

УДК 004.0-531.38

Компьютерный прогресс и задачи небесной механики: исторический ракурс

А.И. Андрюхин¹, к.т.н, с.н.с., С.Н. Судаков², д.ф.-м.н., в.н.с.
¹Донецкий национальный технический университет, г. Донецк,
²Институте прикладной математики и механики, г. Донецк
alexandruckin@ramber.ru, sudakov@iamm.su

Андрюхин А.И. С.Н.Судаков. Компьютерный прогресс и задачи небесной механики: исторический ракурс. В работе выполнен ряд компьютерных экспериментов. Они связаны с основной задачей небесной механики, как задача N-тел. Целью работы является оценка временных характеристик компьютерных расчетов базовых решений в истории задачи трех тел. Эксперименты выполнены для экстраполяции полученных результатов для задачи трех жидких гравитирующих тел. В расчетах использовались математические пакеты Maple и Mathematica. Приведены визуальные результаты компьютерных расчетов.

Ключевые слова: задача трех тел, небесная механика, компьютерное моделирование, проблема Пифагора.

Введение

Известно, что большинство задач небесной механики описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений, которые в конечном виде не интегрируются. Вследствие этого приходится прибегать к различным приближенным способам интегрирования, из которых выделим многочисленные приемы численного интегрирования и применение бесконечных рядов различного вида.

Даже простые физические системы, действующие согласно известным несложным законам (закон всемирного тяготения Ньютона) движутся по необычным непредсказуемым траекториям. Анри Пуанкаре привел пример подобного движения в известной проблеме трех тел, но подчеркнем, что при этом согласно теореме Пуанкаре-Бендиксона предельное поведение непрерывных траекторий для плоскости не может быть хаотическим. Однако на определенном этапе дискретные системы могут проявить хаотическое поведение даже в одномерном пространстве.

Компьютер стал полноправным участником при исследовании задач небесной механики, в частности при исследовании проблемы N-тел и тесно связанной с ней и другими известными проблемами теории хаоса. В последней мы обычно выполняем огромный объем вычислений, состоящий в итеративном применении простых математических операций. Компьютеры позволяют эффективно выполнять эти действия, которые делать вручную практически невозможно. Второй важной чертой использования компьютеров является их фантастически выросшие за последние два

десятилетия возможности визуализации результатов расчетов современных динамических систем.

Основным содержанием статьи является взгляд в прошлое классической проблемы N-тел в соотнесении с современным компьютерным прогрессом. При этом мы подчеркнем легкость получения тривиальных и даже нетривиальных результатов с использованием современных инструментальных математических пакетов. Авторами рассмотрен случай двух жидких гравитирующих тел и выполнен ряд расчетов для объектов Солнечной системы. В некоторых случаях это потребовало многочасовых расчетов. Это обстоятельство и увеличение числа жидких взаимодействующих тел привело авторов к необходимости выполнить компьютерные расчеты для известных теоретических результатов для твердых тел.

В последние годы наблюдается увеличение спроса на решения общей задачи трех тел в различных астрофизических ситуациях. Например, двойные звезды и их взаимодействия с одиночными звездами играют важную роль в эволюции звездных скоплений. Тройные звездные системы являются еще одним очевидной астрофизической проблемой трех тел. Многие другие астрофизические явления происходят в тройных системах.

Задачей исследования является оценка временных характеристик известных теоретических результатов для твердых тел с целью экстраполяции этих данных для новых схем расчетов с жидкими гравитирующими телами.

Проблема трех тел

Основной задачей небесной механики является задача N тел, которой посвящены множество публикаций [1-20]. В ней рассматриваются N материальных точек с известными массами $\{m_i\}$, $i=1, N$, и взаимодействие между ними определено законом тяготения Ньютона. Требуется найти траектории движения точек для всех последующих моментов времени при условии, что заданы в начальный момент времени $t=0$ положения и скорости каждой точки $\mathbf{r}_i|_{t=0} = \mathbf{r}_{i0}$, $\mathbf{v}_i|_{t=0} = \mathbf{v}_{i0}$. Согласно закону Ньютона движение тел описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i,$$

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_{j \neq i}^N G m_j \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3},$$

где G - гравитационная постоянная, m_i , \mathbf{r}_i , \mathbf{v}_i - масса, радиус-вектор и скорость i -го тела, $i=1, N$ [5, 12].

В практической программной реализации были справедливы следующие условия или положения:

- 1) была выбрана барицентрическая система координат (начало в центре масс системы расчетных тел);
- 2) уравнения были выражены в безразмерных величинах;
- 3) единица расстояния - земной радиус;
- 4) единица времени - земные сутки;
- 5) при расчетах использовались различные инициальные конфигурации системы Земля(Е)-Луна(М)-Солнце(С), из которых выделим изображенную на рис. 1.
- 6) расчеты производились на процессоре i3 4170 (частота 3.7 ГГц) в средах Maple и Mathematica.

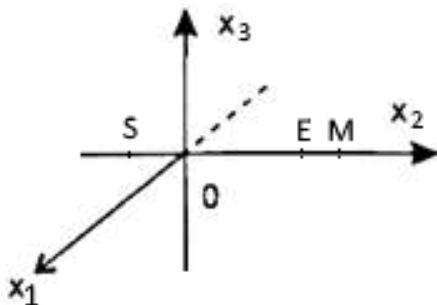


Рисунок 1-Инициальная конфигурация проблемы трех тел.

Проблема Пифагора в небесной механике

Влияние компьютерного прогресса и

использование известных математических представлений в до сих пор актуальных вариантах проблемы трех тел прекрасно иллюстрируется на примере проблемы Пифагора, которой занимался Бурро в 1913 году [3]. В ней мы рассматриваем начальную конфигурацию из трех тел, которые первоначально размещены в углах пифагорова треугольника и их массы соотносятся, как 3, 4 и 5 единицы согласно рис. 2. В начальный момент времени тела находятся в состоянии покоя. Основной расчет Бурро показал типичное поведение системы трех тел: два тела приближаются друг к другу, имеют опасную близость (столкновение), а затем отступают друг от друга.

Впоследствии другие варианты встречи двух тел были рассчитаны Бурро, но естественно его возможности в то время были ограничены.

Только после использования современных компьютеров последовал финальный вывод по анализу этой ситуации, напомилавшей небесный танец.

Позже расчеты показали, что решения задачи Пифагора вполне типичны для изначально связанной системы трех тел.

После многих близких подходов двух тел, возникает конфигурация, которая приводит к уходу одного из тел и формирования общего тела из двух других тел, но этот результат был получен спустя более 50 лет после расчетов Бурро.

Используя математические пакеты Maple и Mathematica, в настоящей работе получены результаты аналогичные в [3]. Они представлены для этой конфигурации на рис. 3-11.

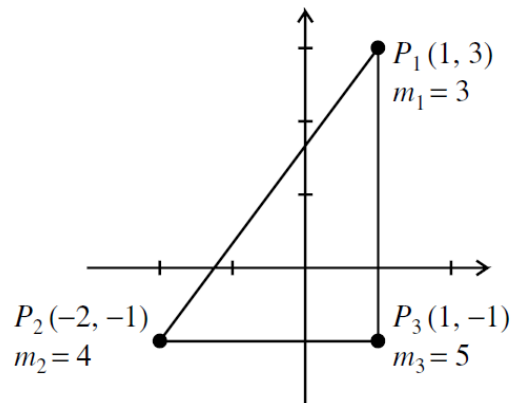


Рисунок 2-Инициальная конфигурация проблемы Пифагора.

Введем обозначения:

- (x_{i1} , x_{i2} , x_{i3})-координаты Земли,
- (x_{i21} , x_{i22} , x_{i23})-координаты Луны,
- (x_{i31} , x_{i32} , x_{i33})-координаты Солнца).

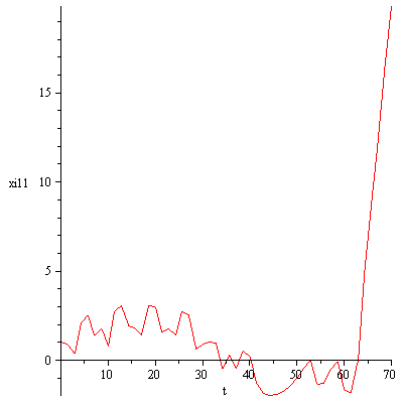


Рисунок 3-Движение тела m1 -координата xi11

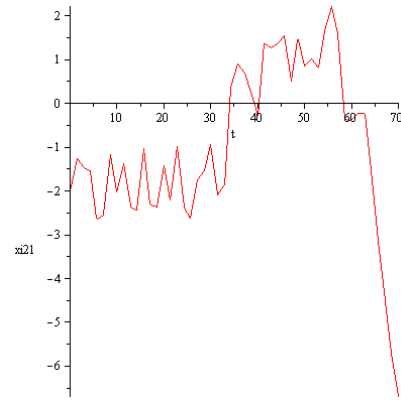


Рисунок 6-Движение тела m2 -координата xi21

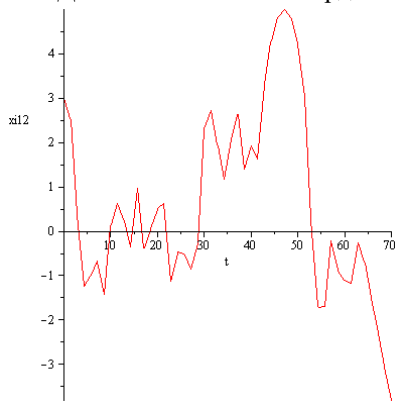


Рисунок 4-Движение тела m1 -координата xi12.

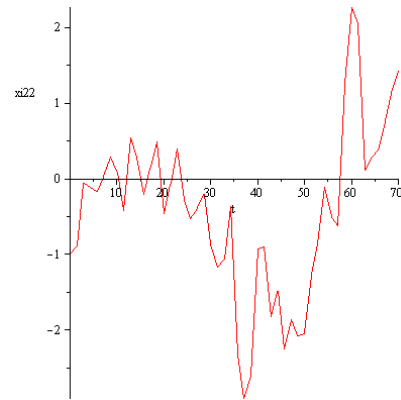


Рисунок 7-Движение тела m2 -координата xi22

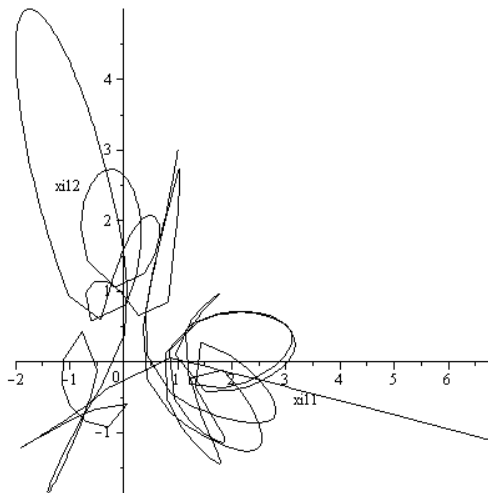


Рисунок 5-Движение тела m1 в плоскости (xi11,xi12).

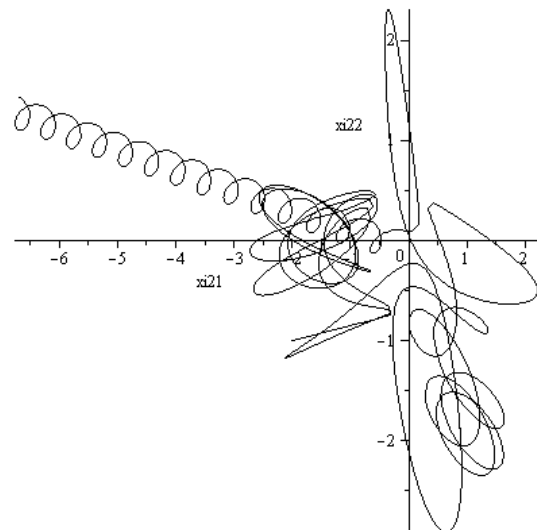


Рисунок 8-Движение тела m2 в плоскости (xi21,xi22).

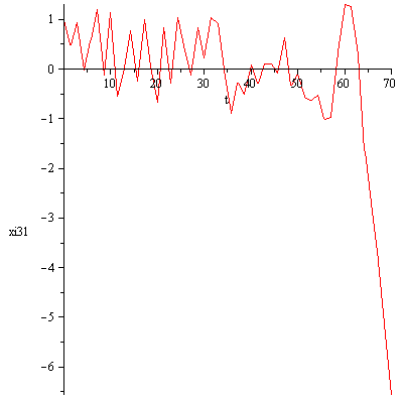


Рисунок 9-Движение тела m3 -координата x31

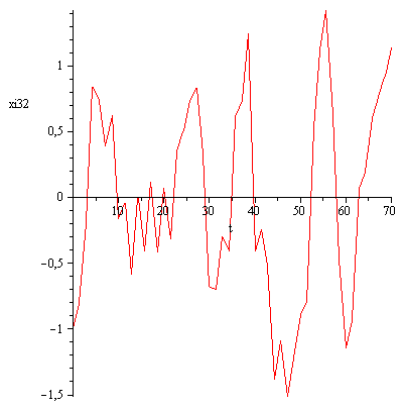


Рисунок 10-Движение тела m3 -координата x32

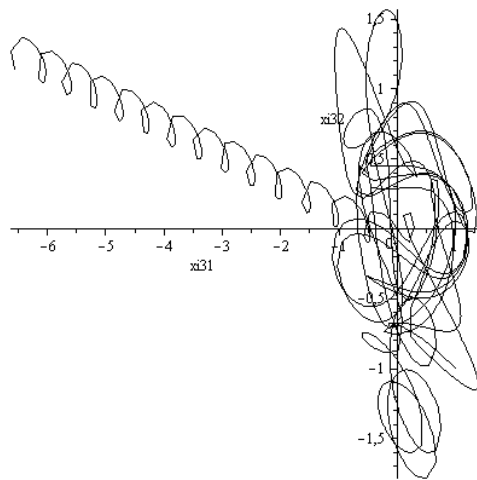


Рисунок 11-Движение тела m3 в плоскости (x31,x32).

Проблема двух тел

Эта модель не представляет особого интереса ввиду имеющегося аналитического решения. Время моделирования системы Земля-Солнце -5 лет(~1825 суток). Согласно рисунку

интересным является тот факт, что Солнце движется в барицентрической системе координат по орбите с радиусом порядка 13% от радиуса Земли, т.е. примерно 800 км .

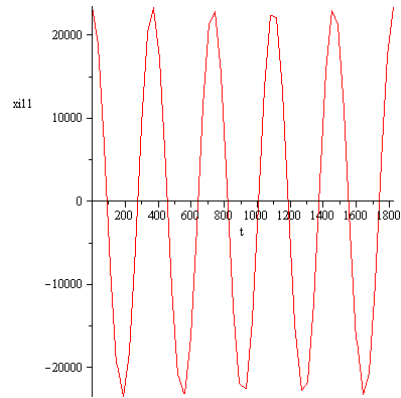


Рисунок 12-Движение Земли --координата x11.

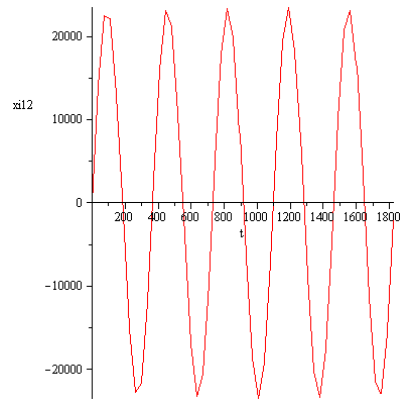


Рисунок 13-Движение Земли --координата x12.

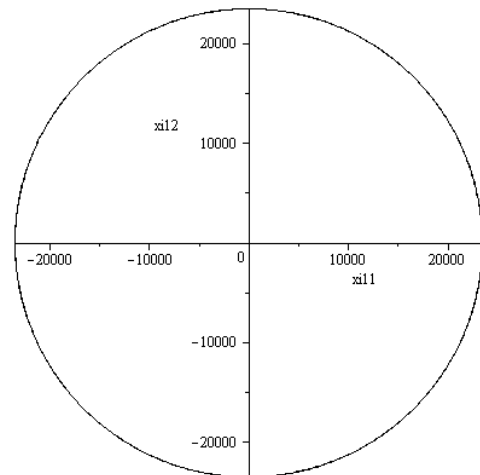


Рисунок 14-Движение Земли в плоскости (x11,x12).

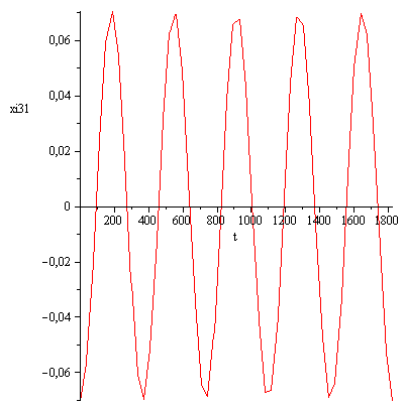


Рисунок 15-Движение Солнца -координата x_{131} .

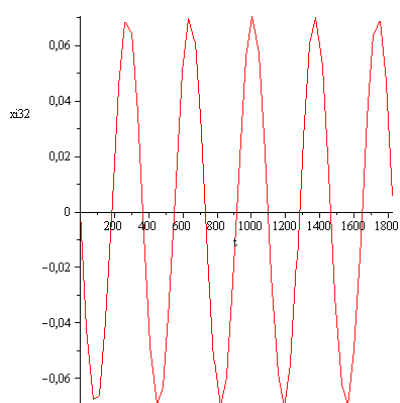


Рисунок 16-Движение Солнца --координата x_{132} .

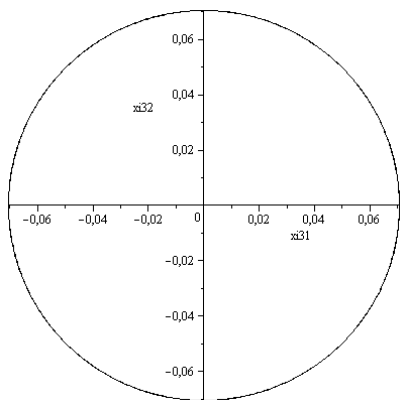


Рисунок 17-Движение Солнца в плоскости (x_{131}, x_{132}) .

Проблема трех тел

Поведение трех тел при моделировании с различными начальными данными может быть чрезвычайно разнообразным. Так на рис.20 показана траектория Луны (ее уход из инициальной конфигурации) при ее небольшой

начальной скорости, а на рис.18-19 проекции движения.

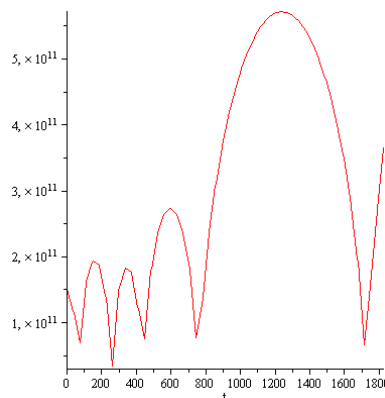


Рисунок 18-Движение Луны --координата x_{121} .

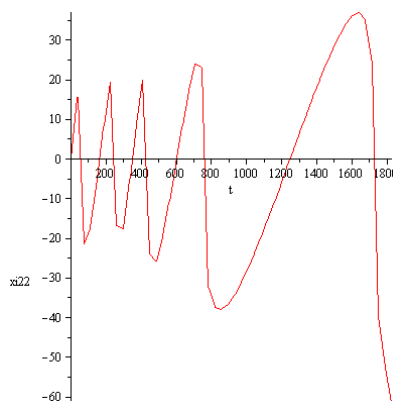


Рисунок 19-Движение Луны --координата x_{122} .

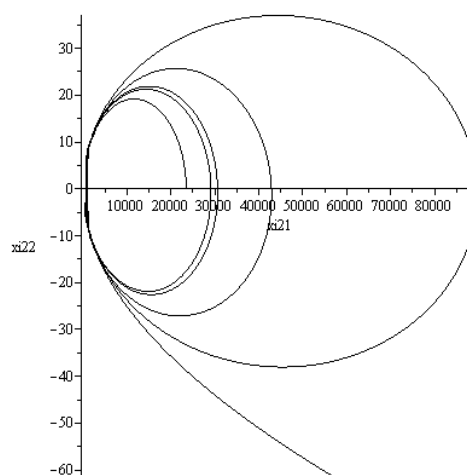


Рисунок 20-Движение Луны в плоскости (x_{121}, x_{122}) .

Иной характер носят движения этих объектов на рис.21-24 при начальных условиях, которые мы определяем из реальных наблюдений.

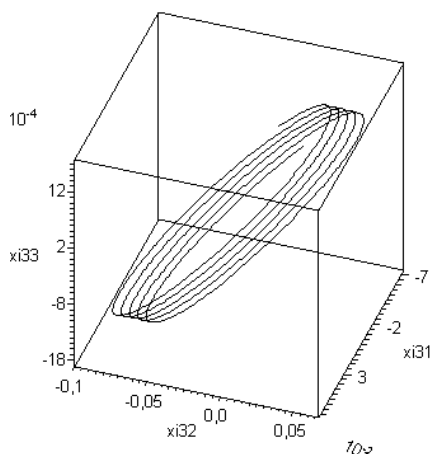


Рисунок 21-Движение Солнца за 5 лет в барицентрической системе координат

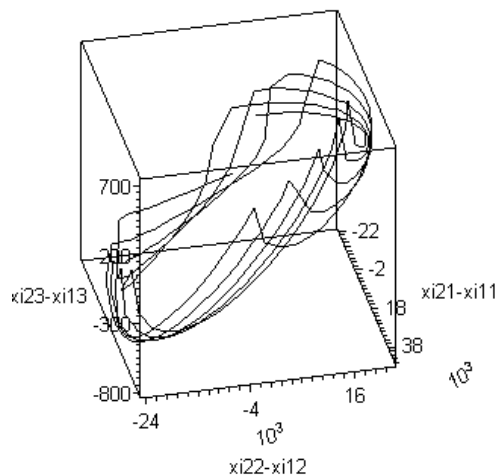


Рисунок 24-Движение Луны вокруг Земли за 5 лет

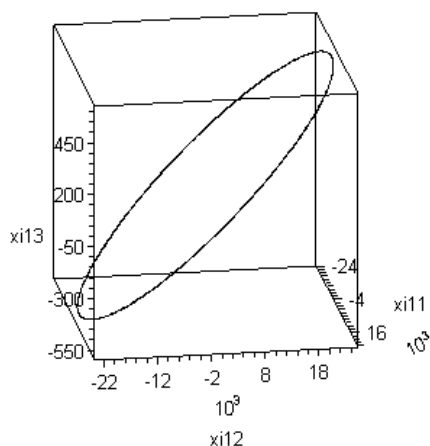


Рисунок 22-Движение Земли за 5 лет в барицентрической системе координат.

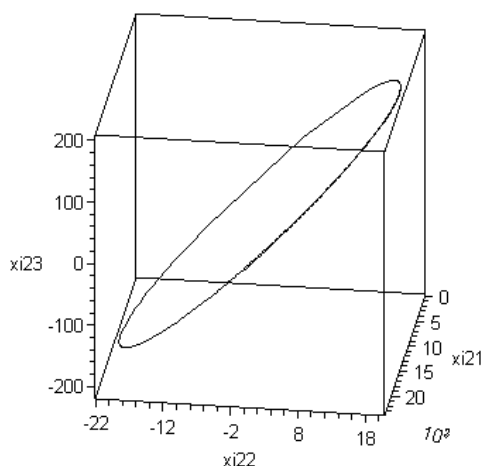


Рисунок 23-Движение Луны за полгода в барицентрической системе координат

Современные численные решения проблемы многих тел

Компьютерный прогресс значительно изменил отношение специалистов к проблеме многих тел. В частности, использование графических процессоров позволило значительно ускорить время численного моделирования этой проблемы. Так представленные результаты в [17] показывают почти 200-кратное увеличение скорости расчетов в проблеме многих тел по сравнению с двухядерным процессором Duo Core.

Отметим, что авторы работы [17] использовали так называемый алгоритм вычисления силы взаимодействий между всеми парами из всей совокупности всех тел. Тем самым мы оцениваем эволюцию системы тел, в которой каждое тело непрерывно взаимодействует с любым другим телом. С помощью этого алгоритма возможно численно моделировать не только астрофизическое поведение тел в небесной механике, но и турбулентные течения жидкости, рассчитывать электростатические силы, силы Ван дер Ваальса, сворачивание белка, характеристики освещения в компьютерной графике и т.п.

Пример расчета поведения 16384 тел представлен на рис. 25. Первоначальная конфигурация представляет собой сферу из тел, вращающихся вокруг оси. Было выполнено GPU (GeForce 8800) моделирование проблемы N-тел тела с графическим отображением движения в интерактивном режиме N=16K тел при 44 кадрах в секунду.

Код CUDA для этого приложения доступен в CUDA SDK на www.nvidia.com/CUDA~~pobj

Выводы

Визуальные результаты были получены за приемлемое для практики время (не более 10 минут процессорного времени на расчет).

Практическая значимость этих результатов состоит в обосновании попытки экстраполяции результатов, полученных при работе с двумя жидкими гравитирующими телами на модели с тремя телами.

Направление дальнейших исследований связано с интересными для космонавтики случаями задачи N тел, когда масса одного тела ничтожно мала по сравнению с массами других тел.

В роли этого тела обычно выступает космическая ракета, автоматическая межпланетная станция или зонд. При расчете этих вариантов мы не учитываем ускорения, которые сообщаются малым телом каждому из больших тел. Это означает, что мы пренебрегаем силами, с которыми малое тело притягивает большие тела. Мы пренебрегаем этими силами потому, что малы вызываемые ими ускорения.

Такие варианты так называемой ограниченной задачи N -тел активно разрабатываются и их качественные исследования, аналитические и вычислительные решения важны для практики космических полетов обычно при $N=2,3,4$.

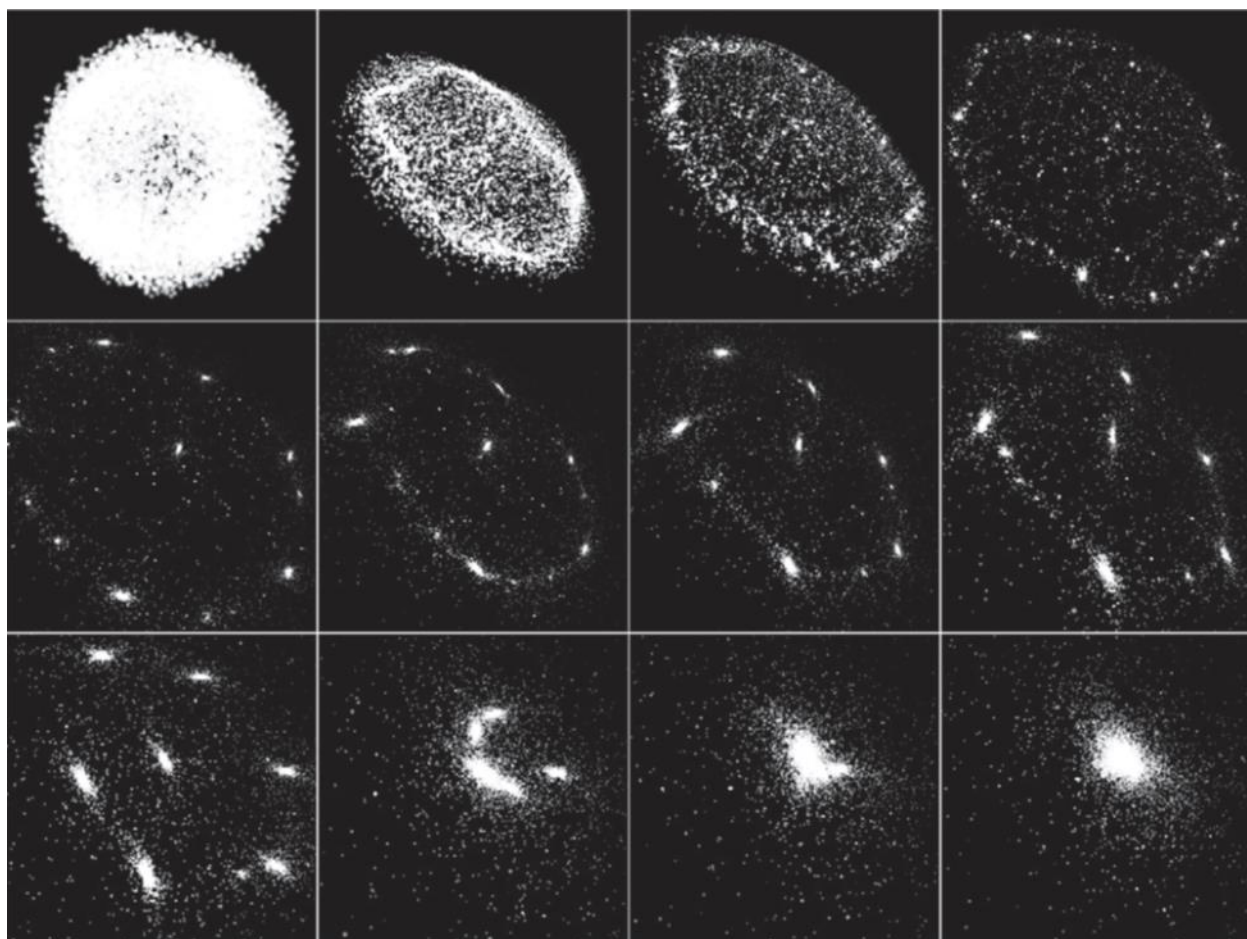


Рис.25.Эволюция системы из 16384 тел

Литература

1. Пуанкаре А. Лекции по небесной механике.

Наука, 1965 . 572 с.

2. Пуанкаре А. Избранные труды. т. 2. Новые методы небесной механики. Москва: Наука, 1972.

- 999 с.
3. M. Valtonen, H. Karttunen. The Three-Body Problem. Cambridge University Press 2006.
 4. Wang Sang Koon, Martin W. Lo, Jerrold E. Marsden, and Shane D. Ross. Dynamical Systems, the Three-Body Problem and Space Mission Design
 5. Алексеев В М. Лекции по небесной механике Ижевск: Ред. журнала "Регулярная и хаотическая динамика", 1999, 160 с.
 6. Арнольд В И, Козлов В В, Нейштадт А И Математические аспекты классической и небесной механики М.: ВИНТИ, 1985. 304 с.
 7. Голубев В.Г., Гребеников Е А. Проблема трех тел в небесной механике. М: Издательство МГУ, 1985. 240 с..
 8. Гребеников Е А, Козак Д, Якубяк М. Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел М: изд. РУДН, 2002. 214 с.
 9. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы Издание 3-е, дополненное. М: Наука, 1975 . 800 с
 10. Задача Кеплера. Столкновения. Регуляризация. Сб. работ. Гл. ред. - Козлов В.В.; Серия - Современная небесная механика. М. - Ижевск, 2006 г. 452 с..
 11. Зигель К, Мозер Ю. Лекции по небесной механике. Ижевск: РХД, 2001. 384 с.
 12. Орлов В.В., Рубинов А.В. Задача N тел в звездной динамике. СПб, ВВМ, 2008, 175 с
 13. Себехей В. Теория орбит. Ограниченная задача трех тел. Пер. с англ. М: Наука, 1982. 656 с.
 14. Смарт У. Небесная механика. М: Мир, 1965. 504 с.
 15. Саари Д. Кольца, столкновения и другие ньютоновы задачи N тел.. М. - Ижевск, 2009 г., 280 стр.
 16. Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики. М: Наука, 1967 . 523 с
 17. L Nyland, M Harris, J Prins. GPU gems, 2007.

Andruckin AI S.N. Sudakov. Computer progress and problems of celestial mechanics: the historical perspective. A number of computer experiments performed in this work. They are related to the main problem of celestial mechanics, as the problem of N-body. Evaluation of the temporal characteristics of computer calculations of basic decisions in the history of the three-body problem is the aim of this work. The experiments were performed to extrapolate these estimates for the three-liquid gravitating bodies. The calculations use mathematical Maple and Mathematica packages. Visual results of computer simulations are presented.

Keywords: *three-body problem, celestial mechanics, computer simulation, the problem of Pythagoras.*

*Статья поступила в редакцию 20.04.2016
Рекомендована к публикации д-ром техн. наук В.Н. Павлышом*