УДК 512.579

Продолжение частичной операции в универсальных алгебрах

М.С. Коробов[1], А.О. Петриков[2]
ООО «АНКАД» [1]
НИУ МИЭТ[2]
korobovms94@gmail.com[1], masterpetr@mail.ru[2]

Коробов М.С., Петриков А.О. Продолжение частичной операции в универсальных алгебрах. *В данной статье рассматриваются продолжение частичных операций для полугрупп, полигонов и инъективных алгебр. Приведены некоторые необходимые и некоторые достаточные условия возможности продолжения частичных полигонов над полурешёткой.*

Ключевые слова: *частичная операция, частичный полигон, частичная универсальная алгебра, инъективная, полурешётка.*

Введение

Универсальные алгебры с заданными на них частичными операциями (частичные универсальные алгебры) встречаются во многих областях математики. Напомним, что частичная операция – это операция, определенная, возможно, не на всех наборах аргументов, например, операция вычитания на множестве натуральных чисел, операция деления на множестве действительных чисел (запрещено деление на нуль). Нам бы хотелось так продолжить операцию, чтобы в алгебре сохранялись определённые свойства, например, чтобы ассоциативность частичной полугруппы продолжала иметь место после того, как частичная операция станет полной. Продолжение операции на частичных полугруппах изучалось, в работах [1], [2].

Основные определения

В данной статье мы в основном занимаемся продолжением операции в частичных полигонах над полугруппами.

Приведём основные определения, необходимые для дальнейшего исследования.

Определение 1. n-арной операцией на множестве S называется отображение $S^n \to S$.

Определение 2. Частичной n-арной операцией на множестве S называется отображение подмножества $P \subseteq S^n$ в S. При этом будем считать, что для наборов элементов из множества $S^n \setminus P$ не существует результата действия этой операции.

Определение 3 ([3]). Полугруппой называется множество с одной бинарной ассоциативной операцией, т.е. $(ab)c = a(bc)$ для любых элементов a,b,c.

Определение 4 ([4]). Полурешётка – частично упорядоченное множество, в котором каждая пара элементов имеет точную нижнюю грань.

Замечание 5. Хорошо известно, что полурешётка - это в точности коммутативная полугруппа идемпотентов Связь между порядком и операцией определяется соотношениями $a \cdot b = \inf\{a,b\}$, $a \le b \Leftrightarrow ab = ba = a$.

Определение 6. Полигон ([5]) над полугруппой S – это множество X вместе с отображением $X \times S \to X$ таким, что $x(st) = (xs)t$ для всех $x \in X$, $s,t \in S$. Частичный полигон ([6]) – множество X, для которого задано частичное отображение $X \times S \to X$, причём для любых $x \in X$, $s,t \in S$ произведения $x(st)$ и $(xs)t$ либо оба не существуют, либо существуют и равны друг другу.

Замечание 7 ([7]). Полигон над полурешёткой (даже частичный) является частично упорядоченным множеством со следующим отношением порядка: $x \le y \Leftrightarrow x \in yS^1$.

Напомним полученные ранее результаты по продолжению частичной операции в полугруппах.

Теорема 8 (**[2,** теорема 10]). Пусть $S = (\mathbb{Z}_n,\ \{0\}, \cdot)$ – частичная мультипликативная полугруппа ненулевых вычетов по модулю n. Частичная операция на S продолжается до полной ассоциативной операции в том и только том случае, если выполнено одно из следующих условий: 1) n чётно, 2) $n = p^k$, где $k \in \mathbb{N}$, а p – нечётное простое число.

Теорема 9 ([**2,** теорема 11]). Частичная операция на полугруппе S всех ненулевых матриц размера 2×2 над полем F продолжается до полной ассоциативной операции в том и только том случае, если $|F|=2$.

В следующей теореме мы пользуемся символами $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{H}$ для обозначения отношений Грина на полугруппе [3].

Теорема 10 ([**2,** теорема 5]). Пусть $S=\mathcal{M}^0(G,I,\Lambda,P)$ – вполне 0-простая полугруппа, $M=S\setminus\{0\}$ - частичная полугруппа ненулевых элементов из S. Если $*$ – полная ассоциативная операция, продолжающая частичную операцию $\cdot$ на M, то $\mathcal{R}$-, $\mathcal{L}$- и $\mathcal{H}$-классы полугруппы $(M,*)$ являются объединениями соответственно, $\mathcal{R}$-, $\mathcal{L}$-, $\mathcal{H}$-классов полугруппы S, причём если $\tilde{R}$ и $\tilde{R}'$ - $\mathcal{R}$-классы полугруппы $(M,*)$, $\tilde{R}=\bigcup_{i\in I_1} R_i$, $\tilde{R}'=\bigcup_{i\in I_1'} R_i$, где R_i - $\mathcal{R}$-классы полугруппы S, то между множествами I_1 и I_1' существует взаимно однозначное соответствие. Аналогичное утверждение имеет место для $\mathcal{L}$-классов.

Далее мы получим некоторые условия продолжаемости частичных полигонов до полных. Достаточное условие даёт следующая теорема.

Теорема 11. Пусть X – частичный полигон над полурешёткой S. Если существует элемент $x_0\in X$ такой, что $x_0S\subseteq\{x_0\}$, то полигон X продолжается до полного.

Доказательство. Продолжим операцию на частичном полигоне следующим образом: если xs существует, то полагаем $x\cdot s=xs$, иначе $x\cdot s=x_0$. Проверим аксиому полигона: $(x\cdot s)\cdot t=x\cdot(st)$. Если $x(st)$ существует, то $(xs)t$ также существует и они равны. В этом случае $x\cdot(st)=x(st)=(xs)t=(x\cdot s)\cdot t$. Пусть теперь $(xs)t$ и $x(st)$ не существуют. Рассмотрим два случая. Во-первых, если xs существует, то $x\cdot(st)=x_0$ и $(x\cdot s)\cdot t=xs\cdot t=x_0$. Во-вторых, если xs не существует, то $x\cdot(st)=x_0$ и $(x\cdot s)\cdot t=x_0t=x_0$.

Из теоремы 11 можно сделать три следствия.

Следствие 12. Если в частично упорядоченном множестве $(X,\le)$ существует минимальный элемент, то частичный полигон X продолжается до полного.

Следствие 13. Если в $(X,\le)$ нет бесконечных убывающих цепей элементов, то частичный полигон X продолжается до полного.

Следствие 14. Если X – конечное множество, то частичный полигон X продолжается до полного.

Теорема 15. Если в полурешётке S нет бесконечных убывающих цепей элементов, то и в любом полигоне над S также нет бесконечных убывающих цепей элементов.

Доказательство. Пусть в S-полигоне X найдется убывающая цепь $x_1>x_2>\ldots$. По определению порядка на полигоне X существуют такие элементы $s_1,s_2,\ldots\in S$, что $x_{i+1}=x_is_i$ при всех $i\in\mathbb{N}$. Положим $t_i=s_1s_2\ldots s_i$ для каждого $i\in\mathbb{N}$. Докажем, что последовательность (t_n) убывающая. Так как $t_{i+1}=t_is_{i+1}$, то $t_{i+1}\le t_i$. Нетрудно проверить, что $x_{i+1}=x_1t_i$ и $x_{i+2}=x_1t_{i+1}$. Поэтому, если $t_{i+1}=t_i$, то $x_{i+1}=x_{i+2}$, что невозможно. Таким образом, $t_{i+1}<t_i$. Мы получили бесконечную убывающую последовательность $t_1>t_2>\ldots$ элементов из S, а это противоречит условию теоремы.

Используя эту теорему, можно получить ещё одно достаточное условие продолжаемости частичного полигона над полурешёткой до полного.

Теорема 16. Если в полурешётке S нет бесконечная убывающих цепей элементов, то любой частичный полигон над S продолжается до полного.

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы 15 и следствия 13.

Определение 17. Для любого частично упорядоченного множества A и элемента $a\in A$ введём обозначение $a^\Delta=\{b\in A\mid b\ge a\}$ (*верхний конус* элемента a).

В следующей теореме мы находим необходимое условие того, чтобы *любой* полигон над полурешёткой продолжался до полного.

Теорема 18. Если любой частичный полигон над полурешёткой S продолжается до полного, то в полурешётке S не существует бесконечных убывающих ограниченных снизу цепей элементов.

Доказательство. Предположим, что в полурешётке S существует бесконечная убывающая цепь $s_1>s_2>\ldots$, ограниченная снизу элементом $s_\infty\in S$ (то есть для любого натурального i выполняется неравенство $s_i>s_\infty$). Надо доказать, что в этом случае существует частичный полигон над S, который не может быть продолжен до полного.

Пусть $U=\bigcup_{n=1}^{\infty} s_n^{\Delta}$. Очевидно, U – подполурешётка полурешётки S. Для элемента $u\in U$ положим $k(u)=\min\{i \mid u\geq s_i\}$.

Возьмём какое-нибудь счётное множество $X=\{x_1,x_2,\ldots\}$ (элементы x_i различны) и сделаем его частичным полигоном над полурешёткой S следующим образом. Произведение x_j*s определим для всех $x_j\in X$ и элементов $s\in U$. А именно, положим

$$x_j*s=\begin{cases} x_{\max\{j,k(s)\}}, \text{ если } s\in U, \\ \text{не определено, если } s\notin U. \end{cases}$$

Проверим, что произведения $x_j*(st)$ и $(x_j*s)*t$ существуют или не существуют одновременно. Для этого достаточно доказать, что $st\in U \Leftrightarrow s,t\in U$ при любых $s,t\in S$. Действительно, если $st\in U$, то $st\geq s_i$ при некотором i. В этом случае $s,t\geq s_i$, а значит, $s,t\in U$. Наоборот, если $s,t\in U$, то $s\geq s_i$, $t\geq s_j$ при некоторых i,j. Но тогда $st\geq s_i s_j=s_{\max\{i,j\}}$, т.е. $st\in U$. Итак, произведения $x_j*(st)$ и $(x_j*s)*t$ либо оба существуют, либо не существуют. Докажем, что эти произведения совпадают, если оба существуют.

Докажем, что $k(uv)=\max\{k(u),k(v)\}$ при $u,v\in U$. Действительно, пусть $k(u)=p$, $k(v)=q$, $m=\max\{p,q\}$. Имеем: $u\geq s_p$, $v\geq s_q$. Отсюда $uv\geq s_p s_q=s_{\max\{p,q\}}=s_m$, поэтому $k(uv)\leq m$. Если $k(uv)<m$, то $k(uv)\leq m-1$, откуда $uv\geq s_{m-1}$, поэтому $u,v\geq s_{m-1}$, а значит, $k(u),k(v)\leq m-1$, то есть $p,q\leq m-1$, и мы получаем, что $m\leq m-1$, а это явное противоречие. Итак, $k(uv)=\max\{k(u),k(v)\}$.

Пусть $x_j\in X$ и $s,t\in U$. Пусть $p=k(s)$, $q=k(t)$, $m=\max\{p,q\}$. Тогда $\max\{j,k(st)\}=\max\{j,\max\{k(s),k(t)\}\}=\max\{j,m\}$, поэтому $x_j*(st)=x_{\max\{j,k(st)\}}=x_{\max\{j,m\}}$, $(x_j*s)*t=x_{\max\{j,k(s)\}}*t=x_{\max\{j,k(s),k(t)\}}=x_{\max\{k,m\}}$. Таким образом, $x_j*(st)=(x_j*s)*t$, т.е. X – частичный полигон. Осталось доказать, что он не продолжается до полного.

Предположим, что частичная операция на X может быть продолжена таким образом, что X станет полигоном над S. Тогда мы будем иметь $x_1*s_\infty=x_k$ при некотором k. Отсюда получаем:

$$x_{k+1}=x_k*s_{k+1}=(x_1*s_\infty)*s_{k+1}=x_1*(s_\infty s_{k+1})=x_1*s_\infty=x_k,$$

а это противоречит выбору множества X.

Понятие частичной полугруппы и частичного полигона над полугруппой могут быть существенно обобщены до понятия частичной универсальной алгебры, удовлетворяющей некоторому тождеству (или совокупности тождеств). В случае частичных полугрупп это было тождество ассоциативности, а в случае полигонов – совокупность тождеств $x(st)=(xs)t$.

Определение 19. Пусть A – частичная универсальная алгебра некоторой сигнатуры Σ (напомним, что сигнатура – это совокупность символов алгебраических операций; при этом для каждого символа должна быть указана арность операции, которую он будет представлять). Пусть $u(x_1,\ldots,x_n)$, $v(x_1,\ldots,x_n)$ – термы, записанные в сигнатуре Σ. Будем говорить, что в алгебре A выполняется тождество $u(x_1,\ldots,x_n)=v(x_1,\ldots,x_n)$, если для любых элементов $a_1,\ldots,a_n\in A$ либо $u(a_1,\ldots,a_n)$ и $v(a_1,\ldots,a_n)$ оба не существуют, либо оба существуют и $u(a_1,\ldots,a_n)=v(a_1,\ldots,a_n)$.

Понятие гомоморфизма в случае частичных алгебр выглядит следующим образом.

Определение 20. Пусть A и B – частичные алгебры одной сигнатуры. Отображение $\varphi:A\to B$ (обычное, не частичное) называется гомоморфизмом частичных алгебр, если для любой частичной n-арной операции f из сигнатуры и любых элементов $a_1,\ldots,a_n\in A$ из существования $f(a_1,\ldots,a_n)$ следует существование $\varphi(f(a_1,\ldots,a_n))$ и равенство $\varphi(f(a_1,\ldots,a_n))=f(\varphi(a_1),\ldots,\varphi(a_n))$.

То есть, можно сказать, что гомоморфизм частичных алгебр сохраняет операции на тех наборах, на которых эти операции определены.

Инъективность частичной универсальной алгебры определяется так же, как в случае обычных алгебр. Приведём это определение, Ниже в теореме 22 мы установим связь между понятием инъективности и свойством продолжаемости частичной операции.

Определение 21. Частичная алгебра A называется инъективной, если для любых алгебр P и Q, мономорфизма $\alpha:P\to Q$ и гомоморфизма $\varphi:P\to X$ существует гомоморфизм $\psi:Q\to X$ такой, что следующая диаграмма (см. рис. 1) коммутативна:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\varphi"'] & Q \arrow[d, dashed, "\psi"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Рисунок 1 – Диаграмма инъективности

Теорема 22. Если частичная алгебра инъективна и удовлетворяет совокупности тождеств, то все частичные операции этой алгебры продолжаются до полных с сохранением этих тождеств.

Доказательство. Пусть A – частичная инъективная алгебра некоторой сигнатуры Σ. Возьмём элемент $\theta \notin A$ и построим новую алгебру (полную) на множестве $A \cup \{\theta\}$. Продолжим операции алгебры A на множество $A \cup \{\theta\}$ следующим образом. Пусть $f : A^n \to A$ – частичная операция на A, где $f \in \Sigma$. Определим операцию $\tilde{f} : \tilde{A}^n \to \tilde{A}$ (полную) по следующему правилу:

$$\tilde{f}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{cases} f(a_1, a_2, \ldots, a_n), & \text{если } a_1, a_2, \ldots, a_n \in A \text{ и } f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ существует}, \\ \theta, & \text{если значение не существует или } a_k = \theta \text{ для некоторого } k. \end{cases} \quad (1)$$

Ясно, что $\tilde{f}$ – продолжение операции f. Так как процедура продолжения проделана для каждого символа $f \in \Sigma$, то мы получаем полную алгебру сигнатуры Σ, построенную на множестве $\tilde{A}$. На множестве $\tilde{A} = A \cup \{\theta\}$ можно определить также значения термов. Если $u(x_1, \ldots, x_n)$ – терм сигнатуры Σ, и $a_1, \ldots, a_n \in A$, то $\tilde{u}(a_1, \ldots, a_n)$ будет обозначать значение терма u на наборе $a_1, \ldots, a_n$, при вычислении которого вместо операций f берутся операции $\tilde{f}$. Операции алгебры $\tilde{A}$ являются продолжениями соответствующих операций на A. Но это внешнее продолжение, а не внутреннее – здесь мы используем элемент θ, не принадлежащий множеству A. Ниже мы построим внутреннее продолжение.

Рассмотрим естественное вложение алгебры A в $A \cup \{\theta\}$, а также тождественное отображение $1_A : A \to A$. Расположим их в виде диаграммы. Поскольку алгебра A инъективна, то существует гомоморфизм φ, для которого диаграмма коммутативна (см. рис. 2):

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\subset"] \arrow[dr, "1_A"'] & A \cup \{\theta\} \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Рисунок 2 – Диаграмма инъективного продолжения

Положим $a^* = \varphi(\theta)$. Для $f \in \Sigma$ и $a_1, \ldots, a_n \in A$ положим $f^*(a_1, \ldots, a_n) = \varphi(\tilde{f}(a_1, \ldots, a_n))$. Нетрудно видеть, что f^* является продолжением операции f, причём это продолжение внутреннее, так как $f^*(a_1, \ldots, a_n) \in A$ при любых $a_1, \ldots, a_n \in A$. Операция f^* всюду определённая (полная). Алгебру с операциями f^* обозначим через A^*. Осталось доказать, что тождества алгебры A выполняются в A^*.

Поскольку на множестве A теперь определены операции f^* (полные), соответствующие символам $f \in \Sigma$, то на A можно определить также значения термов. Если $u(x_1, \ldots, x_n)$ – терм и $a_1, \ldots, a_n \in A$, то $u^*(a_1, \ldots, a_n)$ будет обозначать значение терма u на наборе $a_1, \ldots, a_n$, при вычислении которого вместо операций f используются операции f^*.

Докажем, что для любого терма $u(x_1, \ldots, x_n)$ и любых элементов $a_1, \ldots, a_{i-1}, a^*, a_{i+1}, \ldots, a_n \in A$ выполняется равенство

$$u^*(a_1, \ldots, a_{i-1}, a^*, a_{i+1}, \ldots, a_n) = a^*. \quad (2)$$

Ясно, что достаточно доказать данное утверждение в случае, когда $u \in \Sigma$. Выполним преобразования, учитывая, что φ – гомоморфизм, $\varphi(a) = a$ при $a \in A$ и $\varphi(\theta) = a^*$:

$$u^*(a_1, \ldots, a_{i-1}, a^*, a_{i+1}, \ldots, a_n) = u^*(\varphi(a_1,) \ldots, \varphi(\theta), \ldots, \varphi(a_n)) = \varphi(u^*(a_1, \ldots, \theta, \ldots, a_n) = \varphi(\theta) = a^*.$$

Докажем, что если для некоторого терма $u(x_1, \ldots, x_n)$ значение $u(a_1, \ldots, a_n)$ не определено, то $u^*(a_1, \ldots, a_n) = a^*$.

Действительно, если $u(a_1, \ldots, a_n)$ не определено, то при вычислении значения этого терма на элементах из $A \cup \{\theta\}$ мы получим θ, поэтому $u(a_1,\ldots,a_n) = \theta$, а так как $u^* = \varphi(u)$, мы получим, что $u^*(a_1,\ldots,a_n) = \varphi(\theta) = a^*$.

Пусть $u(x_1,\ldots,x_n)$ и $v(x_1,\ldots,x_n)$ – термы сигнатуры Σ и в алгебре A выполняется тождество $u = v$ в смысле определения 19. Пусть $a_1,\ldots,a_n$ – любые элементы из A. Если значение $u(a_1,\ldots,a_n)$ определено, то по определению 19 $v(a_1,\ldots,a_n)$ также определено и $u(a_1,\ldots,a_n) = v(a_1,\ldots,a_n)$. Если $u(a_1,\ldots,a_n)$ не определено, то $v(a_1,\ldots,a_n)$ также не определено, поэтому по только что доказанному мы имеем $u^*(a_1,\ldots,a_n) = a^*$ и $v^*(a_1,\ldots,a_n) = a^*$. Таким образом, $u^*(a_1,\ldots,a_n) = v^*(a_1,\ldots,a_n)$. Это означает, что в алгебре с носителем A и операциями f^* выполнено тождество $u = v$.

Следствие 23. Любой частичный инъективный полигон над полугруппой может быть продолжен до полного.

Доказательство. Полигон X над полугруппой S можно рассматривать как универсальную алгебру с носителем X и множеством унарных операций $\{f_s \mid s \in S\}$ умножения на элемент из S: $f_s : X \to X$, $f_s : x \mapsto xs$. При этом алгебра задается множеством тождеств $f_t(f_s(x)) = f_{st}(x)$. Остаётся применить теорему 22.

Вывод

В результате исследований приведены некоторые необходимые и достаточные условия возможности продолжения частичных полигонов над полурешёткой.

Литература

1.Ляпин Е.С., Евсеев А.Е., Частичные алгебраические действия. Издательство «Образование», Санкт-Петербург, 1991.

2.Петриков А.О., Продолжение частичной полугрупповой операции, Математические заметки СВФУ, 2017 (в печати).

3.Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, Том 1, Издательство «Мир», Москва, 1972, 283 стр.

4.Гретцер Г., Общая теория решёток. Мир, Москва, 1982.

5.Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V., Monoids, Acts and Categories Berlin: Walter de Gruyter, 2000, 529 p.

6.Апраксина Т.В., Максимовский М. Ю., Полигоны и частичные полигоны над полурешётками, Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Математика. Механика. Информатика, 12, 1 (2012), 3-7.

7.Кожухов И.Б., Максимовский М.Ю., Об автоматах над полурешётками, Системный анализ и информационно-управляющие системы: сборник научных трудов под редакцией проф. В.А. Брахоткина. М.: МИЭТ, 2006. - С. 19-34.

Коробов М.С., Петриков А.О. Продолжение частичной операции в универсальных алгебрах. *В данной статье рассматриваются продолжение частичных операций для полугрупп, полигонов и инъективных алгебр. Приведены некоторые необходимые и некоторые достаточные условия возможности продолжения частичных полигонов над полурешёткой.*

Ключевые слова: *частичная операция, частичный полигон, частичная универсальная алгебра, инъективная, полурешётка.*

Korobov M.S., Petrikov A.O. Continued partial operations in universal algebras. *This paper analyzes the continuation of partial operations for semigroups, acts, and injective algebras. Some necessary and some sufficient conditions of the existence of continuation of partial acts over a semilattice are given.*

Keywords: *partial operation, partial act, partial universal algebra, injective algebra, semilattice.*

Статья поступила в редакцию 22.02.2018
Рекомендована к публикации д-ром физ.-мат. наук А.С. Миненко