УДК 004.0- 517.8- 621.3

Рефлексивные булевы функции

А.И. Андрюхин
Донецкий национальный технический университет, г. Донецк,
alexandruckin@ramber.ru

Андрюхин А.И. Рефлексивные булевы функции. *Эта работа относится к фундаментальной проблеме определения базовых примитивов самосознания. Человеческий мозг основываясь на их свойствах, способен самоорганизовываться и адаптироваться во внешней среде. В работе определены классы рефлексивных булевых функций. Выполнена их классификация. Все рефлексивные булевы функции от двух и трех переменных приведены. Также все рефлексивные булевы функции от четырех переменных определены. Показано, что логическая операция импликации принадлежит к классу рефлексивных функций. Результаты компьютерных экспериментов приведены. Программная система Вольфрам Математика использовалась в расчетах.*

Ключевые слова: *рефлексия, булевы функции, самоорганизация, самосознание, мозг*

Введение

Рефлексия – принцип человеческого мышления, направляющий его на осмысление и осознание собственных форм и предпосылок; способствует формированию самосознания, «оборачивая» сознание само на себя. Многие учёные, философы считают, что рефлексия отличает человека от животного, и рассматривают её как универсальный способ анализа самосознания. Так, Тейяр де Шарден усматривал основное различие между человеком и животным в степени развития рефлексии [1]. Представляя самосознание аспектом сознания, Выготский подчеркивал значение рефлексивности как конституирующей характеристики сознания, указывая, что последнее возникает лишь с появлением самосознания. При рассмотрении в своих ранних работах механизмов сознания, Выготский сближал сознание и самосознание.

Важный момент в развитии рефлексии представляет появление вербального отражения собственных процессов и действий, выступающего, по Выготскому, основой для развития самосознания и высших волевых регулирующих механизмов. Он указывал, что переход к словесной интроспекции повторяет в общих чертах аналогичное развитие восприятия внешнего мира – переход от «бессловесного и, следовательно, несмыслового восприятия» к восприятию смысловому, словесному, предметному, т. е. обобщенному. Поэтому и переход к словесной интроспекции не означает ничего другого, кроме начинающегося обобщения внутренних форм активности.

Развитие речевой функции в процессе гоминизации открыло перед центральной нервной системой совершенно новые возможности для формирования рефлексивных, моделирующих и управляющих механизмов. Может быть, самой принципиальной из них оказалась возможность сколь угодно точной рефлексии сколь угодно высокого уровня, достижимой лишь на уровне социума, а не индивидуума [2-4].

Самосознание играет особую роль в процессе получения знания – это знание особого рода. Сократ считал, что главное – это самосознание (духовное самосовершенствование). Согласно взглядам Платона и Аристотеля, самосознание – это атрибут Бога, единство мыслимого и мысли. Выготский обозначал термином «самосознание» следующий этап развития рефлексивных процессов, основанный на понятийном мышлении. Он выделял самосознание как особый, достаточно поздний этап в развитии сознания и личности. Оно понималось им, как более высокий психический синтез, проявляющийся в образовании новых связей между различными функциями – третичных высших функций. Новизна их обусловлена тем, что в их основе лежит рефлексия, отражение собственных процессов в сознании. Это ведёт к перестройке всей структуры сознания человека: его личность начинает участвовать в каждом отдельном акте, опосредовать связи функций между собой. Согласно Выготскому, в то время как психологические системы (включающие внимание, память, мышление и другие функции) строятся на вторичных (по отношению к определяемым конституцией организма) биологических связях, личность (с ее самосознанием, рефлексией, самооценкой) – на особых, третичных связях. Существование этих третичных связей проявляется в том функциональном значении, которое отдельные функции имеют в общей структуре личности (например, сновидение в поведении примитивного человека выполняет ту же функцию, которую в нашем поведении выполняет мышление).

Философский аспект анализа самосознания связан с выявлением его гносеологической сущности, выяснением его соотношения с объективным бытием личности. Осознавая существование мира объектов, того, что находится вне нас, мы отделяем себя от внешнего мира. Там – объект, а здесь – Я. В процессе осознания объекта всегда присутствует скрытая черта – не-Я. Возникает полярное взаимоотношение объекта (не-Я) и субъекта (Я). Принадлежность образов объектов именно моему Я вызывает у человека представление о себе как об особой реальности, противостоящей миру объектов и вместе с тем, отличной от других подобных ему Я.

Выделив свое Я, мы можем смотреть на себя как на нечто самостоятельное по отношению к себе же, т. е. как на объект. Способность к самоотражению своего Я заключает в себе и одно из важнейших оснований объективного исследования самосознания. В том, как личность представляет свое Я, отражается мера ее осознания себя и уровень зрелости личности в целом. Вместе с тем в способности взглянуть на себя, как на нечто иное, и коренятся трудности исследования самосознания, так как «вынесение» личностью себя «вовне» связано с целым рядом субъективных ее особенностей, часто препятствующих созданию объективного представления о своем Я.

При детальном рассмотрении рефлексии и самосознания проявляются их необычные свойства. Так, многие философы указывали, что познающий субъект не может быть объектом собственного опыта, т. е. объектом собственного знания. Знание, опыт направлены на мир внешних объектов, и мы можем знать состояния и отношения физических предметов. Если я познаю объект, то могу ли я одновременно познавать и самого себя, познающего и акт собственного познания? Не приводит ли это к логическому парадоксу, когда высказывание в качестве одного из референтов имеет самого себя? Так, например, мои глаза принципиально не могут видеть самих себя и процесс собственного видения; линзы перископа отображают окружающее, но не могут отобразить самих себя[5].

Фреге в известной работе указал на непринадлежность мысли ни обьектам внешнего мира, ни представлениям внутреннего мира человека[6]. Следовательно, если мышление есть формулирование мысли (суждение-констатация истинности мысли и его выражение-утверждение), отсюда следует, что можно соотнести рефлексии физический процесс, производный от другого базового, в котором основными значениями сигналов являются двоичные. На эту роль в первую очередь можно отнести волны – как элементы, которые в основном переносят энергию, а не вещество.

Человеческая способность представлять мысленно собственные мысли и чувства (т.е.рефлексия) была центральной темой науки, начиная с Джона Локка.

Согласно работам Лефевра, субъект, обладающим рефлексивным сознанием может быть изображен,как миниатюрная человеческая фигура с образ себя внутри его головы . Он же подчеркивает , что судя по всему человеку от рождения даны фундаментальные рефлексивные структуры с двумя рангами рефлексии (субъект чувствует себя и чувствует себя чувствующим себя) и автоматическим механизмом счета.

На наш взгляд, проблема адекватного отражения рефлексии является одной из центральных в ИИ. Однако большинство исследователей ИИ не уделяют ей должного внимания, сосредотачиваясь на попытках воссоздания лишь отдельных процессов, моделирующих различные функции мышления человека. На сегодняшний день можно выделить следующие подходы к этой проблеме, представленные на рис.1[7].

Рисунок 1 – Отражение рефлексии

Первый метод развивается в русле автоэпистемологических рассуждений [8], основой которых является построение дерева альтернативных возможностей, полный перебор вариантов которого или поиск с известными правилами его направленности приводит к требуемому результату. Рассмотрение вопросов, связанных с реализацией системы самодиагностики на дискретном уровне является предметом работы [9]. Сразу отметим характерные черты данного подхода. Т. к. данный подход полностью формален (логический вывод осуществляется на системах булевых уравнений), то ему присущи и типичные ограничения формальных систем. Булева логика часто не позволяет адекватно охарактеризовать объект, так что её применение приводит к разного рода парадоксам, аналогичным парадоксам Ришара, Греллинга, Рассела. Основной причиной этого является т. н. проблема самоприменимости или самоотносимости машин Тьюринга. Т. е. невозможно средствами некоторой формальной системы исследовать её саму или иначе, некая сущность, объект, множество, система не может быть охарактеризована через совокупность, которой она принадлежит.

Второй подход к проблеме связан с отражением рефлексии в непрерывных средах, в частности, в осцилляторной нейронной сети. Отметим следующее: предлагается рассматривать осциллятор, построенный из множества связанных нейронов, как некий «элемент сознания». В этом случае рефлексию можно интерпретировать в терминах колебаний сети связанных осцилляторов как, например, взаимодействие этих осцилляторов в присутствие шума[10].

Данная работа примыкает к известной математико-психологическая модели Лефевра, использующей функцию X1 = F(x1, F(x2, x3))[11].

Функция X2 = F(x2, x3) интерпретируется как образ себя, имеющийся у субъекта. Первая переменная этой функции, представляет перцептивный вход, а второй переменной соответствует ментальный образ себя.

Получен известный результат, что функциональное уравнение

$$\Phi(x1, \Phi(x2, x3)) = x1 + (1 - x1)(1 - x2)x3$$

где x1, x2, x3 числа из [0,1] и все значения Ф(x, y) принадлежат [0,1], имеет единственное решение

$$\Phi(x, y) = 1 - y + xy = F(x, y).$$

По аналогии с этим результатом рассмотрим рефлексивные булевы функции i-ого порядка, которые обладают свойством

$$\Phi(x_1,x_2,..x_{i-1},\ \Phi(x_1,x_2,..x_n),x_{i+1},..,x_n) = \Phi(x_1,x_2,..x_n).$$

Обозначим через $\Phi_{i,j}$ множество рефлексивных булевых функций i-порядка от j переменных. Также обозначим через Φ_j множество рефлексивных булевых функций от j переменных.

Решаемая в статье задача состоит в расширении и построении рефлексивных булевых функций зависящих от 2, 3, 4 и более переменных.

Анализ функции Ф(x, y) = 1 - Y + XY

Существует известное правило перехода от булевых функций с двоичными переменными к непрерывным функциям от действительных переменных, для которых значение функции и переменных находятся в интервале (0,1).

Для этого мы выполняем замену булевых выражений алгебраическими выражениями, согласно $X\vee Y=\mathbf{X+Y-XY}$, $X\wedge Y=\mathbf{XY}$, $\overline{X}=\mathbf{1-X}$, $X\oplus Y=\mathbf{X+Y-2XY}$.

Здесь **X, Y** в правых частях равенств являются положительными действительными переменными не больше 1.

Сопоставим действительным переменным X,Y булевы переменные B и A и получим формулу Ф(B,A) = 1 - A + AB.

Построим таблицу истинности для Ф(B,A) и операции импликации, которую представим в таб.1.

Табл.1.–Таблица истинности Ф(B,A) и импликации

	A	B	Ф(B,A)	$A\to B$
1	F	F	T	T
2	F	T	T	T
3	T	F	F	F
4	T	T	T	T

Следовательно, эта функция представляет собой вещественное расширение логической операции импликации с переменой порядка аргументов.

Рефлексивность мышления и правила МР

Выполним анализ в свете вышеизложенного таких важных операций, как импликацию и правило логического вывода «modus ponens» (МР).

Рассмотрим любые два высказывания A, B. Если составить из этих двух высказываний A, B сложное высказывание, если A, то B, (обозначатся как $A\to B$), то мы определяем логическую операцию импликации и ее таблица истинности имеет вид согласно таб.1.

Заметим, что первые две строчки таблицы (A ложно) иногда интерпретируют как "Из ложного высказывания следует что угодно", что вызывает у части специалистов резкие возражения. Совокупность 2 и 4 строчки таблицы (B истинно) часто формулируют, как "Истинное высказывание следует из чего угодно".

Анализ выражения $A\to B$ приводит к заключению, что в правой части опускают посылку B, т.е. импликация является логической связкой с обратной связью и может быть представлена рис.2. Более того, существование релевантной логики базируется на требовании наличия общих переменных по обе стороны правила логического вывода и следовательно любой логический вывод есть правило с обратной связью.

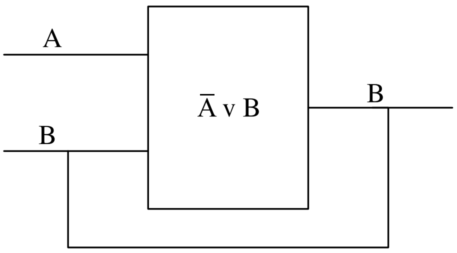

Рисунок 2 – Рефлексивная модель импликации.

Действительно, ¬A∨(¬AVB)= ¬A∨¬AVB= ¬AVB. Аналогичные рассуждения для правила MP приводят к рис.3.

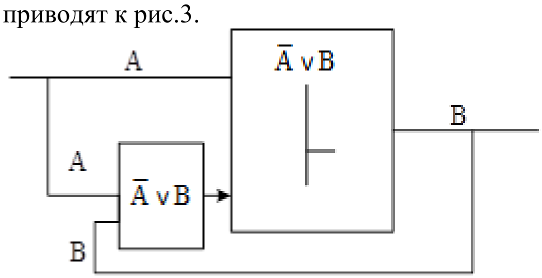

Рисунок 3 – Рефлексивная модель MP.

Следуя этим рисункам можно построить аппаратную реализацию этих схем[12-14].

Рефлексивные булевы функции от двух переменных

Общее число всех булевых функций от n переменных определяется формулой $2^{f(n)}$, где $f(n)=2^n$. Отсюда следует известный результат, что число булевых функций от 2 переменных равно 16, число булевых функций от 3 переменных равно 256, число булевых функций от 4 переменных равно 65536 и т.д.

Для функций от двух пременных мы имеем рефлексивные формы 1 и 2 порядка, представленные на рис.3.

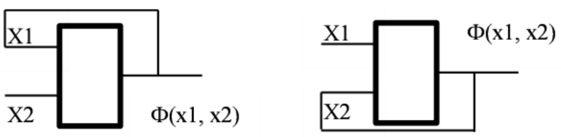

Рисунок 3 – Рефлексивные булевы функции 1 и 2 порядка.

Ниже представлен список из 4 (из общего числа 9) нетривиальных булевых выражений 1-порядка от двух переменных, для которых выполняется соотношение Φ(x1, x2)=Φ(Φ(x1,x2), x2) и в выражении для этих функций присутствуют две переменные x1, x2.

1 4 x1Λ¬x2
2 8 x1Λx2
3 13 x1V¬x2
4 14 x1Vx2

Аналогично мы можем представить список из 4 (из общего числа 9) нетривиальных булевых выражений 2-порядка от двух переменных, для которых выполняется соотношение Φ(x1, x2)=Φ(x1, Φ(x1,x2)) и в выражении для этих функций присутствуют две переменные x1, x2.

1 2 ¬x1Λx2
2 8 x1Λx2
3 11 ¬x1Vx2
4 14 x1Vx2

Второе число в строке описания этих функций и далее в других списках означает их номер в системе Wolfram Mathematica (оператор BooleanFunction).

Пересечением множеств $Φ_{1,2}$ и $Φ_{2,2}$ являются функции x1Vx2 и x1Λx2.

Рефлексивные булевы функции первого порядка от трех переменных

Начиная с этого раздела будем использовать вместо знака отрицания ¬ символ !. На рис.4 редставлена рефлексивная булева функция 1 порядка, так как

Φ(x1, x2,x3)=Φ(Φ(x1,x2, x3),x2, x3).

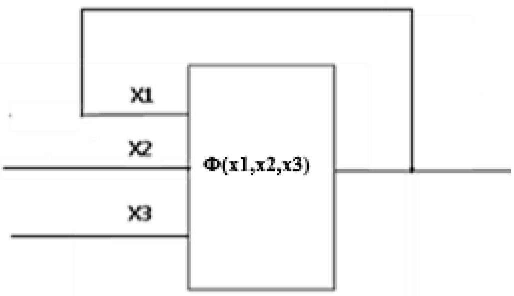

Рисунок 4. –Рефлексивная булева функция от трех переменных 1 порядка

Ниже представлен список из 56 нетривиальных булевых выражений от трех переменных 1 порядка.

1 16 x1 Λ !x2 Λ !x3
2 32 x1 Λ !x2 Λ x3
3 49 (x1 Λ !x2) V (!x2 Λ !x3)
4 50 (x1 Λ !x2) V (!x2 Λ x3)
5 64 x1 Λ x2 Λ !x3
6 81 (x1 Λ !x3) V (!x2 Λ !x3)
7 84 (x1 Λ !x3) V (x2 Λ !x3)
8 96 (x1 Λ x2 Λ !x3) V (x1 Λ !x2 Λ x3)
9 98 (x1 Λ x2 Λ !x3) V (!x2 Λ x3)
10 100 (x1 Λ !x2 Λ x3) V (x2 Λ !x3)
11 112 (x1 Λ !x2) V (x1 Λ !x3)
12 113 (x1 Λ !x2) V (x1 Λ !x3) V (!x2 Λ !x3)
13 114 (x1 Λ !x2) V (x1 Λ !x3) V (!x2 Λ x3)
14 115 (x1 Λ !x3) V !x2
15 116 (x1 Λ !x2) V (x2 Λ !x3)

16 117 (x1 ∧ !x2) ∨ !x3
17 118 (x1 ∧ !x2) ∨ (x2 ∧ !x3) ∨ (!x2 ∧ x3)
18 128 x1 ∧ x2 ∧ x3
19 144 (x1 ∧ x2 ∧ x3) ∨ (x1 ∧ !x2 ∧ !x3)
20 145 (x1 ∧ x2 ∧ x3) ∨ (!x2 ∧ !x3)
21 152 (x1 ∧ !x2 ∧ !x3) ∨ (x2 ∧ x3)
22 162 (x1 ∧ x3) ∨ (!x2 ∧ x3)
23 168 (x1 ∧ x3) ∨ (x2 ∧ x3)
24 176 (x1 ∧ !x2) ∨ (x1 ∧ x3)
25 177 (x1 ∧ !x2) ∨ (x1 ∧ x3) ∨ (!x2 ∧ !x3)
26 178 (x1 ∧ !x2) ∨ (x1 ∧ x3) ∨ (!x2 ∧ x3)
27 179 (x1 ∧ x3) ∨ !x2
28 184 (x1 ∧ !x2) ∨ (x2 ∧ x3)
29 185 (x1 ∧ !x2) ∨ (x2 ∧ x3) ∨ (!x2 ∧ !x3)
30 186 (x1 ∧ !x2) ∨ x3
31 196 (x1 ∧ x2) ∨ (x2 ∧ !x3)
32 200 (x1 ∧ x2) ∨ (x2 ∧ x3)
33 208 (x1 ∧ x2) ∨ (x1 ∧ !x3)
34 209 (x1 ∧ x2) ∨ (!x2 ∧ !x3)
35 212 (x1 ∧ x2) ∨ (x1 ∧ !x3) ∨ (x2 ∧ !x3)
36 213 (x1 ∧ x2) ∨ !x3
37 216 (x1 ∧ x2) ∨ (x1 ∧ !x3) ∨ (x2 ∧ x3)
38 217 (x1 ∧ x2) ∨ (x2 ∧ x3) ∨ (!x2 ∧ !x3)
39 220 (x1 ∧ !x3) ∨ x2
40 224 (x1 ∧ x2) ∨ (x1 ∧ x3)
41 226 (x1 ∧ x2) ∨ (!x2 ∧ x3)
42 228 (x1 ∧ x2) ∨ (x1 ∧ x3) ∨ (x2 ∧ !x3)
43 230 (x1 ∧ x2) ∨ (x2 ∧ !x3) ∨ (!x2 ∧ x3)
44 232 (x1 ∧ x2) ∨ (x1 ∧ x3) ∨ (x2 ∧ x3)
45 234 (x1 ∧ x2) ∨ x3
46 236 (x1 ∧ x3) ∨ x2
47 241 x1 ∨ (!x2 ∧ !x3)
48 242 x1 ∨ (!x2 ∧ x3)
49 244 x1 ∨ (x2 ∧ !x3)
50 246 x1 ∨ (x2 ∧ !x3) ∨ (!x2 ∧ x3)
51 247 x1 ∨ !x2 ∨ !x3
52 248 x1 ∨ (x2 ∧ x3)
53 249 x1 ∨ (x2 ∧ x3) ∨ (!x2 ∧ !x3)
54 251 x1 ∨ !x2 ∨ x3
55 253 x1 ∨ x2 ∨ !x3
56 254 x1 ∨ x2 ∨ x3

Рефлексивные булевы функции второго порядка от трех переменных

На рис.5 представлена рефлексивная булева функция 2 порядка, так как

Ф(x1, x2,x3)=Ф(x1,Ф(x1,x2, x3), x3).

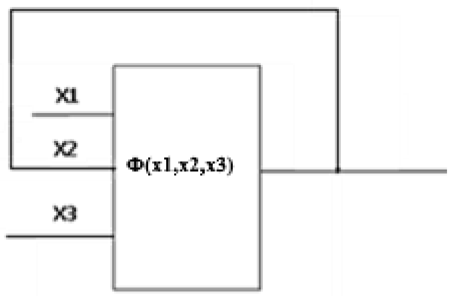

Рисунок 5. –Рефлексивная булева функция от трех переменных 2 порядка

Ниже представлен список из 54 нетривиальных булевых выражений от трех переменных 2 порядка

1 4 !x1 ∧ x2 ∧ !x3
2 8 !x1 ∧ x2 ∧ x3
3 13 (!x1 ∧ x2) ∨ (!x1 ∧ !x3)
4 14 (!x1 ∧ x2) ∨ (!x1 ∧ x3)
5 64 x1 ∧ x2 ∧ !x3
6 69 (!x1 ∧ !x3) ∨ (x2 ∧ !x3)
7 72 (x1 ∧ x2 ∧ !x3) ∨ (!x1 ∧ x2 ∧ x3)
8 74 (x1 ∧ x2 ∧ !x3) ∨ (!x1 ∧ x3)
9 76 (!x1 ∧ x2) ∨ (x2 ∧ !x3)
10 77 (!x1 ∧ x2) ∨ (!x1 ∧ !x3) ∨ (x2 ∧ !x3)
11 78 (!x1 ∧ x2) ∨ (!x1 ∧ x3) ∨ (x2 ∧ !x3)
12 79 !x1 ∨ (x2 ∧ !x3)
13 84 (x1 ∧ !x3) ∨ (x2 ∧ !x3)
14 88 (x1 ∧ !x3) ∨ (!x1 ∧ x2 ∧ x3)
15 92 (x1 ∧ !x3) ∨ (!x1 ∧ x2)
16 93 (!x1 ∧ x2) ∨ !x3
17 128 x1 ∧ x2 ∧ x3
18 132 (x1 ∧ x2 ∧ x3) ∨ (!x1 ∧ x2 ∧ !x3)
19 133 (x1 ∧ x2 ∧ x3) ∨ (!x1 ∧ !x3)
20 138 (!x1 ∧ x3) ∨ (x2 ∧ x3)
21 140 (!x1 ∧ x2) ∨ (x2 ∧ x3)
22 141 (!x1 ∧ x2) ∨ (!x1 ∧ !x3) ∨ (x2 ∧ x3)
23 142 (!x1 ∧ x2) ∨ (!x1 ∧ x3) ∨ (x2 ∧ x3)
24 143 !x1 ∨ (x2 ∧ x3)
25 164 (x1 ∧ x3) ∨ (!x1 ∧ x2 ∧ !x3)
26 168 (x1 ∧ x3) ∨ (x2 ∧ x3)
27 172 (x1 ∧ x3) ∨ (!x1 ∧ x2)
28 174 (!x1 ∧ x2) ∨ x3
29 196 (x1 ∧ x2) ∨ (x2 ∧ !x3)
30 197 (x1 ∧ x2) ∨ (!x1 ∧ !x3)
31 200 (x1 ∧ x2) ∨ (x2 ∧ x3)
32 202 (x1 ∧ x2) ∨ (!x1 ∧ x3)
33 205 (!x1 ∧ !x3) ∨ x2
34 206 (!x1 ∧ x3) ∨ x2
35 208 (x1 ∧ x2) ∨ (x1 ∧ !x3)
36 212 (x1 ∧ x2) ∨ (x1 ∧ !x3) ∨ (x2 ∧ !x3)
37 213 (x1 ∧ x2) ∨ !x3
38 216 (x1 ∧ x2) ∨ (x1 ∧ !x3) ∨ (x2 ∧ x3)
39 218 (x1 ∧ x2) ∨ (x1 ∧ !x3) ∨ (!x1 ∧ x3)
40 220 (x1 ∧ !x3) ∨ x2
41 222 (x1 ∧ !x3) ∨ (!x1 ∧ x3) ∨ x2
42 223 !x1 ∨ x2 ∨ !x3
43 224 (x1 ∧ x2) ∨ (x1 ∧ x3)
44 228 (x1 ∧ x2) ∨ (x1 ∧ x3) ∨ (x2 ∧ !x3)
45 229 (x1 ∧ x2) ∨ (x1 ∧ x3) ∨ (!x1 ∧ !x3)
46 232 (x1 ∧ x2) ∨ (x1 ∧ x3) ∨ (x2 ∧ x3)
47 234 (x1 ∧ x2) ∨ x3
48 236 (x1 ∧ x3) ∨ x2
49 237 (x1 ∧ x3) ∨ (!x1 ∧ !x3) ∨ x2
50 239 !x1 ∨ x2 ∨ x3
51 244 x1 ∨ (x2 ∧ !x3)
52 248 x1 ∨ (x2 ∧ x3)
53 253 x1 ∨ x2 ∨ !x3
54 254 x1 ∨ x2 ∨ x3

Рефлексивные булевы функции третьего порядка от трех переменных

Число всех рефлексивных булевых функций равно 81, так как помимо нетривиальных к ним добавляются False, True, x1 и некотрые другие.

На рис.6 редставлена рефлексивная булева функция 3 порядка, так как

Ф(x1, x2,x3)=Ф(x1, x2,Ф(x1,x2, x3)).

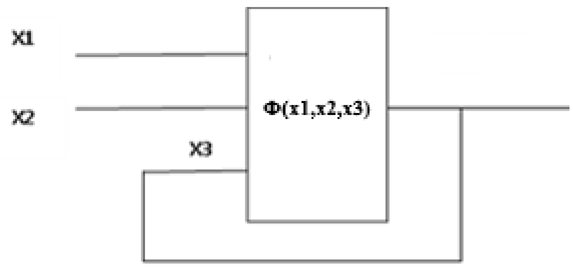

Рисунок 6. –Рефлексивная булева функция от трех переменных 3 порядка.

Ниже представлен список из 56 нетривиальных булевых выражений от трех переменных, которые назовем рефлексивными булевыми функциями 3 порядка.

Мы считаем их нетривиальными, так как в выражении для этих функций присутствуют все три переменные x1, x2, x3.

1 2 !x1 ∧ !x2 ∧ x3
2 8 !x1 ∧ x2 ∧ x3
3 11 (!x1 ∧ !x2) ∨ (!x1 ∧ x3)
4 14 (!x1 ∧ x2) ∨ (!x1 ∧ x3)
5 32 x1 ∧ !x2 ∧ x3
6 35 (!x1 ∧ !x2) ∨ (!x2 ∧ x3)
7 40 (x1 ∧ !x2 ∧ x3) ∨ (!x1 ∧ x2 ∧ x3)
8 42 (!x1 ∧ x3) ∨ (!x2 ∧ x3)
9 43 (!x1 ∧ !x2) ∨ (!x1 ∧ x3) ∨ (!x2 ∧ x3)
10 44 (x1 ∧ !x2 ∧ x3) ∨ (!x1 ∧ x2)
11 46 (!x1 ∧ x2) ∨ (!x2 ∧ x3)
12 47 !x1 ∨ (!x2 ∧ x3)
13 50 (x1 ∧ !x2) ∨ (!x2 ∧ x3)
14 56 (x1 ∧ !x2) ∨ (!x1 ∧ x2 ∧ x3)
15 58 (x1 ∧ !x2) ∨ (!x1 ∧ x3)
16 59 (!x1 ∧ x3) ∨ !x2
17 62 (x1 ∧ !x2) ∨ (!x1 ∧ x2) ∨ (!x2 ∧ x3)
18 128 x1 ∧ x2 ∧ x3
19 130 (x1 ∧ x2 ∧ x3) ∨ (!x1 ∧ !x2 ∧ x3)
20 131 (x1 ∧ x2 ∧ x3) ∨ (!x1 ∧ !x2)
21 138 (!x1 ∧ x3) ∨ (x2 ∧ x3)
22 139 (!x1 ∧ !x2) ∨ (x2 ∧ x3)
23 140 (!x1 ∧ x2) ∨ (x2 ∧ x3)
24 142 (!x1 ∧ x2) ∨ (!x1 ∧ x3) ∨ (x2 ∧ x3)
25 143 !x1 ∨ (x2 ∧ x3)
26 162 (x1 ∧ x3) ∨ (!x2 ∧ x3)
27 163 (x1 ∧ x3) ∨ (!x1 ∧ !x2)
28 168 (x1 ∧ x3) ∨ (x2 ∧ x3)
29 171 (!x1 ∧ !x2) ∨ x3
30 172 (x1 ∧ x3) ∨ (!x1 ∧ x2)
31 174 (!x1 ∧ x2) ∨ x3
32 176 (x1 ∧ !x2) ∨ (x1 ∧ x3)
33 178 (x1 ∧ !x2) ∨ (x1 ∧ x3) ∨ (!x2 ∧ x3)
34 179 (x1 ∧ x3) ∨ !x2
35 184 (x1 ∧ !x2) ∨ (x2 ∧ x3)
36 186 (x1 ∧ !x2) ∨ x3
37 188 (x1 ∧ !x2) ∨ (!x1 ∧ x2) ∨ (x2 ∧ x3)
38 190 (x1 ∧ !x2) ∨ (!x1 ∧ x2) ∨ x3
39 191 !x1 ∨ !x2 ∨ x3
40 194 (x1 ∧ x2) ∨ (!x1 ∧ !x2 ∧ x3)
41 200 (x1 ∧ x2) ∨ (x2 ∧ x3)
42 202 (x1 ∧ x2) ∨ (!x1 ∧ x3)
43 203 (x1 ∧ x2) ∨ (!x1 ∧ !x2) ∨ (x2 ∧ x3)
44 206 (!x1 ∧ x3) ∨ x2
45 224 (x1 ∧ x2) ∨ (x1 ∧ x3)
46 226 (x1 ∧ x2) ∨ (!x2 ∧ x3)
47 227 (x1 ∧ x2) ∨ (!x1 ∧ !x2) ∨ (!x2 ∧ x3)
48 232 (x1 ∧ x2) ∨ (x1 ∧ x3) ∨ (x2 ∧ x3)
49 234 (x1 ∧ x2) ∨ x3
50 235 (x1 ∧ x2) ∨ (!x1 ∧ !x2) ∨ x3
51 236 (x1 ∧ x3) ∨ x2
52 239 !x1 ∨ x2 ∨ x3
53 242 x1 ∨ (!x2 ∧ x3)
54 248 x1 ∨ (x2 ∧ x3)
55 251 x1 ∨ !x2 ∨ x3
56 254 x1 ∨ x2 ∨ x3

Приближения рефлексивных булевых функций

При расчете выходных частот для логических схем мы выполняем замену булевых выражений алгебраическими выражениями, согласно $X \vee Y = \mathbf{X+Y-XY}$, $X \wedge Y = \mathbf{XY}$, $\bar{X} = \mathbf{1-X}$, $X \oplus Y = \mathbf{X+Y-2XY}$, где **X, Y** в правых частях равенств являются положительными действительными переменными не больше 1.

Мы интерпретируем их как частоту появления 1 в двоичной случайной последовательности.

Ниже представлены действительные расширения функций третьего порядка

1 2 (1-x1) * (1-x2) * x3
2 8 (1-x1) * x2 * x3
3 11 ((1-x1) * (1-x2)) + ((1-x1) * x3)-((1-x1) * (1-x2)) * ((1-x1) * x3)
4 14 ((1-x1) * x2) + ((1-x1) * x3)-((1-x1) * x2) * ((1-x1) * x3)
5 32 x1 * (1-x2) * x3
6 35 ((1-x1) * (1-x2)) + ((1-x2) * x3)-((1-x1) * (1-x2)) * ((1-x2) * x3)
7 40 (x1 * (1-x2) * x3) + ((1-x1) * x2 * x3)-(x1 * (1-x2) * x3) * ((1-x1) * x2 * x3)
8 42 ((1-x1) * x3) + ((1-x2) * x3)-((1-x1) * x3) * ((1-x2) * x3)

9 43 ((1-x1) * (1-x2)) + ((1-x1) * x3) -((1-x1) * (1-x2)) * ((1-x1) * x3) + ((1-x2) * x3)- ((1-x2) * x3)*((1-x1) * (1-x2)) + ((1-x1) * x3) -((1-x1) * (1-x2)) * ((1-x1) * x3)
10 44 (x1 * (1-x2) * x3) + ((1-x1) * x2)-(x1 * (1-x2) * x3) * ((1-x1) * x2)
11 46 ((1-x1) * x2) + ((1-x2) * x3)-((1-x1) * x2) * ((1-x2) * x3)
12 47 (1-x1) + ((1-x2) * x3)-(1-x1) * ((1-x2) * x3)
13 50 (x1 * (1-x2)) + ((1-x2) * x3)-(x1 * (1-x2)) * ((1-x2) * x3)
14 56 (x1 * (1-x2)) + ((1-x1) * x2 * x3)-(x1 * (1-x2)) * ((1-x1) * x2 * x3)
15 58 (x1 * (1-x2)) + ((1-x1) * x3)-(x1 * (1-x2)) * ((1-x1) * x3)
16 59 ((1-x1) * x3) + (1-x2)-((1-x1) * x3) * (1-x2)
17 62 (x1 * (1-x2)) + ((1-x1) * x2) -(x1 * (1-x2)) * ((1-x1) * x2) + ((1-x2) * x3)- ((1-x2) * x3)*(x1 * (1-x2)) + ((1-x1) * x2) -(x1 * (1-x2)) * ((1-x1) * x2)
18 128 x1 * x2 * x3
19 130 (x1 * x2 * x3) + ((1-x1) * (1-x2) * x3)-(x1 * x2 * x3) * ((1-x1) * (1-x2) * x3)
20 131 (x1 * x2 * x3) + ((1-x1) * (1-x2))-(x1 * x2 * x3) * ((1-x1) * (1-x2))
21 138 ((1-x1) * x3) + (x2 * x3)-((1-x1) * x3) * (x2 * x3)
22 139 ((1-x1) * (1-x2)) + (x2 * x3)-((1-x1) * (1-x2)) * (x2 * x3)
23 140 ((1-x1) * x2) + (x2 * x3)-((1-x1) * x2) * (x2 * x3)
24 142 ((1-x1) * x2) + ((1-x1) * x3) -((1-x1) * x2) * ((1-x1) * x3) + (x2 * x3)- (x2 * x3)*((1-x1) * x2) + ((1-x1) * x3) -((1-x1) * x2) * ((1-x1) * x3)
25 143 (1-x1) + (x2 * x3)-(1-x1) * (x2 * x3)
26 162 (x1 * x3) + ((1-x2) * x3)-(x1 * x3) * ((1-x2) * x3)
27 163 (x1 * x3) + ((1-x1) * (1-x2))-(x1 * x3) * ((1-x1) * (1-x2))
28 168 (x1 * x3) + (x2 * x3)-(x1 * x3) * (x2 * x3)
29 171 ((1-x1) * (1-x2)) + x3-((1-x1) * (1-x2)) * x3
30 172 (x1 * x3) + ((1-x1) * x2)-(x1 * x3) * ((1-x1) * x2)
31 174 ((1-x1) * x2) + x3-((1-x1) * x2) * x3
32 176 (x1 * (1-x2)) + (x1 * x3)-(x1 * (1-x2)) * (x1 * x3)
33 178 (x1 * (1-x2)) + (x1 * x3) -(x1 * (1-x2)) * (x1 * x3) + ((1-x2) * x3)- ((1-x2) * x3)*(x1 * (1-x2)) + (x1 * x3) -(x1 * (1-x2)) * (x1 * x3)
34 179 (x1 * x3) + (1-x2)-(x1 * x3) * (1-x2)
35 184 (x1 * (1-x2)) + (x2 * x3)-(x1 * (1-x2)) * (x2 * x3)
36 186 (x1 * (1-x2)) + x3-(x1 * (1-x2)) * x3
37 188 (x1 * (1-x2)) + ((1-x1) * x2) -(x1 * (1-x2)) * ((1-x1) * x2) + (x2 * x3)- (x2 * x3)*(x1 * (1-x2)) + ((1-x1) * x2) -(x1 * (1-x2)) * ((1-x1) * x2)
38 190 (x1 * (1-x2)) + ((1-x1) * x2) -(x1 * (1-x2)) * ((1-x1) * x2) + x3- x3*(x1 * (1-x2)) + ((1-x1) * x2) -(x1 * (1-x2)) * ((1-x1) * x2)
39 191 (1-x1) + (1-x2) -(1-x1) * (1-x2) + x3- x3*(1-x1) + (1-x2) -(1-x1) * (1-x2)
40 194 (x1 * x2) + ((1-x1) * (1-x2) * x3)-(x1 * x2) * ((1-x1) * (1-x2) * x3)
41 200 (x1 * x2) + (x2 * x3)-(x1 * x2) * (x2 * x3)
42 202 (x1 * x2) + ((1-x1) * x3)-(x1 * x2) * ((1-x1) * x3)
43 203 (x1 * x2) + ((1-x1) * (1-x2)) -(x1 * x2) * ((1-x1) * (1-x2)) + (x2 * x3)- (x2 * x3)*(x1 * x2) + ((1-x1) * (1-x2)) -(x1 * x2) * ((1-x1) * (1-x2))
44 206 ((1-x1) * x3) + x2-((1-x1) * x3) * x2
45 224 (x1 * x2) + (x1 * x3)-(x1 * x2) * (x1 * x3)
46 226 (x1 * x2) + ((1-x2) * x3)-(x1 * x2) * ((1-x2) * x3)
47 227 (x1 * x2) + ((1-x1) * (1-x2)) -(x1 * x2) * ((1-x1) * (1-x2)) + ((1-x2) * x3)- ((1-x2) * x3)*(x1 * x2) + ((1-x1) * (1-x2)) -(x1 * x2) * ((1-x1) * (1-x2))
48 232 (x1 * x2) + (x1 * x3) -(x1 * x2) * (x1 * x3) + (x2 * x3)- (x2 * x3)*(x1 * x2) + (x1 * x3) -(x1 * x2) * (x1 * x3)
49 234 (x1 * x2) + x3-(x1 * x2) * x3
50 235 (x1 * x2) + ((1-x1) * (1-x2)) -(x1 * x2) * ((1-x1) * (1-x2)) + x3- x3*(x1 * x2) + ((1-x1) * (1-x2)) -(x1 * x2) * ((1-x1) * (1-x2))
51 236 (x1 * x3) + x2-(x1 * x3) * x2
52 239 (1-x1) + x2 -(1-x1) * x2 + x3- x3*(1-x1) + x2 -(1-x1) * x2
53 242 x1 + ((1-x2) * x3)-x1 * ((1-x2) * x3)
54 248 x1 + (x2 * x3)-x1 * (x2 * x3)
55 251 x1 + (1-x2) -x1 * (1-x2) + x3- x3*x1 + (1-x2) -x1 * (1-x2)
56 254 x1 + x2 -x1 * x2 + x3- x3*x1 + x2 -x1 * x2

Структура рефлексивных булевых функций от трех переменных

Структура $Ф_3$ представлена на рис.7 и справедлива формула $Ф_3= Ф_{1,3}∨Ф2_{,3}∨ Ф_{3,3}$.

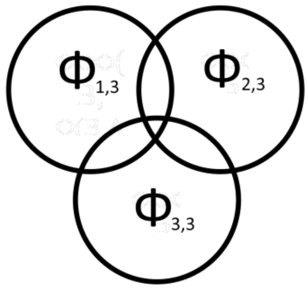

Рисунок 7. –Структура множества $Ф_3$.

Пересечение множеств $Ф_{1,3}$ и $Ф_{2,3}$ включает следующие функции:

1 64 x1 Λ x2 Λ !x3
2 84 (x1 Λ !x3) V (x2 Λ !x3)
3 128 x1 Λ x2 Λ x3
4 168 (x1 Λ x3) V (x2 Λ x3)
5 196 (x1 Λ x2) V (x2 Λ !x3)
6 200 (x1 Λ x2) V (x2 Λ x3)

7 208 (x1 ⋀ x2) ⋁ (x1 ⋀ !x3)
8 212 (x1 ⋀ x2) ⋁ (x1 ⋀ !x3) ⋁ (x2 ⋀ !x3)
9 213 (x1 ⋀ x2) ⋁ !x3
10 216 (x1 ⋀ x2) ⋁ (x1 ⋀ !x3) ⋁ (x2 ⋀ x3)
11 220 (x1 ⋀ !x3) ⋁ x2
12 224 (x1 ⋀ x2) ⋁ (x1 ⋀ x3)
13 228 (x1 ⋀ x2) ⋁ (x1 ⋀ x3) ⋁ (x2 ⋀ !x3)
14 232 (x1 ⋀ x2) ⋁ (x1 ⋀ x3) ⋁ (x2 ⋀ x3)
15 234 (x1 ⋀ x2) ⋁ x3
16 236 (x1 ⋀ x3) ⋁ x2
17 244 x1 ⋁ (x2 ⋀ !x3)
18 248 x1 ⋁ (x2 ⋀ x3)
19 253 x1 ⋁ x2 ⋁ !x3
20 254 x1 ⋁ x2 ⋁ x3.

Пересечение множеств $Φ_{1,3}$ и $Φ_{3,3}$ представлено ниже.

1 32 x1 ⋀ !x2 ⋀ x3
2 50 (x1 ⋀ !x2) ⋁ (!x2 ⋀ x3)
3 128 x1 ⋀ x2 ⋀ x3
4 162 (x1 ⋀ x3) ⋁ (!x2 ⋀ x3)
5 168 (x1 ⋀ x3) ⋁ (x2 ⋀ x3)
6 176 (x1 ⋀ !x2) ⋁ (x1 ⋀ x3)
7 178 (x1 ⋀ !x2) ⋁ (x1 ⋀ x3) ⋁ (!x2 ⋀ x3)
8 179 (x1 ⋀ x3) ⋁ !x2
9 184 (x1 ⋀ !x2) ⋁ (x2 ⋀ x3)
10 186 (x1 ⋀ !x2) ⋁ x3
11 200 (x1 ⋀ x2) ⋁ (x2 ⋀ x3)
12 224 (x1 ⋀ x2) ⋁ (x1 ⋀ x3)
13 226 (x1 ⋀ x2) ⋁ (!x2 ⋀ x3)
14 232 (x1 ⋀ x2) ⋁ (x1 ⋀ x3) ⋁ (x2 ⋀ x3)
15 234 (x1 ⋀ x2) ⋁ x3
16 236 (x1 ⋀ x3) ⋁ x2
17 242 x1 ⋁ (!x2 ⋀ x3)
18 248 x1 ⋁ (x2 ⋀ x3)
19 251 x1 ⋁ !x2 ⋁ x3
20 254 x1 ⋁ x2 ⋁ x3

Пересечением множеств $Φ_{2,3}$ и $Φ_{3,3}$ является следующий список функций.

1 8 !x1 ⋀ x2 ⋀ x3
2 14 (!x1 ⋀ x2) ⋁ (!x1 ⋀ x3)
3 128 x1 ⋀ x2 ⋀ x3
4 138 (!x1 ⋀ x3) ⋁ (x2 ⋀ x3)
5 140 (!x1 ⋀ x2) ⋁ (x2 ⋀ x3)
6 142 (!x1 ⋀ x2) ⋁ (!x1 ⋀ x3) ⋁ (x2 ⋀ x3)
7 143 !x1 ⋁ (x2 ⋀ x3)
8 168 (x1 ⋀ x3) ⋁ (x2 ⋀ x3)
9 172 (x1 ⋀ x3) ⋁ (!x1 ⋀ x2)
10 174 (!x1 ⋀ x2) ⋁ x3
11 200 (x1 ⋀ x2) ⋁ (x2 ⋀ x3)
12 202 (x1 ⋀ x2) ⋁ (!x1 ⋀ x3)
13 206 (!x1 ⋀ x3) ⋁ x2
14 224 (x1 ⋀ x2) ⋁ (x1 ⋀ x3)
15 232 (x1 ⋀ x2) ⋁ (x1 ⋀ x3) ⋁ (x2 ⋀ x3)
16 234 (x1 ⋀ x2) ⋁ x3
17 236 (x1 ⋀ x3) ⋁ x2
18 239 !x1 ⋁ x2 ⋁ x3
19 248 x1 ⋁ (x2 ⋀ x3)
20 254 x1 ⋁ x2 ⋁ x3

Элементами пересечением множеств $Φ_{1,3}$ и $Φ_{2,3}$, а также $Φ_{2,3}$ являются функции в следующем списке.

1 128 x1 ⋀ x2 ⋀ x3
2 168 (x1 ⋀ x3) ⋁ (x2 ⋀ x3)
3 200 (x1 ⋀ x2) ⋁ (x2 ⋀ x3)
4 224 (x1 ⋀ x2) ⋁ (x1 ⋀ x3)
5 232 (x1 ⋀ x2) ⋁ (x1 ⋀ x3) ⋁ (x2 ⋀ x3)
6 234 (x1 ⋀ x2) ⋁ x3
7 236 (x1 ⋀ x3) ⋁ x2
8 248 x1 ⋁ (x2 ⋀ x3)
9 254 x1 ⋁ x2 ⋁ x3

Рефлексивные булевы функции от четырех переменных

На основании компьютерного расчета длительностью 3 часа (использовалось одно ядро I3 4170 с частотой 3.7 Ггц) было определено, что из общего числа всех булевых функций от четырех переменных, равного 2^{16}=65536, рефлексивными являются 6124.

Ясно, что их все невозможно представить в данной статье. Расчеты для функций от пяти переменных малоосуществимы.

Приведем только несколько из них.

1 2 !x1 ⋀!x2 ⋀!x3 ⋀x4
2 8 !x1 ⋀!x2 ⋀x3 ⋀x4
3 11 (!x1 ⋀!x2 ⋀!x3)⋁(!x1 ⋀!x2 ⋀x4)
……….
6124 65534 x1⋁x2⋁x3⋁x4

Применение рефлексивных булевых рассуждений

Рассмотрим общий ход рефлексивных рассуждений Фреге с их достаточно значимым выводом в [6].

Г.Фреге показывает на основе сравнения бинарных признаков свойств сущностей анализа , что существует третья область помимо области представлений человека и области объектов внешнего мира.

Согласно логическим исследованиям Фреге, мысль не является объектом внешнего мира,а также не является внутренним представлением человека, т. е. существует мир мыслей, отдельно от человеческого мира. Так представления не могут быть восприняты сенсорными системами (слух, зрение…) представлениями обладают , т.е. представления требуют существование носителя и имеют только одного носителя.Они разделяют внутренний и внешний мир для человека.

Мысль не является ни внутренним представлением, ни объектом внешнего мира.

Существует 3-я область, элементы которой мысли – совпадают с представлениями, в том отношении, что они не могут быть восприняты сенсорными подсистемами, чувствами.

С объектами внешнего мира мысли совпадают в том, что они не предполагают носителя (не зависят от субъекта).

Пример – мысль, выраженная в теореме Пифагора, является истинной безотносительно ко времени.

Аналогичный подход мы видим при анализе известных языковых высказываний в [9,15]. В [16] рассматривается влияние рефлексивных процессов в эволюции социальных отношений и их эффективности.

Заключение

В работе даны определения рефлексивных булевых функций. Они рассматриваются как базовые примитивы самосознания.

В работе определены классы рефлексивных булевых функций и выполнена их классификация. Приведены все рефлексивные булевы функции от двух и трех переменных Также вычислены все рефлексивные булевы функции от четырех переменных.

Представлены действительные функции являющиеся расширеними рефлексивных булевых функций множества $\Phi_{3,3}$.

Показано, что логическая операция импликации принадлежит к классу рефлексивных функций.

Дальнейшая перспектива исследований связана с так называемыми «парадоксальными» рефлексивными булевыми функциями[12-14].

Литература

1.П.Т. де Шарден. Феномен человека.-М.:Наука,1987.-240 с.

2. Выготский Л. С. Сознание как проблема психологии поведения. Собр. сочинений. Т. 1., М.: Педагогика. с. 78 – 98.

3. Выготский Л. С. Мышление и речь. Собр. сочинений. Т. 2. М.: Педагогика, 1982. с. 179.

4. Манин Ю. И. К проблеме ранних стадий речи и сознания (филогенез) // Интеллектуальные процессы и их моделирование. М.: Наука, 1987. с. 154 –178.

5.Лекторский В.А. Субъект, объект, сознание.-М:Наука, 1980, 356 с.

6.Г.Фреге.Мысль: логическое исследование //Философия, логика, язык.-М.:Прогресс,1987.-с.18-47.

7.Андрюхин А.И., Кузнецов А.В. Компьютерное исследование физических аспектов рефлексивности мышления человека//Научные труды ДГТУ.Серия:Проблемы моделирования и автоматизации проектирования динамических систем.Вып. 29.2002 г.,с.218-226.

8.Хинтикка Я. Логико-эпистемологические исследования. М.: Прогресс, 1980. с. 446

9. Андрюхин А. И., Кузнецов А. В. Булевы модели самодиагностирования дискретных систем // Известия №1 ДонТу-Таганрог, апрель 2001 года. Материалы 2-го международного научно-технического семинара «Практика и перспективы развития институционального партнёрства» с. 168-175.

10. Г.Н.Борисюк и др.Осцилляторные нейронные сети. Математические результаты и приложения// Математическое моделирование, 1992. - № 1. - С.3-43.

11.Vladimir A. Lefebvre. The Law of Self-Reflexion: A Possible Unified Explanation for the Three Different Psychological Phenomena. UniVersity of California, IrVine USA

12.Андрюхин А.И. Оценка рефлексивных связей в вероятностной логике//Системный анализ в науках о природе и обществе, Донецк, Доннту, №1(4)-2(5)'2013, с.75-80.

13.Андрюхин А. И. Вероятностные оценки рефлексивных логических связей / А. И. Андрюхин // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія : Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка. - 2015. - Вип. 1. - С. 147-154. - Режим доступу: http://nbuV.goV.ua/j-pdf/Npdntu_inf_2015_1_25.pdf.

14. Андрюхин А.И, Подтынный С.Д. КМОП-реализации рефлексивных систем вероятностной логики//Информатика и кибернетика,№ 1, 2015,с.25-34.

15. Андрюхин А.И. Модельные представления антиномии в булевых сетях // Искусственный интеллект, 1998,N 1, с. 35–4

16.Лепский В.Е., Зорина Г.И. Рефлексивное предприятие XXI века//Рефлексивные процессы и управление, № 2, 2005, том 5,с.21-401.

Andryukhin AI Reflexive Boolean functions. *This work refers to the fundamental problem of determining the basic primitive consciousness. The human brain based on its characteristics, is able to self-organize and adapt in the environment. Classes reflexve Boolean functions defined in the work. Their classification is made. Also, all reflective Boolean functions of two and three variables are given. All reflective Boolean functions of four variables are defined. Results of computer experiments are given. It is shown that the logical implication operation belongs to the class of reflective functions. Software system Wolfram Mathematics used in the calculations.*

Keywords: *reflection, Boolean functions, self-organization, consciousness, brain*

Андрюхин А.И. Рефлексивные булевы функции. *Эта работа относится к фундаментальной проблеме определения базовых примитивов самосознания. Человеческий мозг основываясь на их свойствах, способен самоорганизовываться и адаптироваться во внешней среде. В работе определены классы рефлексивных булевых функций. Выполнена их классификация. Все рефлексивные булевы функции от двух и трех переменных приведены. Также все рефлексивные булевы функции от четырех переменных определены. Показано, что логическая операция импликации принадлежит к классу рефлексивных функций. Результаты компьютерных экспериментов приведены. Программная система Вольфрам Математика использовалась в расчетах.*

Ключевые слова: *рефлексия, булевы функции, самоорганизация*

Статья поступила в редакцию 20.11.2016
Рекомендована к публикации д-ром физ.-мат.. наук С.Н. Судаковым