УДК 517.9

Приближенный анализ моделирования процесса кристаллизации при электрошлаковом переплаве

А.С. Миненко, Е.В. Радевич
Донецкий национальный технический университет
radevich_katerina@mail.ru

Миненко А.С., Радевич Е.В. Приближенный анализ моделирования процесса кристаллизации при электрошлаковом переплаве. *Осуществляется анализ проблемы существования гладких решений конвективной задачи Стефана с учетом условий изотермичности. Также наряду со стационарной задачей Стефана, учитывающей конвективные движения в жидкой фазе, изучается задача Стефана без учета конвекции:*

Ключевые слова: *функционал, кристаллизация, тепловой поток, управление, краевая задача, моделирование.*

Введение

Распространения тепла в различных средах оказывает большое влияние на характер протекания многих важных для практики процессов. Среди задач, связанных с распространением тепла, выделяется класс задач, в которых исследуемое вещество переходит из одной фазы в другую с выделением или поглощением тепла.

Цель и задачи статьи

Целью данной работы является моделирование процесса кристаллизации металла, изучение процесса завершения получения слитка в кристаллизаторе путем его вытягивания.

Рассматривается задача управления информационными процессами при автоматизации технологий тепловой обработки металла, на основе математического моделирования, анализа статистических данных и теплофизических экспериментальных измерений. В качестве источника информации исследуется математическая модель, основанная на пространственной задаче Стефана, с учетом конвективного движения и примесей в жидкой фазе.

Постановка задачи

Пусть D = (-1< x < 1, y < 0) полуполоса, заполненная твердым металлом. Обозначим через u (x, y) температуру этого металла. Требуется определить температуру u (x, y) по следующим условиям:

$$u_{xx} + u_{yy} + \omega u_y = 0, (x, y) \in D, \quad (1)$$

$$u_x \pm \omega_0 u = 0, x = \pm 1, -\omega < y < 0, \quad (2)$$

$$u(x, -\infty) = 0, \quad (3)$$

$$u_y(x, 0) = v(x), -1 \le x \le 1, \quad (4)$$

здесь ω и ω_0 – постоянные, соответственно, число Пекле и Нуссельта.

Решение задачи (1)-(4) имеет вид

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\omega} \frac{\cos \lambda_n x^{\mu_n Y}}{\mu(1+\omega_0 \dfrac{\cos^2 \lambda_n}{\lambda_n^2})} \int_{-1}^{1} v(\zeta) \cos \lambda_n \zeta \, d\zeta, \quad (5)$$

где $\mu = -\frac{\omega}{2} + \sqrt{\frac{\omega^2}{4} + \lambda_n^2}$, где n = 1,2,3,...λ_n - положительные корни уравнения $\lambda = \omega_0 ctg \lambda$.

Отождествим теперь температуру u (x, y) с температурой твердого слитка находящегося в кристаллизаторе при электрошлаковом переплаве. Для вытягивания слитка из кристаллизатора поверхность слитка предварительно обогревается тремя электронными лучами W1, W2 и W3, причем мощность W3 одного из низ равномерно распределена в центральной зоне { -1 ≤ x ≥ 1, y = 0}, а два других сконцентрированы по краям x = ±1 [1]. Независимо от того, в каком отношении находится температура поверхности слитка с критической температурой $T^к$, при которой поверхность слитка отделяется от стенок кристаллизатора, теплообмен слитка с кристаллизатором осуществляется по формуле (2). Для получения температуры слитка достаточно положить в формуле (5) v(x) = (W_1, W_2, W_3).

Далее введем в рассмотрение функционал:

$$I(v) = \int_{n}^{0} (u(1,y) = T^k)^2 dy . \quad (6)$$

Рассматривается задача. Требуется определить поток v(x) из допустимого множества U, доставляющий наименьшее значение функционалу I(v). Минимизирующая последовательность v_n строится по формуле $v_{n+1} = v_n + e_n(v_{n-1} - v_n)$, параметр e_n выбирается из условия $\min I(v_n + e_n(v_{n-1} - v_n))$, $0 \le e_n \le 1$ (2). В качестве области определения функции U берется множество кусочно-постоянных ступенчатых функций: $v = v_k, x_k \le x \le x_{k+1}, v_k = const, k = 0,1,2,...,m.$

При этом формула (5) имеет вид:

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\omega} \frac{\cos\lambda_n x e^{\mu_n y}}{\mu_n(1+\omega_0 \frac{\cos^2\lambda_n}{\lambda_n^2})} \sum_{k=0}^{m} v_k \frac{\sin\lambda_n x_{k+1} - \sin\lambda_n x_k}{\lambda_n},$$

$$aI(v) = I(v_0, v_1, v_2, ..., v_m).$$

При численной реализации задачи необходимо учесть ограничение $2500 \le v(x) \le 5000$, здесь v(x) – мощность потока в единицах МВт/м^2, а также ω = 2,66, ω = 3,05.

1. Решение задачи методом нулевого приближение.

Найдем минимум функционала (6), в случае когда $u_0(x,y) = f_0(x,y)\vartheta$, где

$$f_0(x,y) = 2\frac{\cos\lambda_0 x \sin\lambda_0}{\lambda_0\mu_0(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})} e^{\mu_0 y}.$$

Минимум функционала (6) находим из условия

$$\frac{\partial I}{\partial v} = 0.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$v_0 = 4T^* \frac{\mu_0\lambda_0(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})}{\sin 2\lambda_0},$$

$$I(v_0) = v_0^2 \frac{\sin 2\lambda_0(1-e^{2\mu_0 H})}{2\lambda_0^2\mu_0^3(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})} - (T^*)^2 H - 2T^* v_0 \frac{\sin 2\lambda_0(1-e^{\mu_0 H})}{\lambda_0\mu_0^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})}$$

Первое приближение. Найдем теперь минимум функционала (6), в случае когда

$$u_1(x,y) = (f_0(x,y))v, \text{ где}$$

$$f_1(x,y) = 2\frac{\cos\lambda_1 x e^{\mu_1 y}}{\mu_1(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})} \frac{\sin\lambda_1}{\lambda_1}.$$

Поступая, аналогично тому, как это было сделано в случае нулевого приближения, получим:

$$v_1 = 2T^*\left[\frac{\sin 2\lambda_0(1-e^{\mu_1 H})}{\lambda_0\mu_0^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})} + \frac{\sin 2\lambda_2(1-e^{\mu_2 H})}{\lambda_1\mu_1^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})}\right]A,$$

$$A = \frac{\sin^2\lambda_0(1-e^{\mu_2 H})}{\lambda_0\mu_1^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})^2} + \frac{\sin^2 2\lambda_1(1-e^{2\mu_1 H})}{2\mu_1^2(1+\omega_1\frac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})^2} +$$

$$+2\frac{\sin 2\lambda_0 \sin 2\lambda_1}{\mu_0\lambda_0(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})} \frac{(1-e^{\mu_0 H})(1-e^{\mu_1 H})}{\mu_0\lambda_1(1+\omega_0\frac{\cos^2\mu}{\lambda_1^2})}.$$

Далее, имеет место следующая формула:

$$I(v_1) = v_2^1 \frac{\sin^2 2\lambda_0(1-e^{2\mu_0 H})}{2\mu_0^3\lambda_0^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_1^2})^2} + v_1^2 \frac{\sin^2 2\lambda_1(1-e^{2\mu_1 H})}{2\mu_1^3\lambda_1^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})^2} +$$

$$+2v_1^2 \frac{\sin 2\lambda_0 \sin 2\lambda_1(1-e^{\mu_1 H})(1-e^{\mu_0 H})}{\mu_1\lambda_1(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})\mu_0\lambda_0(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})} -$$

$$-2T^* v_1\left[\frac{\sin 2\lambda_1(1-e^{\mu_1 H})}{\lambda_1\mu_1^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})} + \frac{\sin 2\lambda_0(1-e^{\mu_0 H})}{\lambda_0\mu_0^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})}\right] - H(T^*)^2.$$

Приближение любого порядка. Аналогичным образом можно исследовать минимум функционала $I(v_n)$, когда

$$u_n(x,y) = 2\frac{v_n \sin\lambda_0 \cos\lambda_0 x(1-e^{\lambda_0 H})}{\lambda_0\mu_0[1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_k}{\lambda_k^2}]} e^{\mu_0 y} +$$

$$+2\omega_0 v_n \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos\lambda_k x \cos\lambda_k(1-e^{\mu_k H})}{\lambda_k^2\mu_k[1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_k}{\lambda_k^2}]} e^{\mu_k y}$$

Оценить погрешность предлагаемого метода вычисления минимума функционала (6) можно, используя следующее утверждение.

При достаточно малых значениях ω и при $(x,y) \in \overline{D}$ справедлива оценка:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\cos\lambda_k x \cos\lambda_k(1-e^{\omega_k H})}{\lambda_k^2\mu_k[1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_k}{\lambda_k^2}]} e^{\mu_k y}\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k\pi)^2} e^{\mu_k y}$$

При доказательстве этого утверждения воспользоваться соотношением:

$\lambda_k = n\pi + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \to 0$ для всех n[2].

Справедливо также утверждение. Пусть выполнены условия $\omega_0 \ge \omega\sqrt{2} tg\omega\sqrt{2}$, $0<\omega \le A,\ 0<\omega \le \dfrac{\pi^2}{16},\ 0<v_0 \le v(x)<v_1$, при $x\in[-1,1]$, где v_0 и v_1 – некоторые постоянные. Тогда решение краевой задачи (1)-(5) удовлетворяет следующим условиям при (x,y) $\in \overline{D}$:

$$u_y(x,y) \le C_1\omega \exp(\mu_0 y) \le C_1\omega \exp(\omega y)$$

$$C_0 = \exp(\mu_0 y) \le u(x,y) \le C_1 \exp(\mu_0 y) C_1 \exp(\omega y),$$

где $C_1 = \dfrac{6+A(1+\cos\sqrt{A})}{3(1+\cos\sqrt{A})}$, $C_0 = \dfrac{3(1-A)(1+\cos^2\sqrt{A})\cos^2\sqrt{A}}{6+A(1+\cos^2\sqrt{A})}$.

Для утверждения необходимо сравнить с помощью принципа максимума функции $u_y(x,y)$ и $v_y(x,y)$, где $v(x,y)$ – решение задачи (1)-(5) в предположении, что $v_y(x,0)=v_1$ при $x\in[-1,1]$.

Далее, рассматривается функция $f(x,y) = v_y(x,y) - u_y(x,y), (x,y)\in \overline{D}$ и доказывается, что $f(x,y)$ в $\overline{D}$.

Действительно, функция $f(x,y)$ не может принимать наименьшее отрицательное значение внутри D в силу принципа максимума. На вертикальных частях границы x = ±1 функция $f_x(x,y)$ также не может принимать отрицательный минимум. В такой точке имели бы $f_x(x,y)<0$, между тем $f_x(x,y) = -\omega_0 f(x,y) > 0$, x=±1, так как $f(x,y)<0$, по предложению. На бесконечности функция $f(x,y)$ исчезает, т.е. $f(x,-\infty)=0$. На границе y = 0, -1≤ x ≤ 1 имеет

$$f(x,0) = v_y(x,0) - u_y(x,0) = v_1 - -v(x) \ge 0$$

Следовательно, всюду в $\overline{D}$ справедливо неравенство $u_y(x,y) \le v_y(x,y)$ при $(x,y)\in\overline{D}$. Отсюда с помощью интегрирования по переменной y следует оценка для функции u(x,y) сверху. Аналогичным образом, можно получить оценку на производную u_2(x,y) сверху при (x,y)є $\overline{D}$. Полученные оценки позволяют оценить температуру u(x,y) и тепловой поток внутри области D не прибегая к решению задачи (1)-(4) [3-4].

2. Минимизация I(ϑ) при ступенчатой функции ϑ(x).

Имеем

$$u(x,y) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\lambda_n x e^{\mu_n y}}{\mu_n\left(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_n}{\lambda_n^2}\right)} \int_0^1 \vartheta(\zeta)\cos\lambda_n \zeta d\zeta,$$

Здесь $\vartheta(x)=\vartheta_1$ при 0≤x≤x_1, $\vartheta(x)=\vartheta_2$ при x_1≤x≤1, $N_1 \le \vartheta(x) \le N_2$.

В дальнейшем положим

$$\vartheta_2 = N_2 \ u \ f_0(x,y) = 2\frac{\cos\lambda_0 x e^{\mu_0 y}}{\mu_0\left(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2}\right)}(a\vartheta_1 + bN_2).$$

Требуется найти min I и ϑ_1, где $I(\vartheta_1, N_2) = \int_H^0 (f_0(1,y)(a\vartheta_1 + bN_2) - T^*)dy$, т.е. $\frac{\partial I}{\partial\vartheta_1} = 0$.

Имеем:

$$\vartheta_1 = \left[2T^*\frac{\cos\lambda_0(1-e^{\mu_0 H})}{\mu_0^2\left(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2}\right)} - 2bN_2\frac{\cos^2\lambda_0(1-e^{2\mu_0 H})}{\mu_0^3\left(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2}\right)^3}\right] \left[2a\frac{\cos^2\lambda_0(1-e^{2\mu_0 H})}{\mu_0^3\left(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2}\right)^3}\right]^{-1}.$$

Здесь $a=\frac{\sin\lambda_0 x_1}{\lambda_0}$, $b = \frac{\sin\lambda_0 - \sin\lambda_0 x_1}{\lambda_0}$.

$$I(\vartheta_1,N_2) = \int_H^0 (f_0(1,y)(a\vartheta_1+bN_2) - T^*)^2 dy = \left[2(a\vartheta_1+bN_2)\frac{2\cos^2\lambda_0}{\mu_0^2\left(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2}\right)^3}\right]^2 \frac{1-e^{2\mu_0 H}}{\mu_0} - 2T^*(a\vartheta_1+bN_2)\frac{\cos\lambda_0(1-e^{\mu_0 H})}{\mu_0^2\left(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2}\right)} + T^{*2}.$$

Далее имеем:

$$u_1(x,y) = 2\frac{\cos\lambda_0 x e^{\mu_0 y}}{\mu_0\left(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2}\right)}\int_0^1 \vartheta(\zeta)\cos\lambda_0\zeta d\zeta + 2\frac{\cos\lambda_1 x e^{\mu_1 y}}{\mu_1\left(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2}\right)}\int_0^1 \vartheta(\zeta)\cos\lambda_0\zeta d\zeta = 2\frac{\cos\lambda_0 x e^{\mu_0 y}}{\mu_0^2\left(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2}\right)}(a_0\vartheta_1 + b_0N_2) + (a_0\vartheta_1 + b_0N_2) + 2\frac{\cos\lambda_1 x e^{\mu_0 y}}{\mu_1^2\left(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2}\right)}(a_1\vartheta_1 + b_1N_2),$$

где $a_0=\frac{\sin\lambda_0 x_1}{\lambda_0}$, $b = \frac{\sin\lambda_0 - \sin\lambda_0 x_1}{\lambda_0}$

$a_1=\frac{\sin\lambda_1 x_1}{\lambda_1}$, $b_1 = \frac{\sin\lambda_1 - \sin\lambda_1 x_1}{\lambda_1}$.

$$f_0(x,y) = 2\frac{\cos\lambda_0 x e^{\mu_0 y}}{\mu_0\left(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2}\right)},$$

$$f_1(x,y) = 2\frac{\cos\lambda_1 x e^{\mu_0 y}}{\mu_1\left(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2}\right)}.$$

Были проделаны численные эксперименты при определенных параметрах. Анализ численных результатов показывает убывание значения функционала на первом и втором приближениях, что соответствует смыслу теплофизических процессов происходящих при электрошлаковом переплаве (ЭШП).

3. Математическое моделирование процессов кристаллизации металла с учетом конвекции и примесей.

Пусть Γ_0 – гладкая замкнутая поверхность, лежащая внутри заданной области Ω_0 и R^3, граница которой состоит из двух замкнутых, связанных, гладких поверхностей Γ_0^+ и Γ_0^-, не имеющих самопересечений при этом Γ_0^- лежит внутри ограниченной области, границей которой является Γ_0. Поверхность Γ_0 разбивает Ω_0 на вде подобласти Ω_0^+ и Ω_0^-, которые заняты жидкой и твердой фазами соответственно в момент t=0. Требуется определить области Ω_t^+ и Ω_t^-, занимаемые твердой и жидкой фазами соответственно в момент времени t∈ [0,T], вектор скорости $\vec{V}(x,t)$, давление p(x,t), концентрацию примесей c(x,t), концентрацию примеси c(x,t), температуру жидкой $u^+(x,t)$ и твердой $u^+(x,t)$ фазы по следующим условиям:

$$\begin{cases} \frac{\partial\vec{V}(x,t)}{\partial t}+(\vec{V}\nabla)\vec{V}(x,t)+\nabla p(x,t)= \\ =\vartheta\nabla^2\vec{V}(x,t)+\vec{f}(u^+,c), \\ \nabla V^{\rightarrow}(x,t)=0,(x,t)\in D_T^+; \\ \frac{\partial u^+(x,t)}{\partial t}+(\vec{V}\nabla)u^+(x,t)- \\ -a_+^2\nabla^2u^+(x,t)=0,(x,t)\in D_T^+; \\ \frac{\partial u^-(x,t)}{\partial t}-a^2\nabla^-u^-(x,t)=0,(x,t)\in D_T^+; \\ \vec{V}(x,0)=\vec{C}(x);\ T(\vec{V},p)\vec{n}=-q(x,t)\vec{n},(x,t)\in\Gamma_t^+; \qquad (7) \\ V_n=-(1-\frac{p^-}{p^+}W_n,V_\tau=0,(x,t)\in\Gamma_t;\quad u^\pm(x,t)= \\ B^\pm(x,t),(x,t)\in\Gamma_t^+\cup\Gamma_0^-;u^\pm(x,0)=A^\pm(x); \\ u^+=u^-=T^*-\varepsilon c,k_-\frac{\partial u^-}{\partial n}-k_+\frac{\partial u^+}{\partial n}== \\ xp^+W_n,(x,t)\in\Gamma_t; \\ \frac{\partial c(x,t)}{\partial t}+(\vec{V}\nabla)c(x,t)-\gamma\nabla^2c(x,t)= \\ =0,(x,t)\in D_T^+, \\ c(x,0)=g_0(x);c(x,t)=g(x,t),(x,t)\in \\ \Gamma_t^+;\ -\alpha\frac{\partial c}{\partial n}=\beta cW_n,(x,t)\in\Gamma_t, \end{cases}$$

здесь $D_T^\pm=\{(x,t)\colon x\in\Omega_t^\pm,\ t\in(0,T)\}$, $x=(x_1, x_2, x_3)$, $\partial\Omega^+=\Gamma_t\cup\Gamma_t^+$, $\partial\Omega^-=\Gamma_t^+\cup\Gamma_t$, $\vec{n}$ – нормаль к Γ_t, направленная в сторону Ω_t^+, $T(\vec{V},p)-$ тензор напряжений с элементами $T_{ij}=-\delta_{ij}p+\nu(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\frac{\partial V_j}{\partial x_i}$, V_n и V_τ - нормальная и тангенциальная составляющие, W_n - скорость движения фронта кристаллизации в направлении нормалям $\vec{n}$; $T^*,\vartheta,\varepsilon,x,p^+,p^-,\alpha,\beta,\gamma,k_+,k_-$ известные положительные постоянные. Если $\Phi(x,t)=u^\pm(x,t)+\varepsilon c(x,t)-T^*=0$ -- уравнение поверхности Γ_t, тогда $W_n=-\Phi_t/|\nabla\Phi|$ [2].

При некоторых предположениях на функции A(x), $\vec{C}(x),B^\pm(x,t),\vec{f}(u^+,c),g(x,t)$ и $g_0(x)$ задача разрешима при малых значениях t в классе функций $u^\pm\in H^{2+a,\frac{2+a}{2}}(\overline{D_+^\pm})$, $\vec{V}\in H^{2+a,\frac{2+a}{2}}\left(\overline{D_+^\pm}\right)$, $c\in H^{2+a,\frac{2+a}{2}}\left(\overline{D_+^\pm}\right)$, $\nabla p\in H^{a,\frac{a}{2}}(\overline{D_+^\pm})$ а границы Γ_t^+ и Γ_t описываются функциями класса $H^{2+a,\frac{2+a}{2}}$.Далее, пусть $Q_T^\pm=\Omega_0^\pm\times[0,T],\Gamma_{0T}^-=\Gamma_0^-\times[0,T]$, $\Gamma_{0T}^+=\Gamma_0^+\times[0,T]$, $\Gamma_{0T}=\Gamma_0\times[0,T]$. Отметим также, что решение задачи моделирует процесс кристаллизации вещества с учетом конвективного теплообмена и переноса примеси в жидкой фазе [2]. Свободные границы Γ_t^+ и Γ_t можно представить в следующем виде $\Gamma_t=\{x=x(\omega)+\vec{n}(\omega)*p(\omega,t)\}$, ${\Gamma_t}^+=\{x=x(\theta)+\eta(\omega,t)*\vec{n}(\theta)\}$.При достаточно малых значениях чисел ε. Предложен метод решения задачи, состоящий из разложения решения в ряд по степеням чисел ε:

$$u^\pm(x,t,\varepsilon)=u_0^\pm(x)+\sum_{k=1}^\infty\varepsilon^ku_k^\pm(x,t)$$

$$p(x,t,\varepsilon)=p_0(x)+\sum_{k=1}^\infty\varepsilon^kp_k(x,t)$$

$$V_i(x,t,\varepsilon)=V_{i_0}(x)+\sum_{k=1}^\infty\varepsilon^kV_{ik},\qquad i=1,2,3;$$

$$p(\omega,t,\varepsilon)=\sum_{k=1}^\infty\varepsilon^kp_k(\omega,t),\ c(x,t)=$$

$$=c_0(x)+\sum_{k=1}^\infty\varepsilon^kc_k(x,t)$$

В работе изучено нулевое $u_0^\pm(x),\vec{V}_0(x)=(V_{10},V_{20},V_{30}),\Gamma_0,c_0(x)$ и первое приближение $(\overrightarrow{V_1},u_1^\pm,p_1,\rho_1,c_1)$ для малых чисел ε. При этом установлено, что $u\,_0^\pm(x)=A^\pm(x),\overrightarrow{V_0}(x)=\vec{C}(x)$, $C_0(x)=g_0(x)$, $\rho_1(\omega,t)\in H^{2+a,\frac{2+a}{2}}(\Gamma_{OT})$, $u_1^\pm(x,t;p)\in H^{2+a,\frac{2+a}{2}}(\overline{Q_T^\pm})$, $c_1(x,t;\rho)\in H^{2+a,\frac{2+a}{2}}(\overline{Q_T^\pm})$, причем $\rho_1(\omega,t)$ находим как неподвижную точку сжимающегося оператора M_1 :

$$M_1\rho_1=$$

$$= \frac{1}{x\rho^+}\int_0^1 (k_-\frac{\partial u_1^-}{\partial n} - k_+\frac{\partial u_1^+}{\partial n} + +f_1(x,t))dt,$$
$$x(\omega) \in \Gamma_{OT}.$$

Из условия Стефана для малых чисел ε следует разложение:

$$L(u^+, u^-, \Gamma_t, \varepsilon) = [k_-^2|\nabla u_0^-|^2 - -k_+^2|\nabla u_0^+|^2 + \varepsilon[2k_-^2(\nabla u_0^-, \nabla u_1^-) - 2k_+^2(\nabla u_0^+, \nabla u_1^+) + f_1 + x\rho^+(k_- u_{lt}^- + k_+ u_{lt}^+)] + \varepsilon^2[2k_-^2(\nabla u_0^-, \nabla u_1^-) - 2k_+^2(\nabla u_0^+, \nabla u_1^+) + f_2 + x\rho^+(k_- u_{2t}^- + k_+ u_{2t}^+)] + 0(\varepsilon^2) = 0, (x,t) \in \Gamma_{OT}.$$

Откуда следует, что

$$k_-^2|\nabla u_0^-|^2 - k_+^2|\nabla u_0^+|^2 = 0, x \in \Gamma_0;$$
$$k_-\frac{\partial u_1^-}{\partial n} - k_+\frac{\partial u_1^+}{\partial n} + f_1 = x\rho^+\frac{\partial p_1}{\partial t}, (x,t) \in \Gamma_{0T};$$
$$k_-\frac{\partial u_2^-}{\partial n} - k_+\frac{\partial u_2^+}{\partial n} + f_2 = x\rho^+\frac{\partial p_2}{\partial t}, (x,t) \in \Gamma_{0T};$$

Здесь $f_1(x,t)$ и $f_2(x,t)$ известные гладкие функции [2].

Рассмотрим второе приближение $\overrightarrow{(V_2}, u_2^{\pm}, p_2, \rho_2, c_2, \eta_2)$ задачи для малых чисел ε. Имеем:

$$\begin{cases} \frac{\partial \overrightarrow{V_2}}{\partial t} + (\overrightarrow{V_0}\nabla)\overrightarrow{V_2} + (\overrightarrow{V_1}\nabla)\overrightarrow{V_1} + (\overrightarrow{V_2}\nabla)\overrightarrow{V_0} + \nabla p_2 = \\ \vartheta\nabla^2\overrightarrow{V_2} + \left[\overrightarrow{f_u'}u_2 + \overrightarrow{f_c'}c_2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{f_{uu}''}u_1^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{f_{cc}''}c_1^2\right], \\ (x,t) \in Q_T^+, \nabla\overrightarrow{V_2} = 0, (x,t) \in Q_T^+, T(\overrightarrow{V_0}, p_2)\vec{n} + \\ T(\overrightarrow{V_1}, p_1)\vec{n} + T(\overrightarrow{V_2}, p_0)\vec{n} = 0, x \in {\Gamma_0}^+ \\ \overrightarrow{V_2}(x,0) = 0, V_{2n} = \\ \left(1 - \frac{\rho^-}{\rho^+}\right)\left[\frac{u_{2t}}{\nabla u_0} + +f_3(x,t)\right], V_{2\tau} = 0, x \in \Gamma_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_2^+}{\partial t} + (\overrightarrow{V_0}\nabla)u_2^+ + (\overrightarrow{V_2}\nabla)u_0^+ + (\overrightarrow{V_1}\nabla)u_1^+ = \\ = a_+^2\nabla^2 u_2^+, (x,t) \in Q_T^+, \frac{\partial u_2^-}{\partial t} + a_-^2\nabla^2 u_2^- = 0, \\ (x,t) \in Q_T^-, u_2^{\pm}(x,0) = 0, u_2^{\pm}(x,t) = \\ = 0, (x,t) \in \Gamma_{OT}^- \cup \Gamma_{0T}^+, u_2^+ = u_2^-, \\ \left|\nabla u_0^{\pm}(x(\omega))\right| p_2(\omega,t) + u_2(x(\omega,t) + f(x(\omega,t)) = \\ 0, (x,t) \in \Gamma_{OT} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial c_2}{\partial t} + (\overrightarrow{V_0}\nabla)c_2^+ + (\overrightarrow{V_2}\nabla)c_0^+ + (\overrightarrow{V_1}\nabla)c_1^+ - \\ \quad -\gamma\nabla^2 c_2 = 0, (x,t) \in Q_T^+,\ c_2(x,0) = \\ 0; \qquad c_2(x,t) = 0, \\ (x,t) \in \Gamma_{OT}^+, -\alpha\frac{\partial c_2}{\partial n} = \frac{{u_{2t}}^+}{|\nabla {u_0}^+|} + f_4(x,t), (x,t) \in \Gamma_{OT}, \\ \frac{\partial c_0}{\partial n}\eta(\omega,t) + c_2(x,t) + f_5(x,t) = 0, (x,t) \in \Gamma_{OT} \end{cases}$$

где $f_3(x,t), f_4(x,t)\ u\ f_5(x,t)$ - известные функции.

При заданных $\rho_2(\omega,t)$ и $\widetilde{\rho_2}(\omega,t)$ из $H^{2+a,\frac{2+a}{2}}(\Gamma_{OT})$ найдем функции $u_2^{\pm}(x,t,\rho_2)$ и $u_2^{\pm}(x,t,\widetilde{\rho_2})$ как единственные решения задачи. Затем рассмотрим оператор, действующий из $H^{2+a,\frac{2+a}{2}}(\Gamma_{OT})$ в $H^{2+a,\frac{2+a}{2}}(\Gamma_{OT})$, следующим образом $M_2\rho_2 = \frac{1}{x\rho^+}\int_0^1(k_-\frac{\partial u_2^-}{\partial n} - k_+\frac{\partial u_2^+}{\partial n} + +f_2(x,t))dt, x(\omega) \in \Gamma_0$. Справедливые оценки: $\left|u_2^{\pm}\right|_{QT\pm}^{(a+2)} \le C\left(\left|F_2^{\pm}\right|_{QT\pm}^{(a+2)} + |\rho_2|_{\Gamma_{OT}\pm}^{(a+2)}\right)$, где C – некоторая постоянная, а $F_2^+ = -(\overrightarrow{V_2}\nabla)u_0^+ - (\overrightarrow{V_1}\nabla)u_1^+$ при $(x,t) \in Q_T^+$ и $F_2(x,t) = 0$ при $(x,t) \in Q_T^-$. Отсюда следует, что $|M_2\rho_2 - M_2\widetilde{\rho_2}|_{\Gamma_{OT}}^{(a+2)} \le \tilde{C}|\rho_1 - \rho_2|_{\Gamma_{OT}}^{(a+2)}$ где $\tilde{C} = C(k_+ + k_-)/x\rho^+$ Следовательно, оператор M_2 – сжимающий, если выполняется условие

$$C(k_+ + k_-)/x\rho^+ < 1 \qquad (8)$$

Имеют место следующие утверждение:

Лемма 1. Пусть выполнено условие (8). Тогда оператор M_2, действующий из $H^{2+a,\frac{2+a}{2}}(\Gamma_{OT})$ в $H^{2+a,\frac{2+a}{2}}(\Gamma_{OT})$, имеет там неподвижную точку.

Лемма 2. В качестве второго приближения задачи можно взять решение $u_2^{\pm}(x,t), c_2(x,t), \overrightarrow{V_2}(x,t), p_2(x,t), \rho_2(x,t), \eta_2(x,t)$.

Выводы

В статье приведен обзор теории по данной тематике и смоделирован процесс кристаллизации металла.

Литература

1. Миненко А.С. Исследование одной конвективной задачи Стефана методом Ритца // Укр. мат. журнал. 2007. – 59, № 11. – С. 1546 – 1556.

2. Миненко А.С., Шевченко А.И. Об одной проблеме Стефана // Доповіді НАН України. – 2008. – № 1 – С. 26 – 30.

3. Миненко А.С. Проблема минимума со свободной границей // Искусственный интеллект. – 1998. – №2. – С. 101 – 109.

4. Данилюк И.И., Миненко А.С. Об одном подходе к анализу стационарной задачи Стефана при наличии конвекции в жидкой фазе. – В кн.: Мат. физика и Нелин.механика.- Киев, Наукова думка, 1985.- Вып. 65. – С. 39-48.

5. Миненко А.С., Шевченко А.И. Приближенный анализ стационарной конвективной задачи Стефана // Доповіді НАН України.-2010.-№5.-С.36-40.

6. Миненко А.С., Шевченко А.И. Приближенный анализ одной пространственной конвективной задачи теплопроводности //

Доповіді НАН України. – 2007. – № 7. – С. 22 – 27.

7. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973, С. 407

8. Миненко А.С., Шевченко А.И. Исследование конвективного теплопереноса в одной пространственной задаче теплопроводности // Доповіді НАН України. – 2007. – № 9. – С. 25 – 29.

9. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с

Миненко А.С., Радевич Е.В. Приближенный анализ моделирования процесса кристаллизации при электрошлаковом переплаве. *Осуществляется анализ проблемы существования гладких решений конвективной задачи Стефана с учетом условий изотермичности. Также наряду со стационарной задачей Стефана, учитывающей конвективные движения в жидкой фазе, изучается задача Стефана без учета конвекции.*

Ключевые слова: *функционал, кристаллизация, тепловой поток, управление, краевая задача, моделирование.*

Minenko A.S., Radevich E.V. Approximate analysis of modeling the process of solidification during electroslag remelting. *Carried out analysis of the problem of existence of smooth solutions to the convective Stefan problem taking into account the conditions of isothermal. Also along with the stationary Stefan problem taking into account convective motion of the liquid phase, studied Stefan problem without convection.*

Keywords*: functionality, crystallization, heat flow, control, boundary value problem, modeling.*

Статья поступила в редакцию 20.03.2018
Рекомендована к публикации д-ром техн. наук В.Н. Павлышом