp_{1,2}\{D'_s\}, Sp_{1,2}\{F_s\} = 1. \end{aligned} \quad (34)$$

Значение  $Sp_{1,2}\{K'\} = n-s$  [4] и равенство (33) связаны с принадлежностью функции Фока и плотности  $R_s$  состоянию с определённым значением спина. Применив формулу Фока-Дирака [17] для оператора  $\hat{S}^2$  и тождество (33) при вычислении его среднего значения, получаем подтверждение этого:

$$\begin{aligned} \langle sM | \hat{S}^2 | sM \rangle &= \langle \Phi_s | -n(n-2) - \sum_{i<j} \hat{P}_{ij} | \Phi_s \rangle = \\ &= -n(n-2) - Sp_{1,2}\{R'\} = s \cdot (s+1). \end{aligned} \quad (35)$$

Транспозиция формулы Фока-Дирака действует на пространственные координаты частиц.

Разложения (15) и (21) по базису РМП-2, полученные для  $Q$  (13) и  $W$  (17) функций Фока, дают значения соответствующих свёрток:

$$\begin{aligned} Sp_{1,2}\{Q\} &= \frac{3}{2n-2} Sp_{1,2}\{R'\}, \\ Sp_{1,2}\{Q\} &= Sp_{1,2}\{R_s^{(3)}(2,3,1|1,2,3)\} = \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{n-1}{3} [n \cdot (n-5) + 3s \cdot (s+1)], \\ 6Sp_{1,2}\{W\} &= 6Sp_{1,2}\{R_s^{(4)}(3,4,1,2|1,2,3,4)\} = \\ &= s \cdot (s+1) [2n \cdot (n-5) + s \cdot (s+1) + 6] + \\ &+ n \cdot (n-1) \cdot (n^2 - 5n + 9). \end{aligned} \quad (37)$$

Верные значения свёрток (36), (37), (32) и (33), определяемых зарядовыми плотностями, РМП-2, РМП-3, РМП-4, – гарантия нулевой дисперсии оператора  $\hat{S}^2$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \langle sM | [\hat{S}^2 - s(s+1)]^2 | sM \rangle &= \langle \Phi_s | [-n(n-2) - \\ &- \sum_{i<j} \hat{P}_{ij} - s(s+1)]^2 | \Phi_s \rangle = [n(n-2) + s(s+1)]^2 + \\ &+ 2[n(n-2) + s(s+1)] Sp_{1,2}\{R'\} + \\ &+ 6Sp_{1,2}\{W + Q\} + Sp_{1,2}\{R\} \equiv 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Способ получения зарядовых плотностей  $R_s^{(2)}$ ,  $R_s^{(3)}$  и  $R_s^{(4)}$ , для состояния со спином  $s$  и  $2n$ -частицами, не влияет на их верные значения.

### Заключение

Теоретико-групповые методы построения шредингеровской функции [12, 14] преобладали в её исследованиях, начиная с работы [16]. “Конструирование” шредингеровской функции было отделено от исследований её свойств только после открытия трёх условий Фока [1], гарантирующих её принадлежность к состоянию с определённым полным спином. Условия метода Фока применялись лишь для построения упрощённых шредингеровских функций, в частности, с отделённым электроном и для проверки условий Фока в разных её моделях.

В работах [3 – 10] метод координатной функции Фока получил дальнейшее развитие. Спиновая плотность до работы [4] в нём не рассматривалась. Метод применён к изучению и зарядовых, и спиновых плотностей РМП- $p$  одного состояния в [4, 5, 7]. Распространён он на переходные по спину РМП- $p$  [3], и с учётом пространственных симметрий на нерутановские состояния молекул и атомов в [9, 10], и не тривиальные интегральные соотношения между РМП- $p$  функций Фока различной частичности получены в [11].

Решения полученных уравнений (22) с матрицами (23) и (27), вследствие разложения пространственных тензорных компонент РМП- $p$  (3), (16) и с учётом в (15), (21) интегральных соотношений из [11] с РМП- $p$  функций Фока, позволили здесь для интегральных соотношений между компонентами РМП- $p$  разного ранга,  $\omega = 0, 1, 2$ , и частичности,  $p = 2, 3, 4$ , получить выражения в самом общем виде, т.е. со всеми возможными формами их записи. Здесь во все преобразования и вычисления включены только плотности, зависящими от пространственных координат, что подтверждает универсальность методов “квантовой механики без спина” [1 – 13, 15] и расширяет область их применения.

Все полученные соотношения точные и не зависят от метода построения функции определённого спинового состояния.

Развитый в [3 – 11, 15] метод квантовой механики без спина применим и для построения модельных функций и их пространственных тензорных компонент, и для проверки корректности полученных результатов.

### Литература

1. Фок, В. А. О волновых функциях многоэлектронных систем // Журн. Эксперим. и теорет. физ, 1940. – Т. 10, № 9–10. – С. 961–979.
2. Фок, В. А. Начала квантовой механики. – М.: Наука, 1976. – 376 с.

3. Klimko, G. T. Fock coordinate function method for separation of spin variables in transition density matrices / G. T. Klimko, M. M. Mestechkin, G. E. Whyman // Intern. J. Quantum Chem, 1980. – V.17, №3. – P. 415 – 428.

4. Вайман, Г. Е. Отделение спина и метод координатной волновой функции Фока в проблеме N – представимости / Г. Е. Вайман, А. В. Лузанов, М. М. Местечкин // Теорет. и матем. физ., 1976. – Т. 28, №1. – С. 65 – 79.

5. Mestechkin, M. M. Spin-dependent operators in the spin-free quantum chemistry / M. M. Mestechkin, G. T. Klimko // Intern. J. Quantum Chem, 1978. – V. 13, №5. – P. 579 – 596.

6. Luzanov, A.V. Structure and Spin-Purity Conditions for Reduced Density Matrices of Arbitrary Order / A. V. Luzanov, G.E. Whyman // Intern. J. Quantum Chem, 1981. – V. 20, №6. – P. 1179 – 1189.

7. Климко, Г. Т. Решение проблемы определения спиновых свойств молекул в унитарном формализме квантовой химии / Г. Т. Климко, А. В. Лузанов // Журн. структурн. Химии, 1987. – Т. 28, №5. – С. 3 – 9.

8. Климко, Г. Т. Суперпозиция конфигураций и метод координатной функции Фока. / Г. Т. Климко, М. М. Местечкин // Многоэлектронная задача в квантовой химии (Сб. научных трудов). – К.: Наук. думка, 1987. – С. 31 – 43.

9. Klimko, G.T. Roothaan's Open Shell Theory from the Viewpoint of an Orthogonal

Group / G. T. Klimko, M. M. Mestechkin // Intern. J. Quantum Chem., 1990. – V. 37, №5. – P. 753 – 771.

10. Климко, Г. Т. О применимости молекулярных методов для расчётов атомов с открытыми оболочками / Г. Т. Климко // Журн. физич. Химии, 1996. – Т. 70, №4. – С. 667 – 674.

11. Климко, Г. Т. Метод координатной функции Фока, производящая функция, интегральные соотношения / Г. Т. Климко // Системный анализ и информационные технологии в науках о природе и обществе, 2012. - № 1(2) – 2(3). – С. 99 – 106.

12. Каплан, И. Г. Симметрия многоэлектронных систем. – М.: Наука, 1969. – 407 с.

13. Matsen, F.A. Reduced Density Matrices with Application to Physical and Chemical Problems / F. A. Matsen, R. D. Poshusta // Queen's Papers on Pure and Applied Mathematics, 1968. - №11. - P. 20 – 30.

14. Вигнер, Е. Теория групп и её приложения в квантовомеханической теории атомных спектров. – М.: И.Л., 1961. – 443 с.

15. Klimko, G. T. Recovery of Bases of Group  $\pi_{2n}$  Representation on its Sub-group  $\pi_{n \times n}$  and Garriman's Theorem // Искусственный интеллект, 2012. - № 2. – С. 69 – 76.

16. Hund, F. Symmetriecharactere der Termen bei Systemen mit gleichen Partikeln in der Quantenmechanik. – Zeitschrift für Physik (Berlin), 1927. - V.43. - P.788-804.

**Климко Г.Т. О способах вывода, неоднозначности интегральных соотношений между спиновыми и зарядовыми плотностями и о следствиях из них.** Получены интегральные соотношения между спиновыми и зарядовыми плотностями с разной формой записи. Их эквивалентность доказана применением изученных свойств плотностей, зависящих только от пространственных координат. Результаты дополняют методы квантовой механики без спина способами их получения и тестирования. Для значений свёрток двух-, трёх- и четырёх-частичных матриц зарядовой плотности с транспозициями, действующими на них с одной стороны, установлен физический смысл. Эти точные результаты применимы для проверки принадлежности модельных функций, их зарядовых и спиновых плотностей чистому спиновому состоянию.

**Ключевые слова:** группа перестановок, квантовая механика без спина, зарядовые и спиновые плотности, интегральные соотношения.

**Klimko G.T. On the methods of derivation, the ambiguity of integral relations between spin and charge densities and the consequences of them.** Integral relations between spin and charge densities are obtained in various notation forms. Their equivalence is proved using the studied properties of densities that depend only on spatial coordinates. The results complement the methods of spinless quantum mechanics by ways of obtaining and verifying them. For the values of convolutions for two-, three- and four-part charge density matrices with transpositions acting on them from one side, the physical meaning is established. These exact results are applicable to check whether the model function, its charge and spin densities belong to a pure spin state.

**Keywords:** permutation group, spinless quantum mechanics, charge and spin densities, integral relations.

Статья поступила в редакцию 11.05.2022  
Рекомендуется к публикации доцентом Карабчевским В. В.

## ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ В ЗАДАЧЕ ДИАГНОСТИКИ РАКА МОЛОЧНОЙ ЖЕЛЕЗЫ

В. И. Дубовская, К. А. Брыжина  
Волгоградский государственный университет. г. Волгоград  
[dubovskajav@volsu.ru](mailto:dubovskajav@volsu.ru)

### Аннотация

*Данная работа посвящена вопросу использования факторного анализа данных в рамках задачи диагностики рака молочной железы. В статье анализируются возможности применения данного многомерного статистического метода с целью установления влияния диагностических признаков на результат работы классификатора. Проведен вычислительный эксперимент, в ходе которого использовались два классификатора: на основе логистической регрессии и на основе случайного леса. Эксперимент показал, что для одной и той же обучающей выборки структура факторной нагрузки для этих методов совпадает только для тех факторов, которые способствуют правильному результату.*

### Введение

На данный момент актуальной задачей медицины является ранняя дифференциальная диагностика онкологических заболеваний, в частности рака молочной железы. Одним из способов решения проблемы является использование новых эффективных методов обследования пациенток, среди которых можно отметить метод микроволновой радиотермометрии. Последний базируется на измерении собственного электромагнитного излучения тканей в инфокрасном диапазоне длин волн и микроволновом диапазоне, благодаря чему становится возможным неинвазивное выявление температурных аномалий на глубине нескольких сантиметров [1].

Данному методу посвящен ряд работ, в которых специалистами был описан подход использования методов математического моделирования и искусственного интеллекта по отношению к термометрическим данным с целью выявления подобных аномалий внутри молочных желез [2-4]. К полученным на данный момент результатам, приведенным в работах вышеуказанных авторов, можно отнести: построение эмпирических гипотез поведения температурных полей молочных желез, описание данных гипотез в математической форме, проектирование признакового пространства, используемого в ходе проведения классификации пациенток методами машинного обучения.

В настоящей работе предлагается подход, который позволит исследовать исходный набор признаков с целью установить, на сколько каждый из них влияет на ошибку классификатора. Использование факторного анализа позволит:

- во-первых, интерпретировать результаты классификатора;

- во-вторых, внести изменения в математическую модель классификатора таким образом, чтобы его работа учитывала влияние признака на правильность или ошибочность поставленного диагноза.

### Материалы и методы исследования

В данной работе использовалась база термометрических данных, содержащая в себе информацию о пациентках онкологических центров. Для проведения исследования база была преобразована таким образом, что каждый элемент соответствует отдельной молочной железе пациентки. Степень заболевания оценивается по 6-бальной шкале th0-th5. Каждое значение содержит в себе диагностическое описание температурных аномалий внутри органа [5]. Будем считать, что в случаях th0-th2 – молочная железа здорова, в случаях th3-th5 – молочная железа в группе риска.

Вся выборка данных  $H$  содержит в себе 9182 элемента. Дескриптивная математическая модель диагностического состояния пациентки описывается 62 функциями. Эти функции вычислялись на основе термометрических данных, полученных при измерении пациентки комплексом РТМ-01-РЭС.

Выборку температурных данных можно представить в виде:

$$S = \begin{pmatrix} t_0^1 & \dots & t_{43}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_0^k & \dots & t_{43}^k \\ t_0^{k+1} & \dots & t_{43}^{k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_0^n & \dots & t_{43}^n \end{pmatrix},$$

где  $t_i^j$ ,  $i = 0, \dots, 9$  – температуры  $i$ -ой точки правой молочной железы  $j$ -ой пациентки (РТМ-диапазон);

$t_i^j$ ,  $i = 10, \dots, 19$  – температура  $[i - 10]$  точки правой молочной железы  $j$ -ой пациентки (ИК-диапазон);

$t_i^j$ ,  $i = 20, \dots, 29$  – температура  $[i - 20]$  точки левой молочной железы  $j$ -ой пациентки (РТМ-диапазон);

$t_i^j$ ,  $i = 30, \dots, 39$  – температура  $[i - 30]$  точки левой молочной железы  $j$ -ой пациентки (ИК-диапазон);  $t_{40}^j = T1$ ,

$t_{41}^j = T2$  – температуры опорных точек  $j$ -ой пациентки (РТМ-диапазон);

$t_{42}^j = T1$ ,  $t_{43}^j = T2$  – температуры опорных точек  $j$ -ой пациентки (ИК-диапазон).

Для каждого качественного признака онкологического заболевания, к примеру, асимметрии температурных полей, соотношению кожной и глубинной температур, А.Г. Лосевым и В.В. Левшинским был построен набор моделирующих функций от температур, значение которых количественно характеризует признак. Подробнее с процессом построения функций можно ознакомиться в работе [6].

Для проведения классификации были использованы такие методы как логистическая регрессия и случайный лес, реализованные И.Е. Поповым [7]. После проведения классификации были получены две выборки:

выборка  $R$ , содержащая в себе выборку данных  $N$  о пациентах и полученный методом случайного леса результат классификации (чувствительность алгоритма составила – 87.5%, специфичность – 91.7%).

выборка  $L$ , содержащая в себе выборку данных  $N$  о пациентах и полученный методом логистической регрессии результат классификации (чувствительность алгоритма составила – 89.6%, специфичность – 91.2 %).

Здесь специфичность – доля вернодиagnosticированных здоровых пациентов, чувствительность – доля вернодиagnosticированных пациентов группы риска.

Структура выборок  $R$  и  $L$ :

В выборке  $R$  присутствует 8396 элементов, соответствующие верной классификации (522 – метка «Группа риска», 7874 – метка «Здоров»). 786 элементов – неверной классификации (74 – метка «Группа риска», 712 – метка «Здоров»).

В выборке  $L$  присутствует 8367 элементов соответствующие верной классификации (534 – метка «Группа риска», 7833 – метка «Здоров») и 815 – неверной классификации (62 – метка «Группа риска», 753 – метка «Здоров»).

Обозначим с индексом 0 выборку, соответствующую элементам с верной классификацией, а с индексом 1 – неверной. Тогда:

$$R = R_0 \cup R_1. \quad (1)$$

$$L = L_0 \cup L_1. \quad (2)$$

Полученные выборки можно представить в виде:

$$R = \begin{pmatrix} f_1^1 & \dots & f_{62}^1 & d^1 & r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^k & \dots & f_{62}^k & d^k & r^k \\ f_1^{k+1} & \dots & f_{62}^{k+1} & d^{k+1} & r^{k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^n & \dots & f_{62}^n & d^n & r^n \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$L = \begin{pmatrix} f_1^1 & \dots & f_{62}^1 & d^1 & l^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^k & \dots & f_{62}^k & d^k & l^k \\ f_1^{k+1} & \dots & f_{62}^{k+1} & d^{k+1} & l^{k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^n & \dots & f_{62}^n & d^n & l^n \end{pmatrix} \quad (4)$$

где  $f_i^j$  – значение рассчитанных признаков;  
 $i$  – номер признака;  
 $j$  – номер пациента;  
 $n$  – количество элементов в выборке;  
 $d^j$  – метка класса, соответствующая поставленному врачом диагнозу;  
 $r^j$  – результат классификатора случайный лес для соответствующего пациента;  
 $l^j$  – результат классификатора логистическая регрессия для соответствующего пациента.

Очевидно, что на полученный диагноз влияют используемые в процессе классификации признаки. Для определения уровня влияния признаков на результат классификации в данной работе был использован факторный анализ, который основан на выявлении посредством анализа вариаций переменных и их корреляций непосредственно не наблюдаемых и не измеряемых характеристик – общих факторов [8].

Для выделения факторов достаточно, чтобы корреляционная матрица была положительно определена, а также, чтобы детерминант этой матрицы не был равен нулю.

Однако на данном наборе признаков данные требования не соблюдаются, что подтверждено проверкой в среде IBM SPSS Statistics. Вызвано это тем, что некоторые признаки имеют между собой сильную корреляцию. Поэтому было решено убрать такие признаки. (В дальнейшем за рамками представляемой работы планируется восстанавливать значения факторных нагрузок по этим признакам).

При отборе признаков, которые будут участвовать в построении факторных моделей.

использовался подход, примененный в работе [9]:

– Рассчитывались корреляции для всех пар признаков.

– Находились корреляции со значениями больше либо равно 0.7 (данное значение было выбрано из таблицы шкал Чеддока, согласно которой корреляция со значениями от 0.7 включительно является сильной).

– Убирали первый признак из пары с сильной корреляцией, второй оставляли.

Ниже представлена табл. 1 с количеством отсеянных признаков и количеством оставшихся признаков для проведения факторного анализа.

Таблица 1 – Количество отобранных признаков

Статус признака	Выборка признаков по выборкам			
	$R_0$	$R_1$	$L_0$	$L_1$
Отсеян	42	41	42	44
Оставлен	20	21	20	18

Для исследования был выбран метод главных факторов и ортогональный метод вращения Варимакс [8].

### Результаты вычислительного эксперимента и его обсуждение

Выделение факторов и поворот факторных нагрузок проведен при помощи готового программного обеспечения IBM SPSS Statistics. Анализ был проведен поочередно для каждой выборки  $R_0$ ,  $R_1$ ,  $L_0$  и  $L_1$ .

Для отбора наиболее значимых факторов, был использован подход, основанный на совместном использовании критерий Кайзера и Кеттелла [10]. Ниже приведена табл. 2 с номерами отобранных факторов и их вкладом в общую (суммарную) дисперсию для выборки  $R_0$ .

Поскольку для данного набора данных было оставлено 20 признаков, то 100% дисперсии последних объясняет 20 факторов. Однако, начиная с 10 фактора, вклад в суммарную дисперсию становится настолько малым, что практически не влияет на погрешность модели.

Аналогичное количество факторов было выбрано и при помощи критерия «каменной осыпи» (рис.1). Согласно данному критерию, строится график собственных дисперсий переменных и выбирается такое количество факторов, где значения перестают сильно меняться [8].

Аналогичным способом определялось количество факторов для остальных выборок  $R_1$ ,  $L_0$  и  $L_1$ .

Таблица 2 – Фрагмент данных с объясненной совокупной дисперсией

	Извлечение дисперсий после вращения		
	Всего	% дисперсии	Суммарный %
1	2.159	10.795	10.795
2	1.615	8.075	18.870
3	1.598	7.991	26.861
4	1.509	7.544	34.405
5	1.480	7.402	41.806
6	1.370	6.848	48.654
7	1.369	6.845	55.499
8	0.922	4.609	60.108
9	0.808	4.040	64.149

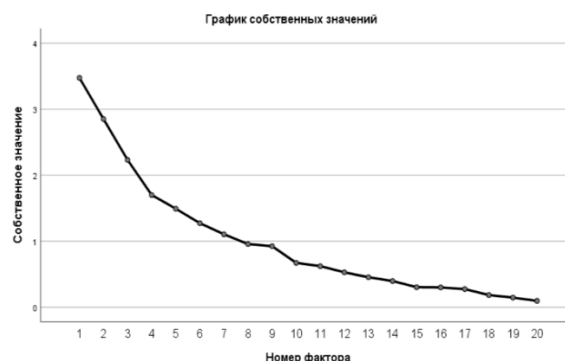


Рисунок 1 - График каменной осыпи для выборки  $F_0$

Для выборок  $R_0$  и  $L_0$  было выделено по 9 факторов, для выборок  $R_1$ ,  $L_1$  – по 8 факторов.

В табл. 3 приведены значения суммарной дисперсии для каждой из выборок.

Таблица 3 – Значения суммарной дисперсии

Выборка	Суммарная дисперсия
$R_0$	64.149
$R_1$	64.777
$L_0$	64.673
$L_1$	67.394

После выделения факторной структуры был применен ортогональный метод вращения Варимакс. Цель использования данного метода – получение более простой факторной структуры, при которой минимизируется число переменных с высокими факторными нагрузками.

Таким образом, упрощается процесс интерпретации результатов – нахождения признаков, которые вносят значимый вклад в фактор. Следовательно, и в результате работы алгоритмов классификации.

В табл. 4 представлен фрагмент матрицы факторных нагрузок после вращения для выборки  $R_0$ .



Таблица 4 – Фрагмент матрицы факторных нагрузок после вращения

<b>Матрица факторных нагрузок после вращения</b>									
	Факторный анализ								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
MG005	-0.031	-0.083	0.668	-0.348	0.000	0.066	0.061	-0.110	0.147
MG013	0.117	0.005	0.089	0.011	-0.054	0.828	0.009	-0.014	0.148
MG014	0.157	-0.057	0.976	-0.045	0.007	0.056	-0.048	0.078	0.038
MG015	0.011	-0.182	-0.172	0.819	0.080	0.044	0.094	-0.124	-0.100
MG017	-0.034	0.036	-0.110	0.715	-0.378	-0.036	-0.003	-0.239	0.042
MG018	-0.076	-0.739	0.075	0.092	0.023	-0.011	-0.153	-0.050	-0.021
MG022	0.266	-0.008	-0.005	0.005	-0.026	0.702	-0.012	0.011	-0.036
MG023	0.442	0.266	0.326	0.121	0.052	-0.037	-0.045	-0.023	-0.137
MG024	0.028	0.312	-0.062	-0.241	-0.133	-0.048	-0.101	0.508	0.139
MG026	0.008	-0.062	0.026	-0.167	0.390	0.036	0.058	0.684	0.020
MG027	0.086	0.860	-0.007	-0.021	-0.011	-0.006	0.180	0.033	0.084
MG035	0.009	0.073	0.022	0.015	0.075	-0.013	-0.108	0.076	0.355
MG050	-0.044	-0.007	0.021	0.184	-0.779	-0.004	0.196	0.101	-0.150
MG051	-0.109	-0.141	0.044	-0.150	0.163	0.041	-0.706	-0.126	0.360
MG053	0.350	-0.024	0.146	-0.179	0.026	0.295	-0.033	-0.053	0.615
MG058	0.746	0.110	0.091	-0.002	-0.044	0.202	0.300	-0.038	0.016
MG059	-0.067	-0.038	0.021	0.061	0.713	-0.091	-0.007	0.221	0.031
MG060	0.151	0.268	0.021	-0.016	-0.060	0.016	0.800	-0.108	-0.029
MG061	0.695	0.016	0.006	-0.036	-0.017	0.132	0.044	0.005	0.024
MG062	0.797	0.027	-0.002	-0.012	-0.001	0.142	0.014	0.066	0.212

После получения итоговых матриц было выполнено отсеивание факторных нагрузок ниже 0.5, как незначимых.

После этого было проведено сравнение значений последних для обоих алгоритмов классификации.

Данные сравнения выборок приведены в табл. 5 и в табл. 6.

При интерпретации вычисленных факторных нагрузок было выявлено:

– при сравнении двух выборок  $R_0$  и  $L_0$  все значимые признаки совпали, значения факторных нагрузок практически идентичны; признаки, которые значимо влияют только на результат дерева решений или логистической регрессии отсутствуют;

– при сравнении двух выборок  $R_1$  и  $L_1$  можно заметить, что, наоборот, совпадающих признаков по факторам практически нет; при сравнении факторных нагрузок большинство значений различаются минимум на 0.1 - 0.3.

Таблица 5 - Сравнение выборок  $R_0$  и  $L_0$

Признак	Номер фактора	$R_0$	$L_0$
		Факторная нагрузка	Факторная нагрузка
MG005	3	0.668	0.668
MG013	6	0.828	0.818
MG014	3	0.976	0.974
MG015	4	0.819	0.842
MG017	4	0.715	0.683
MG018	2	-0.739	-0.747
MG022	6	0.702	0.718
MG023	1	0.442	0.427
MG024	8	0.508	0.462
MG026	8	0.684	0.726
MG027	2	0.860	0.856
MG035	9	0.355	0.350
MG050	5	-0.779	0.792
MG051	7	-0.706	-0.661
MG053	9	0.615	0.657
MG058	1	0.746	0.741
MG059	5	0.713	0.688
MG060	7	0.800	0.817
MG061	1	0.695	0.688
MG062	1	0.797	0.792

Таблица 6 - Сравнение выборок  $R_1$  и  $L_1$

Признак	Номер фактора	$R_1$	$L_1$
		Факторная нагрузка	Факторная нагрузка
MG004	2	0.706	0.079
	3	-0.008	0.818
MG013	2	0.906	0.022
	3	-0.003	0.784
MG014	6	-0.025	0.818
	7	0.630	-0.028
MG015	5	-0.562	-0.564
MG017	2	-0.101	-0.647
	4	-0.748	-0.003
MG022	1	0.588	0.399
	8	-0.250	0.699
MG023	6	0.010	0.536
	7	0.710	0.167
MG024	5	0.861	0.831
MG025	1	0.811	-
MG026	2	-0.033	0.600
	4	0.668	0.004
MG027	7	-0.056	0.532
MG033	4	0.040	0.837
	6	0.709	0.020
MG035	4	0.095	0.833
	6	0.910	-0.075
MG050	2	-0.068	-0.700
	4	-0.543	0.003
	8	-0.516	0.076
MG051	3	-0.718	-
MG053	1	0.449	0.561
	3	-0.200	0.529
MG057	1	0.788	-
MG058	1	0.778	0.627
MG059	2	-0.022	0.710
	4	0.563	0.143
MG060	3	0.916	0.009
	7	0.097	0.834
MG062	1	0.825	0.901

### Выводы

Представляет интерес полученный результат по факторам, влияющим на правильность классификации. Оказалось, что факторные нагрузки по отобраным факторам практически идентичны для обоих методов классификации.

В качестве причины такого явления можно указать гипотезу о том, что факторы, влияющие на правильность, обусловлены не моделью классификатора, а информационной моделью, согласно которой порождены исходные данные.

Для выборок с ошибочными результатами почти все факторные нагрузки различны.

В совокупности это говорит о том, что классификаторы, в целом, опираются на верную информационную модель, а ошибки алгоритмов классификации обусловлены ошибками математической модели классификатора.

Исходя из этого можно сказать о возможности улучшения классификаторов путем изменения математической модели в том направлении, которое обеспечит более значимую роль тех признаков, которые послужат проводниками особенностей информационной модели исходных данных в математическую модель классификатора.

### Литература

1. Vesnin, S. Modern Microwave Thermometry for Breast Cancer / S. Vesnin, A. K. Turnbull, J. M. Dixon, I. Goryanin // Journal of Molecular Imaging & Dynamics, 2017. - Vol. 7. Is. 2. DOI: 10.4172/2155-9937.1000136.
2. Polyakov, M.V. Application of computer simulation results and machine learning in the analysis of microwave radiothermometry data / M. V. Polyakov, I. E. Popov, A. G. Losev, A. V. Khoperskov // Математическая физика и компьютерное моделирование, 2021. - Т. 24. - № 2. - С. 27-37.
3. Замечник, Т. В. Управляемый классификатор в диагностике рака молочной железы по данным микроволновой радиотермометрии / Т. В. Замечник, А. Г. Лосев, А. Ю. Петренко // Математическая физика и компьютерное моделирование, 2019. - Т. 22. - № 3. - С. 53-67.
4. Зенович, А. В. Алгоритмы формирования двумерных признаков диагностики заболеваний молочных желез методами комбинированной радиотермометрии / А. В. Зенович, Н. А. Батулин, Д. А. Медведев, А. Ю. Петренко // Математическая физика и компьютерное моделирование, 2018.- Т. 21. - № 4. - С. 44-56.
5. Lashkari, A., Pak, F., Firouzmand, M. Full Intelligent Cancer Classification of Thermal Breast Images to Assist Physician in Clinical Diagnostic Applications // J Med Signals Sens, 2016. - Vol. 1. - No. 6. - PP. 12-24.
6. Лосев, А. Г. Интеллектуальный анализ данных микроволновой радиотермометрии в диагностике рака молочной железы / А. Г. Лосев, В. В. Левшинский // Математическая физика и компьютерное моделирование, 2017. - Т. 20. - № 5. - С. 49-62.
7. Germashev, I. Fuzzy Inference of the effectiveness factors of the computational model for the diagnosis of the breast cancer / I. Germashev, V. Dubovskaya, A. Losev, I. Popov // 2021 3rd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA), 2021. - PP. 528-533.
8. Окунь, Я. Факторный анализ. Перевод с польского Г. З. Давидовича. - М., 1974.

9. Гермашев, И. В. Факторный анализ влияния признаков на точность диагностики рака молочной железы по данным микроволновой радиотермометрии / И. В. Гермашев, В. И. Дубовская, А. Г. Лосев, И. Е. Попов // Прикаспийский журнал: управление и высокие технологии, 2022. - №1. - С. 139-148.

10. Гермашев, И. В. Модель иерархии признаков в диагностике рака молочной железы по данным микроволновой радиотермометрии / И. В. Гермашев, В. И. Дубовская, А. Г. Лосев // Математические методы в технологиях и технике, 2021. - № 6. - С. 78 - 83.

*Дубовская В. И., Брыжина К. А. Факторный анализ данных в задаче диагностики рака молочной железы. Данная работа посвящена вопросу использования факторного анализа данных в рамках задачи диагностики рака молочной железы. В статье анализируются возможности применения данного многомерного статистического метода с целью установления влияния диагностических признаков на результат работы классификатора. Проведен вычислительный эксперимент. в ходе которого использовались два классификатора: на основе логистической регрессии и на основе случайного леса. Эксперимент показал, что для одной и той же обучающей выборки структура факторной нагрузки для этих методов совпадает только для тех факторов, которые способствуют правильному результату.*

**Ключевые слова:** факторный анализ, диагностика рака молочной железы, логистическая регрессия, случайный лес, структура факторной нагрузки

*Dubovskaya V. I., Bryzhina K. A. Factor analysis of data in the problem of diagnosing breast cancer. This work is devoted to the issue of using factorial data analysis in the framework of the task of diagnosing breast cancer. The article analyzes the possibilities of using this multivariate statistical method in order to establish the influence of diagnostic features on the result of the classifier. A computational experiment was carried out, during which two classifiers were used: based on logistic regression and based on a random forest. The experiment showed that for the same training sample, the structure of the factor load for these methods is the same only for those factors that contribute to the correct result.*

**Key words:** factor analysis, breast cancer diagnostics, logistic regression, random forest, factor loading structure.

Статья поступила в редакцию 25.05.2022  
Рекомендуется к публикации профессором Федяевым О. И.

## **Короткие сообщения**

## АНАЛИЗ МЕТОДА ОТКАЗОУСТОЙЧИВОЙ ИНТЕГРАЦИИ АБСТРАКТНЫХ ОЦЕНОК ДАТЧИКОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДЕКОМПОЗИЦИИ С НЕСКОЛЬКИМИ РЕШЕНИЯМИ

С. В. Иваница, Д. Д. Иванников  
Донецкий национальный технический университет  
E-mail: [neonomontig@gmail.com](mailto:neonomontig@gmail.com)

### **Аннотация**

*В данной статье рассмотрен метод применения идеи мультирешения к задаче отказоустойчивого интегрирования абстрактных оценок датчиков, когда число датчиков очень мало, а большое количество неисправностей датчиков незначительно. Приведен в пример оптимальный алгоритм  $O(N \log N)$ , где  $N$  - общее количество датчиков, который эффективно реализует эту идею.*

### **Введение**

Проблема распределенной обработки датчиков в контексте распределенных сенсорных сетей включает в себя проблему отказоустойчивой интеграции информации от нескольких датчиков.

Методы интеграции отказоустойчивых датчиков должны быть надежными в том смысле, что даже если некоторые из датчиков неисправны, интегрированный выходной сигнал все равно должен быть надежным. В этой статье рассмотрен метод интеграции датчиков с использованием способов декомпозиции, с несколькими разрешениями. Декомпозиция с несколькими разрешениями - это изображение декомпозиция в частотных каналах с постоянной полосой пропускания в логарифмическом масштабе. Преобразования с несколькими разрешениями были в центре внимания обширных исследований после работы Розенфельда и Терстона [1] по обнаружению многомасштабных краев. Детали изображения характеризуют различные типы физических объектов в разных масштабах. В то время как при грубом разрешении можно различить грубые формы крупных объектов на изображении, точные контуры, текстуры и мелкие детали можно различить при последовательно более высоких разрешениях. Мультиразрешение представления предлагают простую иерархическую структуру для интерпретации информации об изображении. Аппроксимация сигнала  $f$  с разрешением  $r$  определяется как оценка, полученная путем равномерной выборки  $f$ ,  $r$  раз на единицу длины. Танимото и Павлидис [2] разработали эффективные алгоритмы для вычисления аппроксимации функции при различных разрешениях. В этой статье обозначен метод применения идеи мультирешения к проблеме отказоустойчивой интеграции

абстрактной оценки датчиков, когда в огромном количестве датчиков большинство датчиков отключаются вручную. Идея, по сути, состоит в построении простой функции из выходных данных датчиков в кластере и разрешении этой функции в различных последовательно более мелких масштабах, чтобы изолировать область, над которой расположены правильные датчики. Приведен оптимальный алгоритм, который эффективно реализует эту идею.

### **Суть метода**

Распределенная сенсорная сеть состоит из пространственно-распределенных датчиков, которые обнаруживают и количественно оценивают определенное явление по его изменяющимся параметрам. Показания датчиков отправляются через регулярные промежутки времени в блоки обработки, которые объединяют эти показания и выдают выходные данные, природа которых во многом совпадает с входными данными датчиков. Выходные данные процессоров, представляющих кластеры датчиков, позже интегрируются, чтобы получить полную картину пространственно-распределенного явления. Однако, прежде чем интеграция будет выполнена на уровне процессора необходимо иметь надежные оценки для каждого процессора. Каждый датчик в кластере измеряет один и тот же параметр. Возможно, что некоторые из этих датчиков неисправны. Следовательно, желательно использовать эту избыточность показаний в кластере для получения правильной оценки считываемых параметров. Короче говоря, требуется отказоустойчивый метод интеграции датчиков для получения правильной оценки.

Манулло [3] рассмотрел проблему отказоустойчивого интегрирования абстрактных

интервальных оценок и обобщил его оценки для многомерных датчиков [4].

Чтобы получить метод отказоустойчивой интеграции датчиков для динамических приложений реального времени, была проанализирована функция перекрытия, которая введена в [5], используя методы декомпозиции с несколькими разрешениями. Этот подход будет описан в общих чертах для абстрактных интервальных оценок для большей ясности. Тем не менее, предлагаемая методология легко и плодотворно обобщается на выходные данные датчиков более высокой размерности.

Стоит выделить некоторые определения и обозначения из статьи [5], которые здесь уместны:

Определение 1: Абстрактный датчик - это датчик, который считывает физический параметр и выдает абстрактную интервальную оценку  $I$ , который является ограниченным и связанным подмножеством вещественной прямой  $R$ .  
Определение 2: Правильный датчик - это абстрактный датчик, в котором оценка интервала содержит фактическое значение измеряемого параметра. Если оценка интервала не содержит фактического значения измеряемого параметра, это называется неисправным датчиком.

Определение 3: Пусть датчики  $S_1, \dots, S_n$ , поступают в процессор  $P$ . Пусть абстрактная интервальная оценка  $S_j$ ;  $(I_j S_n)$ , замкнутый интервал  $[a_j, b_j]$  с конечными точками  $a_j$  и  $b_j$ .  
Определите

Характеристическая функция  $x_j$   $j$ -го датчика  $S_j$ ,  $1 \leq j \leq n$  следующим образом:

$$x_j(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in I_j \\ 0 & \forall x \notin I_j \end{cases} \quad \forall 1 \leq j \leq n.$$

Определение 4: Пусть  $O(x) = \sum_{j=1}^n x_j(x)$  «функция перекрытия»  $n$  абстрактных датчиков. Для каждого  $x \in R$ ,  $O(x)$  задает количество интервалов датчиков, в которых находится  $x$ , или количество интервалов, перекрывающихся в точке  $x$ .  
Определение 5: Датчик является явно неисправным, если это неисправный датчик и если он перекрывается с правильным датчиком.

А некоторые замечания по ручным ошибкам и предыдущей работе. Если один из  $n$  датчиков неисправен, то, принимая  $(n-f)$  пересечений оценок интервалов  $n$  датчиков, с уверенностью можно сказать, что правильное значение параметра находится в одном из этих  $(n-f)$  пересечений.

Когда количество датчиков велико и количество неисправностей не может быть строго ограничено, пересечения  $(n-f)$  могут иметь тенденцию быть сильно разбросаны по реальной линии, что дает плохие оценки выходных данных. Чтобы улучшить оценку выходных

данных в этих случаях, необходимо иметь возможность дополнительно оценить  $(n-f)$  пересечений, чтобы выбрать "наилучшее возможное" пересечение, которое содержит правильное значение с высокой надежностью.

В рассматриваемом методе количество датчиков очень велико, что большинство неисправностей являются ручными, и то есть нет никаких ограничений на количество ошибок. Фактически, количеству неисправностей разрешено меняться в зависимости от выборки показаний датчиков.

Поскольку датчики отбираются синхронно через различные промежутки времени, упорядочив датчики, помечая их, динамически осуществляется поддержка их функции перекрытия  $O(x)$  и анализ ее в различных масштабах, для получения последовательно меньших областей, которые содержат правильное значение наблюдаемого параметра.

В предыдущей работе [5] производилась оценка каждого  $(n-f)$  пересечения, путем суммирования популяций всех интервалов, участвующие в этом  $(n-f)$  пересечении и использующие это в качестве меры этого  $(n-f)$  пересечения.

Популярность каждой интервальной оценки - это количество перекрывающихся с ней интервалов. Обоснование этой оценки основано на наблюдении, что явно неисправные датчики будут находиться близко к правильному значению, тем самым перекрываясь с правильными датчиками пересечения  $(i-f)$ , способствуя его надежности.

С другой стороны, дикие ошибки были бы некоррелированы с каким-либо значением на реальной линии распределяются случайным образом по реальной линии и вносят свой вклад в "шум", а также образуют меньшие, менее заметные кластеры.

Вычисление достоверности пересечений  $(n-f)$  является трудоемким с точки зрения вычислений и ограничивает приложения в реальном времени.

Однако закономерность рассеивания явно ошибочных интервалов можно наблюдать, изучая функцию перекрытия  $O(x)$  в разных масштабах. Области, где  $O(x)$  максимальны, представляют интерес, поскольку они содержатся в  $(n-f)$  пересечениях для каждого  $f$ . Следовательно, правильное значение лежит в этих областях с очень высокой вероятностью.

Однако могут быть несколько пространственно-разделенных максимальных пересечений, некоторые из них вызваны пересечениями сильно неисправных датчиков. В этом случае необходимо изучить разбросы гребней, содержащих максимальные пересечения.

## Выводы

Большой разброс указывает на сильную кластеризацию датчиков, указывая на ручные неисправности и, следовательно, вероятно, на "правильное" максимальное пересечение. Однако этот анализ одновременного выбора гребней с большими амплитудами и широкими разбросами не может быть выполнен на  $O(x)$  непосредственно.  $O(x)$  имеет особенности в нескольких масштабах. Следовательно, грубая обработка информации может быть выполнена быстро. Более мелкие детали характеризуются большим количеством выборок, но предварительная информация, полученная из контекста, конструируется и, таким образом, ускоряет вычисления.

При использовании стратегии "от грубого к точному" обрабатывается минимальное количество деталей, необходимых для выполнения задачи распознавания. Начиная с самого грубого разрешения, выбраны те гребни с самыми высокими пиками и выбираем из этих гребней тот, который имеет самый широкий разброс. При следующем самом высоком разрешении этот гребень снова проверяется на наличие в нем гребней с наибольшими амплитудами, и среди этих гребней тот, который

имеет самый широкий разброс, сохраняется для более точного анализа при следующем разрешении.

## Литература

1. Fault-Tolerant Integration of Abstract Sensor Estimates Using Multiresolution Decomposition' / L. Prasad, S.S. Iyengar, R. Rao Department of Computer Science Louisiana State University R.L. Kashyap School of Electrical Engineering Purdue University, 1994.
2. Rosenfeld and Thurston. Edge and Curve Detection for Visual Scene Analysis // IEEE Trans. Computing, 1971. - Vol. C-20. - PP. 562-569.
3. Tanimoto and Pavlidis. A Hierarchical Data Structure for Image Processing // Computer Graphics Image Processing, 1975. - Vol. 4. - PP. 104-119.
4. Marzullo, K. Tolerating Failures of Continuous-Valued Sensors // ACM Trans. on Computer Systems, 1990. - Vol. 8, No. 4. - PP. 284-304.
5. Chew, P. Masking Failures of Multidimensional Sensor / P. Chew, K. Marzullo // Proceedings of the 10th Symposium on Distributed Systems, Pisa, Italy, Oct. 1991.

*Иваница С.В., Иванников Д.Д. Анализ метода отказоустойчивой интеграции абстрактных оценок датчиков с использованием декомпозиции с несколькими решениями. В данной статье рассмотрен метод применения идеи мультирешения к задаче отказоустойчивого интегрирования абстрактных оценок датчиков, когда число датчиков очень мало, а большое количество неисправностей датчиков незначительно. Приведен в пример оптимальный алгоритм  $O(N\log N)$ , где  $N$  - общее количество датчиков, которые эффективно реализует эту идею.*

**Ключевые слова:** метод, отказоустойчивость, датчик, декомпозиция, алгоритм.

*Ivanitsa S.V., Ivannikov D.D. Analysis of the method of fault-tolerant integration of abstract estimates of sensors using decomposition with multiple solutions. This article proposes a method for applying the idea of a multi-solution to the problem of fault-tolerant integration of abstract sensor estimates when the number of sensors is very small and the large number of sensor faults is negligible. We present an optimal  $O(N\log N)$  algorithm, where  $N$  is the total number of sensors, that effectively implements this idea.*

**Key words:** method, fault tolerance, sensor, decomposition, algorithm.

Статья поступила в редакцию 12.05.2022  
Рекомендуется к публикации профессором Аноприенко А.Я.

УДК 517.5:004.021

## Влияние цифровой экономики на киберпреступность

В. В. Бондаренко  
Донецкий национальный технический университет  
[vadimbond.2000@gmail.com](mailto:vadimbond.2000@gmail.com)

### *Аннотация.*

*В статье анализируются подходы к определению понятия «цифровая экономика», исследуется ее взаимосвязь с развитием преступности в киберпространстве. На основе статистических данных автором изложен ряд уголовно-правовых деяний с использованием ИКТ, которые являются доминирующими и, соответственно, приобрели особую актуальность в настоящее время. Также раскрывается механизм совершения некоторых из них. Предложен комплекс мер, направленных на эффективное противодействие киберпреступности.*

### **Введение в цифровую экономику**

«Те страны, которые первыми войдут в информационное общество, приобретут величайшие преимущества: они будут определять условия для тех, кто будет следовать за ними»: - Мартин Бангеманн.

В настоящее время, проблема становления и развития цифровой экономики является актуальной не только в теоретической, но и в практической плоскости, в том числе и на государственном уровне, в связи с пониманием решающей роли цифровых технологий в становлении стратегической конкурентоспособности страны.

Интерес к цифровой экономике обусловлен тем, что исследования ученых, международных организаций, показывают, что информационные технологии приобретают всё большую важность в экономическом развитии всех стран мира без исключения.

Цифровая экономика — понятие многогранное. Существует немало подходов к содержанию данной дефиниции.

По мнению А. Энговатовой - это экономика, основанная на новых методах генерирования, обработки, хранения, передачи данных, а также цифровых компьютерных технологиях [1].

Интересна и точка зрения Юдиной Т. Н., которая раскрывает цифровую экономику как результат трансформационных эффектов новых технологий общего назначения в области информации и коммуникации, которые влияют на все секторы экономики и социальной деятельности [2].

Исследовательский центр журнала Economist и компания IBM отметили важную характеристику такой экономики — способность предоставить высококачественную ИКТ-инфраструктуру и мобилизовать возможности

ИКТ на благо потребителей, бизнеса и государства.

Приведенные точки зрения отражают, что такая экономика всегда тесно сопряжена с научными достижениями и уровнем развития информационной инфраструктуры, так как их возможности используются во всех сферах жизни общества.

### **Киберпреступность**

Как следствие, одной из современных тенденций развития мировой экономики является активизация экономической преступной деятельности, но не в традиционном её понимании. Процесс глобализации, помимо многих положительных тенденций, имеет и ряд негативных черт. Экономическая преступность превратилась в одну из наиболее важных проблем, стоящих перед обществом, оказывая деструктивное воздействие как на экономику отдельных государств, так и на развитие мировой экономики. В её состав входит самая прогрессивная, динамичная и научно подкованная разновидность преступности — киберпреступность, ставшая негативным последствием развития информационных технологий. Компьютеры и телекоммуникационные системы, Всемирная сеть Интернет, ставшие неотъемлемыми атрибутами жизнедеятельности современного человека, сформировали новую разновидность экономической преступности.

Киберпреступность — это следствие глобализации информационно-коммуникационных технологий и появления международных компьютерных сетей [3]. Стоит отметить, что любые информационные и технические новшества значительно расширяют сферу киберпреступности и создают условия для повышения эффективности её осуществления.



Такие новации изучаются и модернизируются под определенный вид преступной деятельности, что непременно ведет к усложнению расследования таких дел, ввиду необходимости своевременного правового и технического реагирования со стороны государства на подобные деяния.

Важно отметить, что киберпреступления относительно ненаказуемы и при их высокой доходности считаются привлекательным видом деятельности. Такие преступления зачастую носят трансграничный характер, что дает возможность для совершения хищений и обналичивания денег в диаметрально противоположных местах. Очевидность преступных действий не всегда явная, ибо они могут быть абсолютно скрытыми, и пострадавшая сторона узнает об этом через длительный промежуток времени. Благодаря предварительно внедренному программному обеспечению, преступники могут использовать при осуществлении своих действий внушительное количество компьютеров. Определение места нахождения преступника, факт совершения преступных действий, сбор доказательственной базы являются затруднительными для правоохранительных органов, осуществления ими процессуальных действий.

В 2018 году за период с января по декабрь 2018 г. зарегистрировано 174674 преступлений с использованием компьютерных и телекоммуникационных технологий, а выявлено лишь 43362 [4]. Статистика свидетельствует о низкой раскрываемости, ввиду технической сложности таких деяний.

Активное внедрение информационных и телекоммуникационных технологий в экономику обострило проблемы охраны персональных данных, коммерческой, корпоративной и банковской тайны. В структуре преступлений экономической направленности значительно преобладают деяния в финансово-кредитной сфере.

### **Банковские кражи**

Group-IB, международная компания, специализирующейся на предотвращении кибератак, проанализировала высокотехнологичные преступления 2018 года, к реагированию на которые привлекались ее эксперты-киберкриминалисты.

По данным исследования, основная масса хакерских атак пришлась на финансовый сектор, при этом 74 % банков оказались не готовы к кибератакам, у 29 % были обнаружены активные заражения вредоносными программами, а в 52 % случаев выявлены следы совершения атак в прошлом. По данным исследования Group-IB, на банки пришлось порядка 70 % хакерской

активности в прошлом году. Схемы для обналичивания денежных средств хакерами остались прежними: через заранее открытые банковские карты, счета юридических фирм-однодневок, платежные системы, банкоматы и сим-карты. При этом скорость обналичивания выросла в несколько раз: если 3 года назад вывод суммы в 200 млн руб., в среднем, занимал около 25–30 часов, то в 2018-м году компания столкнулась с прецедентом, когда такая же сумма была обналичена менее чем за 15 минут единовременно, в разных городах России [5].

Банк, чья инфраструктура оказалась взломанной, может не просто потерять денежные средства, но и стать угрозой для других участников финансового рынка. Получив контроль над системами банка, преступники заинтересованы не только в выводе денег из него, но и в заражении максимального количества новых жертв. Для этой цели запускается «принцип домино» — вредоносная рассылка идет по спискам компаний-партнеров банка. Такой вектор опасен, прежде всего тем, что письма отправляются из реального банка, то есть отправитель не подделан, а это повышает вероятность их открытия в банке-партнере и пополнения числа жертв.

Главной тенденцией того года стало, что грань между киберпреступлениями и другими видами преступной деятельности постепенно размывается. Большая часть инцидентов связана не непосредственно с кражей денег, а только с похищением различной информации, что свидетельствует о том, что взлом компьютерных систем может являться лишь подготовительным этапом в будущих крупных мошеннических схемах или инструментом в кибервойне. Украденные сведения могут быть использованы как против частных лиц, к примеру, для оформления кредитов на чужое имя, получения бесплатных медицинских услуг или дорогостоящих медикаментов, так и против организаций и даже государств — например, с целью присвоения чужих технологий и разработок.

В докладе от Positive Technologies, международная компания, специализирующаяся на разработке программного обеспечения в области информационной безопасности, отмечается, что растет доля атак, направленных на кражу информации. Злоумышленники похищают преимущественно персональные данные (30 %), учетные данные (24 %) и данные платежных карт (14 %). Кроме банковской сферы, внимание преступников привлекли медицинские учреждения в США и Европе: по количеству атак они опередили даже финансовые организации. Хакеров интересует как медицинская информация, так и возможность получить выкуп за восстановление

работоспособности компьютерных систем: медучреждения легче соглашаются заплатить хакерам, поскольку от этого могут зависеть жизнь и здоровье людей. Например, из-за действий хакеров была парализована работа компьютерных систем в американской больнице Hancock Regional, руководство которой решило заплатить вымогателям 55 тысяч долларов) [6].

### **Схема кражи с банковских карт**

Нет оснований отрицать, что электронными средствами платежа, в том числе и платежными картами, сейчас пользуются огромное количество человек по всей планете, и теоретически каждый из них может стать жертвой мошенников. Ведь с появлением пластиковых карт появились и специальные устройства, с помощью которых стало возможным получение наличных денег без траты времени на очереди в кассу банка — это банкоматы. При помощи соответствующих идентификаторов определяется ее держатель карты, а при совершении покупок или снятия денег в банкомате деньги списываются со счета держателя карты. Чтобы мошенникам получить доступ к банковскому счету потерпевшего и завладеть его денежными средствами, необходимо получить реквизиты его банковской карты.

С целью получения доступа к идентификаторам, закрепленным на карте, были придуманы специальные считывающие устройства «скиммеры», которые устанавливаются на банкоматы, а способ совершения кражи денег при их помощи получил название «скимминг». Эти устройства устанавливаются перед гнездом, куда вставляется банковская карта, и считывают информацию с магнитной полосы, а также защитного кода на оборотной стороне карты. Также злоумышленникам необходимо завладеть и пин-кодом, который держатель карты вводит перед осуществлением банковских операций с целью идентификации своей личности как держателя карты. Для кражи пин-кода обычно используется маленькая видео камера, которая крепится к банкомату и снимает, как ничего не подозревающие люди, вводя пин-код, дают злоумышленникам ключ от своего счета в банке. После получения всех необходимых данных карты изготавливается ее дубликат, и злоумышленники снимают деньги жертвы в банкомате.

### **Интернет-банкинг**

Тем не менее, с развитием сети Интернет и для удобства предоставления банковских услуг клиентам стал широко применяться интернет-банкинг. Интернет-банкинг — это общее

название технологий дистанционного банковского обслуживания, а также доступ к счетам и операциям (по ним), предоставляющийся в любое время и с любого компьютера, имеющего доступ в интернет. Для того чтобы получить доступ к дистанционному банковскому обслуживанию посредством интернет-банкинга, пользователю необходимо идентифицировать себя при помощи логина и пароля. Для завладения конфиденциальными данными пользователя мошенниками используется «фишинг», который широко распространен для кражи логинов и паролей от аккаунтов страниц в социальных сетях, аккаунтов электронной почты и т. д. В нашем случае происходит создание сайта, внешне неотличимого от настоящего сайта банка. При попадании на фальшивый сайт ничего не подозревающий пользователь вводит свой логин и пароль в предусмотренные для этого поля, после чего мошенники получают доступ к конфиденциальной информации пользователя и, соответственно, — к его счетам.

### **Заключение**

Усовершенствование технологических разработок, связанных с расширением информационных технологий и автоматизацией деятельности во многих сферах жизнедеятельности, в том числе финансово-кредитной сфере, имеет, несомненно, приоритетное значение. С другой стороны, прогресс в IT-технологиях повлек за собой умышленное злоупотребление этими технологическими достижениями, создавая целый ряд проблем и рисков для отдельных лиц и групп, стран, а также для мирового общества в целом.

Исходя из этого, полагаем, что необходима реализация комплекса мер, направленных на эффективное противодействие киберпреступности, среди которых позволительно выделить следующие:

Основываясь на обобщении и учете зарубежного опыта стран с развитой цифровой экономикой в сфере противодействия преступности, дальнейшая разработка и внесение изменений в законодательство, регламентирующее виды санкций за правонарушение поведение в киберпространстве;

Техническая поддержка правоохранительных органов, включая регулярное обновление программного обеспечения, криминалистической техники, увеличение числа экспертов в органах безопасности и специализированных подразделениях, занимающихся противодействием киберпреступности;

Принятие мер по усилению межведомственного сотрудничества между

различными структурами информационных технологий для предотвращения риска возникновения кибератак. Сотрудничество должно быть не только на уровне национальной безопасности, но также с международными органами безопасности;

Повышение уровня осведомленности общественности о необходимости надлежащего использования ресурсов в информационных технологиях в связи с киберпреступлениями.

## Литература

1. Newsru.com — новостной портал. URL: <https://www.newsru.com/russia>.

2. Мещеряков, Р. В. Криптографические протоколы в системах с ограниченными

ресурсами / Р. В. Мещеряков [и др.] // Вычислительные технологии, 2007. - № 12.1. - С. 51–61.

3. Юдина Т. Н. Осмысление цифровой экономики / Т. Н. Юдина // Теоретическая экономика, 2016. — № 3. — С. 12–16.

4. Incident Response: итоги года: <https://www.group-ib.ru/blog/incident>.

5. Positive Technologies: Актуальные угрозы, 2018. - URL: <https://www.ptsecurity.com/upload/corporate/ru-ru/analytics/Cybersecurity-threatscape-2018-rus.pdf>

6. <https://cyberleninka.ru/article/v/kibermosh-en-nichestvo-harakteristika-priemy-i-metody-egosoversheniya>.

**Бондаренко В. В. Влияние цифровой экономики на киберпреступность.** В статье анализируются подходы к определению понятия «цифровая экономика», исследуется ее взаимосвязь с развитием преступности в киберпространстве. На основе статистических данных автором изложен ряд уголовно-правовых деяний с использованием ИКТ, которые являются доминирующими и, соответственно, приобрели особую актуальность в настоящее время. Также раскрывается механизм совершения некоторых из них. Предложен комплекс мер, направленных на эффективное противодействие киберпреступности.

**Ключевые слова:** цифровая экономика, информация, компьютер, надежность, киберпреступления.

**Bondarenko V. The impact of the digital economy on cybercrime.** The article analyzes approaches to the definition of the concept of "digital economy", examines its relationship with the development of crime in cyberspace. Based on statistical data, the author presents a number of criminal acts using ICT, which are dominant and, accordingly, have acquired particular relevance at the present time. The mechanism of committing some of them is also revealed. A set of measures aimed at effectively countering cybercrime is proposed.

**Keywords:** digital economy, information, computer, reliability, cybercrime.

Статья поступила в редакцию 12.05.2022  
Рекомендована к публикации профессором Федяевым О. И.

### Об авторах

**Бельков Дмитрий Валерьевич** - кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и искусственного интеллекта факультета интеллектуальных систем и программирования ГОУВПО «Донецкий национальный технический университет».

**Бондаренко Вадим** – магистрант кафедры программной инженерии факультета интеллектуальных систем и программирования ГОУВПО «Донецкий национальный технический университет».

**Добровольский Юрий Николаевич** - старший преподаватель кафедры прикладной математики факультета интеллектуальных систем и программирования ГОУВПО «Донецкий национальный технический университет».

**Дубовская Виктория Игоревна** - ассистент кафедры математического анализа и теории функций Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Волгоградский государственный университет».

**Зензеров Владимир Иванович** - кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики факультета интеллектуальных систем и программирования ГОУВПО «Донецкий национальный технический университет».

**Иваница Сергей Васильевич** - кандидат технических наук, доцент кафедры компьютерной инженерии факультета интеллектуальных систем и программирования ГОУВПО «Донецкий национальный технический университет».

**Иванников Дмитрий Дмитриевич** - инж.- сист. прогр. I категории отдела ТС Центра информационных компьютерных технологий ГОУВПО «Донецкий национальный технический университет».

**Климко Григорий Тимофеевич** – кандидат физико-математических наук, ст.н.с., доцент кафедры компьютерного моделирования и дизайна факультета информационных систем и технологий ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический университет».

**Павлыш Владимир Николаевич** – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры и заведующий кафедрой прикладной математики и искусственного интеллекта факультета интеллектуальных систем и программирования ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический университет», председатель Совета Д 01.024.04 по защите докторских и кандидатских диссертаций, член Совета Д 01.008.01 по защите докторских и кандидатских диссертаций.

**Семёнова Анастасия Павловна** - ассистент кафедры прикладной математики и искусственного интеллекта факультета интеллектуальных систем и программирования ГОУВПО «Донецкий национальный технический университет».

**Стрижко Михаил Александрович** - аспирант, ассистент кафедры автоматике и телекоммуникаций ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет».

**Третьяков Игорь Александрович** – кандидат технических наук, заместитель декана по научной деятельности, доцент кафедры радиофизики и инфокоммуникационных технологий ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет».

**Червинский Владимир Владимирович** - кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры автоматике и телекоммуникаций ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет».

**Требования к статьям,  
направляемым в редакцию научного журнала  
«Информатика и кибернетика»**

Редколлегией принимаются к рассмотрению статьи, в которых рассматриваются важные вопросы в области информатики и кибернетики. Научный журнал издаётся с 2015 года, периодичность издания – 4 раза в год.

В журнале предусмотрены следующие рубрики:

- информатика и вычислительная техника;
- компьютерные и информационные науки;
- инженерное образование.

В соответствии с номенклатурой специальностей научных работников МОН ДНР первые две рубрики соответствуют следующим укрупненным группам специальностей научных работников:

- 05.01 – «Инженерная геометрия и компьютерная графика»,
- 05.13 – «Информатика, вычислительная техника и управление».

С 01.02.2019 Научный журнал включён в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук (приказ МОН ДНР № 135) по группам специальностей 05.01.00 и 05.13.00.

Рубрика «Инженерное образование» предназначена опубликования сотрудниками научно-методических статей.

Журнал также включён в базу данных РИНЦ (Российский индекс научного цитирования) (лицензионный договор № 425-07/2016 от 14.07.2016).

Статьи, представляемые в данный сборник, должны отвечать следующим требованиям. **Содержание статьи** должно быть посвящено актуальным научным проблемам и включать следующие необходимые элементы:

- постановку проблемы в общем виде, её связь с важными научными и практическими задачами;
- анализ последних исследований и публикаций, в которых решается данная задача и на которые опирается автор, выделение нерешенных ранее частей общей проблемы, которым посвящается статья;
- формулировка цели статьи и постановка задач, решаемых в ней;
- изложение основного материала с полным обоснованием полученных научных результатов;
- выводы и перспективы последующих исследований в данном направлении.

Каждый элемент должен быть выделен соответствующим названием раздела, например, «введение», «постановка задачи», «цель и задачи работы», «цель статьи», «цель исследования», «цель разработки», «анализ ... », «сравнительная оценка ... », «разработка ... », «проектирование ... », «программная реализация», «тестирование ... », «полученные результаты», «выводы», «литература». Разделы «введение», «выводы», «литература» являются **обязательными**. Включать в названия разделов нумерацию не разрешается.

В основном тексте статьи формулируются и обосновываются полученные авторами утверждения и результаты. Выводы должны полностью соответствовать содержанию основного текста. Языки публикаций: русский, английский.

**Объём статьи, формат страницы**

Для оформления статьи следует использовать листы формата А4 (210x297 мм) с полями по 2,5 см со всех сторон. Нумерацию страниц выполнять не нужно.

Рекомендуемый объём статьи – 6-12 страниц. Рукописи меньшего объёма могут быть рекомендованы к публикации в качестве коротких сообщений.

Последняя страница текста статьи должна быть заполнена не менее чем на две трети, но содержать не менее трёх пустых строк в конце.

### ***Форматирование текста***

Подготовка статьи осуществляется в текстовом редакторе Microsoft Office Word.

Весь текст статьи оформляется шрифтом Times New Roman 10 пт с одинарным междустрочным интервалом, если ниже в требованиях не сказано иного. Абзацный интервал «перед» – 0 пт, «после» – 0 пт.

На первой строке с выравниванием по левому краю располагается УДК.

Заголовок (название) статьи оформляется шрифтом Times New Roman 14 пт, полужирное начертание, с выравниванием по центру (без абзацных отступов). Заголовок статьи следует печатать с прописной буквы без точки в конце, переносы слов не допускаются. Абзацный интервал «перед» – 12 пт, «после» – 12 пт.

После названия статьи следует информация об авторах, которая выравнивается по центру (без абзацных отступов). На одной строке указываются инициалы и фамилии всех авторов через запятую. Между двумя инициалами ставится пробел. С новой строки указывается название вуза (организации) и город (для каждого автора, если не совпадают). На следующей строке указываются адреса электронной почты (один адрес либо каждого автора – по желанию). Адрес электронной почты оформляется в виде гиперссылки.

К тексту аннотации применяется курсивное начертание, с выравниванием по ширине, отступы слева и справа по 1 см. Заголовок «Аннотация» выделяется полужирным начертанием. Объём аннотации – 450-550 символов (без пробелов). Абзацный интервал «перед» – 12 пт, «после» – 12 пт.

Основной текст статьи разбивается на две колонки шириной по 7,5 см (промежуток между столбцами – 0,99 см), выравнивается по ширине. Абзацный отступ первой строки – 1 см. Автоматический перенос слов не применяется.

Заголовки разделов выполняются шрифтом Arial 10 пт, полужирное курсивное начертание. Абзацный отступ отсутствует, интервал перед абзацем – 12 пт, после абзаца – 6 пт. Для заголовка «Введение» установить интервал «перед» – 0 пт, «после» – 6 пт.

### ***Таблицы в тексте статьи***

Название следует помещать над таблицей с абзацного отступа (1 см) в формате: слово «Таблица», пробел, номер таблицы, пробел, тире, пробел, название таблицы. Название таблицы записывают с прописной буквы без точки в конце строки и выравнивают по ширине. В ячейках таблицы устанавливается выравнивание текста по центру по вертикали. По горизонтали текст выравнивается по центру либо по левому краю. Границы ячеек таблицы должны быть только чёрного цвета, толщина линии – 1 пт. На все таблицы должны быть приведены ссылки в тексте статьи, при ссылке следует писать слово «табл.» с указанием её номера, например, «... данные приведены в табл. 5». Таблицы нумеруются в пределах статьи. Таблица располагается сразу после ссылки на неё, если это возможно (например, после окончания абзаца). Если же таблица не помещается на текущей странице, то она должна быть расположена в начале следующей страницы (или колонки). При необходимости допускается включение в статью таблицы, ширина которой превышает ширину колонки. В этом случае таблица и её название размещаются по центру страницы. Таблица не должна выступать за границы полей страницы. Таблица и её название отделяются от основного текста статьи одной пустой строкой до и после.

### ***Рисунки в статье***

Ссылки на иллюстрации по тексту статьи обязательны и оформляются в виде «... на рис. 2» и т. п. Рисунок и его подпись выравниваются по центру колонки (без абзацных отступов), положение рисунка – «в тексте». Размещается рисунок после его первого упоминания в тексте, если это возможно (например, после окончания абзаца). Если же иллюстрация не помещается на текущей странице, то она должна быть расположена в начале следующей страницы (или колонки). При необходимости допускается включение в статью рисунка, ширина которого превышает ширину колонки. В этом случае рисунок и его подпись выравниваются по центру страницы. Иллюстрация не должна выступать за границы полей страницы. Подпись рисунка оформляется в формате: слово «Рисунок», пробел, номер иллюстрации, пробел, тире, пробел, название рисунка. Название рисунка записывают с прописной буквы без точки в конце строки. Для подписи иллюстрации применяют курсивное

начертание. Иллюстрация и её подпись отделяются от основного текста статьи одной пустой строкой до и после. Не допускается выполнять рисунки с помощью встроенного графического редактора Microsoft Office Word. Если на иллюстрации имеется текст, размер шрифта должен быть не менее чем аналогичный текст, набранный шрифтом Times New Roman 10-го размера. Иллюстрация не должна содержать много незаполненного пространства.

### ***Формулы***

Формулы и уравнения рекомендуется набирать с использованием MathType (предпочтительно) или MS Equation. Формулы и математические символы не должны существенно отличаться по размеру от основного текста. Обязательной является нумерация формул, на которые имеется ссылка в тексте статьи. Ссылки в тексте на порядковые номера формул дают в скобках, например, «... согласно формуле (2)». Формулы размещаются по центру колонки, а их номера – по правому краю. Как для строки с формулой, так и для первой строки пояснений (при наличии), абзацный отступ убирается. Первая строка пояснения начинается со слова «где», после которого следует поставить табуляцию на 1 см, затем само пояснение в формате: символ, подлежащий объяснению, пробел, тире, пробел, поясняющий текст, запятая, обозначение единицы измерения физической величины. Пояснения перечисляются через точку с запятой, выравниваются по ширине. Вторая и последующие строки пояснений начинаются с абзацного отступа (1 см). Весь блок текста, связанный с формулой (только формула, несколько формул подряд или формула с пояснениями), отделяется от основного текста одной пустой строкой до и после. Переносить формулы на следующую строку допускается только на знаках выполняемых операций, причем знак в начале следующей строки повторяют. При переносе формулы на знаке умножения применяют знак «×». Формулы и математические уравнения могут быть записаны в тексте документа, если их высота не превышает высоту строки. При этом следует учитывать, что знаки математических операций отделяются от чисел или символов пробелами с обеих сторон. Например, «Если учесть, что  $y < 0$  и  $2x + y = 1$ , то из формулы (3) можно выразить  $x...$ ». К символам, которые приведены в формуле, при дальнейшем их употреблении (в том числе в пояснениях к формуле) должно применяться курсивное начертание. При этом к любым числам (верхние и нижние индексы, содержащие цифры и т.п.), а также к математическим знакам курсивное начертание не применяется. Не допускается вставлять формулы, выполненные в виде рисунков.

### ***Перечисления: оформление списков***

Основной текст статьи может содержать перечисления, оформленные в виде маркированного списка. В качестве маркера элемента списка разрешается использовать только короткое тире «–». Каждый элемент перечисления записывается с новой строки с абзацного отступа, равного 1 см. После символа короткого тире текст располагается с отступом в 1,5 см от левой границы строки, выравнивается по ширине, при переносе на новые строки располагается без отступов. Нумерованные и многоуровневые списки включать в статью не разрешается.

### ***Литература***

В тексте статьи обязательны ссылки на все литературные источники, номер источника указывается в квадратных скобках. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Рекомендуемое количество источников, на которые ссылается автор, не менее 10. Перечень источников приводится в порядке их упоминания в статье. Библиографическое описание каждого литературного источника оформляется в соответствии с ГОСТ Р 7.0.100–2018. Перечень литературных источников оформляется в виде нумерованного списка. В качестве маркеров элементов списка используют порядковые арабские цифры с точкой. Каждый источник представляет собой отдельный элемент перечисления, записывается с новой строки с абзацного отступа, равного 1 см. После порядкового номера с точкой текст располагается с отступом в 1,5 см от левой границы строки, выравнивается по ширине, при переносе на новые строки располагается без отступов.

В конце статьи обязательно приводятся аннотации на русском и английском языках, каждая заканчивается перечнем 5-6 ключевых слов.



К тексту аннотации применяется курсивное начертание, с выравниванием по ширине, отступы слева и справа по 1 см. Слово «Аннотация» опускается. Текст аннотации начинается с ФИО авторов и названия статьи, выделяемых полужирным начертанием. Аннотация на русском языке совпадает с аннотацией, приведенной в начале статьи. В тексте аннотации на английском языке после фамилии автора указывается только первая буква имени с точкой. Абзацный интервал «перед» – 12 пт, «после» – 12 пт. Ключевые слова оформляются с новой строки аналогично тексту аннотации. Заголовок «Ключевые слова:» (англ. «Keywords:») выделяется полужирным начертанием. Ключевые слова перечисляются через запятую.

#### ***Порядок представления статьи и сопроводительные документы***

В редакцию необходимо представить:

- файл с текстом статьи;
- файл, содержащий фамилию, имя и отчество авторов полностью; ученую степень, ученое звание; место работы с полным указанием должности, подразделения и наименования организации, города (страны); номера телефонов и e-mail для связи;
- экспертное заключение о возможности публикации статьи, подписанное руководителем и заверенное печатью организации, в которой работает автор статьи;
- выписка из заседания кафедры или письмо организации с просьбой об опубликовании и указанием, что изложенные в статье результаты ранее не публиковались.

Статьи и сопроводительные документы следует высылать на электронный адрес [infcyb.donntu@yandex.ru](mailto:infcyb.donntu@yandex.ru).

#### ***К сведению авторов***

Если статья оформлена с нарушением указанных выше требований и правил, редакция после предварительного рассмотрения может отклонить статью.

На рецензирование статьи направляются членам редакционной коллегии журнала. Все статьи публикуются при наличии положительной рецензии.

В статью могут быть внесены изменения редакционного характера без согласования с автором. Ответственность за содержание статьи и качество перевода аннотаций несут авторы.

Публикация статей в научном журнале «Информатика и кибернетика» осуществляется на некоммерческой основе.

Все номера Научного журнала размещаются на сайте <http://infcyb.donntu.ru/>.

CONTENT

Informatics and computer engineering

<b>Application of fuzzy logic in intelligent traffic light control systems</b> <i>Strizhko M., Chervinskiy V.</i> .....	5
<b>The procedure for forming a grammar for describing spectrograms of technical channels of information leakage</b> <i>Tretiakov I. A.</i> .....	11
<b>Self-organized criticality in the BML-model of the transport flow</b> <i>Belkov D., Zenzerov V.</i> .....	17
<b>Analysis of emotion recognition methods based on photo images</b> <i>Semenova A.P., Belinskaya M.A., Pavlysh V.N.</i> .....	23

Computer sciences

<b>Theory of generalized functions and their application in practice</b> <i>Dobrovolsky Yu. N.</i> .....	30
<b>On the methods of derivation, the ambiguity of integral relations between spin and charge densities and the consequences of them</b> <i>Klimko G. T.</i> .....	39
<b>Factor analysis of data in the problem of diagnosing breast cancer</b> <i>Dubovskaya V. I., Bryzhina K. A.</i> .....	46

Short messages

<b>Analysis of the method of fault-tolerant integration of abstract estimates of sensors using decomposition with multiple solutions</b> <i>Ivanitsa S.V., Ivannikov D.D.</i> .....	53
<b>The impact of the digital economy on cybercrime</b> <i>Bondarenko V.</i> .....	56

<u>About Authors</u> .....	60
----------------------------	----

<u>Requirements to articles which are sent to the editors office of the scientific journal “Informatics and Cybernetics”</u> .....	62
--	----

Электронное периодическое издание

Научный журнал

ИНФОРМАТИКА И КИБЕРНЕТИКА

(на русском, английском языках)

№ 2 (28) - 2022

Ответственный за выпуск Р. В. Мальчева

Технический редактор Р. В. Мальчева

Компьютерная верстка Р. В. Мальчева

Подписано к выпуску 05.09.2022. Усл. печ. лист. 7,7. Уч.-изд. лист.4,6.  
Адрес редакции: ДНР, 83001, г. Донецк, ул. Артема, 58, ГОУ ВПО «ДонНТУ»,  
4-й учебный корпус, к. 36., ул. Кобозева, 17.  
Тел.: +38 (062) 301-07-35, +38 (071) 334-89-11  
E-mail: infcyb.donntu@yandex.ru, URL: <http://infcyb.donntu.ru>