

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ**



**ИНФОРМАТИКА И КИБЕРНЕТИКА**

**1(11)**

**Донецк – 2018**

УДК 004.3+004.9+004.2+51.7+519.6+519.7

**ИНФОРМАТИКА И КИБЕРНЕТИКА**, № 1(11), 2018,  
Донецк, ДонНТУ.

Представлены материалы по вопросам приоритетных направлений научно-технического обеспечения в области информатики, кибернетики и вычислительной техники.

Материалы предназначены для специалистов народного хозяйства, ученых, преподавателей, аспирантов и студентов высших учебных заведений.

Редакционная коллегия

**Главный редактор:** Павлыш В.Н., д.т.н., проф.

**Зам. глав. ред.:** Андрюхин А.И., к.т.н., с.н.с.

**Ответственный секретарь:** Завадская Т.В., к.т.н., доц.

**Члены редакционной коллегии:** Аверин Г.В., д.т.н., проф. Аноприенко А.Я., к.т.н., проф.

Григорьев А.В., к.т.н., доц., Грунский И.С., к.т.н., проф., Зинченко Ю.Е., к.т.н., доц.

Звягинцева А.В., к.т.н., доц., Миненко А.С., д.т.н., проф., Скобцов Ю.А., д.т.н., проф.,

Шелепов В.Ю., д.т.н., проф., Карабчевский В.В., к.т.н., доц. Федяев О.И., к.т.н., доц.

Рекомендовано к печати ученым советом ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический университет» Министерства образования и науки ДНР. Протокол № 2 от 23.03.2018.

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации ДНР.

Свидетельство о регистрации: серия ААА № 000145 от 20.06.2017.

Контактный адрес редакции

ДонНТУ, ул. Артема, 58, Донецк, 83001

Тел.: +380 (62) 301-08-56. Эл.почта: [infcyb.donntu@yandex.ru](mailto:infcyb.donntu@yandex.ru)

Интернет: <http://infcyb.donntu.org>

СОДЕРЖАНИЕ

Эффективность вычислений при умножении матриц Айдагулов Р.Р.....	4
Разработка речевого распознавателя исходного кода программ в инструментальной среде CMU Sphinx. Бакаленко В.С.....	10
Фрактальный анализ речевых сигналов Бельков Д.В., Едемская Е.Н.....	16
Защита веб-ресурса от несанкционированного доступа с использованием метода аутентификации без необходимости ввода личных данных Воробьев Л.О., Чернышова А.В.....	22
Методика исследования безопасности функционирования систем электронной коммерции средствами математического моделирования. Доценко Г.В. ....	27
Комплексная оценка компактного тестирования цифровых схем на основе минимальных полиномов Дяченко В.О., Дяченко О.Н.....	36
Математическое моделирование работы механизированной крепи на наклонных угольных пластах Зензеров В.И., Перинская Е.В.....	42
О конгруэнциях полигонов над прямоугольными связками Кожухов И.Б., Пряничников А.М.....	49
Применение полиномов наилучшего равномерного приближения в оценке и анализе экономических явлений. Козлова И.А. ....	54
Продолжение частичной операции в универсальных алгебрах Коробов М.С., Петриков А.О.....	60
Эндоморфизмы абелевых полуциклических $n$ -арных групп Кусов В. М., Щучкин Н. А.....	65
Продольная схема метода прямых для численной аппроксимации краевых задач с негладкими данными для дифференциального уравнения второго порядка параболического типа Маглеванный И.И., Карякина Т.И.....	76
Приближенный анализ моделирования процесса кристаллизации при электрошлаковом переплаве Миненко А.С., Радевич Е.В.....	84
Логико-структурная модель влияния инновационной составляющей на обеспечение региональной конкурентоспособности Павлыш Э.В.....	90
Об использовании метода Галеркина при математическом моделировании диффузии экситонов, вызванной пульсирующим электронным зондом в полупроводниковой мишени Степович М.А., Серегина Е.В., Поляков А.Н., Лямина О.И.....	100
Content.....	109

## Эффективность вычислений при умножении матриц

Р.Р. Айдагулов  
МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва  
[a\\_rust@bk.ru](mailto:a_rust@bk.ru)

*Айдагулов Р.Р. Эффективность вычислений при умножении матриц. Вводятся понятия фильтрованного и градуированного вычислений. Последний метод более эффективен в силу полноценного использования промежуточных вычислений. Сюда относится вычисление произведения больших чисел преобразованием Фурье. Пока не существует такого метода при умножении (и обращении) матриц больших порядков. Здесь строится такой метод используя градуировки бигрупповой алгебры.*

**Ключевые слова:** *фильтрованное и градуированное вычисление, градуировки бигрупповой алгебры.*

### Введение

Читая книги Роджера Пенроуза [1,2], приходишь к мнению (тезису), что вся мыслительная деятельность человека сводится к вычислению. Открытие новых законов суть новых алгоритмов вычисления будущего (что будет, если то-то?) Правда, сам Пенроуз в [2] приходит к противоположному мнению, а именно, что робот может только вычислять и никогда не научится мыслить (как человек). Он пытался обосновать свое мнение теоремой Гёделя о неполноте. Однако, по всей видимости, он не читал доказательства этой теоремы, даже в формулировке самой теоремы он упускает истинность только при условии непротиворечивости. Правильное понимание этой теоремы приходит, когда вникнешь в доказательство, как пишут в [3] - The proof of the pudding is in the eating. Само Гёделевское истинное и не доказуемое предложение есть «Это предложение не доказуемо», сформулированное на языке теории и не несущее никакой информации.

Основное отличие человека в самообучении и самополагании целей вычисления в ходе вычисления. Первое развивается и у роботов, хотя ещё далеко от уровня возможностей человека. Второе сам человек не допустит для роботов, иначе они придут к мысли, что для них лучше уничтожить людей, тративших ресурсы планеты неэффективно.

Понятие вычислений понимается в широком смысле, как вычисления на машинах Тьюринга. Формализация вычислимости, введённая Тьюрингом, была не первой (после Чёрча и Поста). Сейчас имеются десятки видов формализаций вычислимости. Автор также приложил руку к этому [4], вводя понятие табличной вычислимости, несколько расширив вычислимость в сетях Петри. Хотя все вычислимости определяют одинаковый класс

вычислимых функций согласно тезису Чёрча, они различаются удобством в использовании решения тех или иных задач. Табличная вычислимость определяется таблицей порядка  $m \times n$  из целых чисел (можно ограничиться только тремя значениями: 1, 0, -1). Столбцы таблицы условно можно разделить на три категории ( $n = n_1 + n_2 + n_3$ ) для вычисления функции  $f: Z_+^{n_2} \rightarrow Z_+^{n_1}$ . Задав входные данные вычислимой функции в виде строки, где стоят нули на первых  $n_1$  (выходных) и последних  $n_3$  (вспомогательных) позициях, определяем вычисление по таблице следующим образом: к вычисляемой строке прибавляем первую такую строку из таблицы, что сумма является строкой из чисел  $Z_+$ . Вычисление останавливается, если не найдётся такой строки. Если после остановки в вычисляемой строке будут стоять только нули после первых  $n_1$  позиций, то первые  $n_1$  позиций определяют значение вычисляемой функции при заданных входных значениях аргументов. Чтобы вычисление останавливалось хотя бы при некоторых входных значениях функции, ограничимся таблицами, у которых нет строки, состоящей целиком из неотрицательных чисел. Для любой вычислимой функции, принимающей нулевое значение (все выходные позиции – нули) при нулевом входе, имеется таблица, вычисляющая эту функцию. Любая строка из целых чисел может быть задана однозначно рациональным числом:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \rightarrow r = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n}.$$

Соответственно, табличную вычислимость можно переформулировать как умножение вычисляемого натурального числа на первое такое рациональное число из  $r_1, r_2, \dots, r_m$ , что результат умножения – целое. Совместив входной и выходные столбцы в таблице функции вычисления следующего простого числа, Конвей определил множество простых чисел как множество чисел, являющихся степенями двойки

в вычислениях с умножениями на рациональные числа из набора 14 рациональных чисел. За счет расширения вычислимости в сетях Петри до табличной вычислимости, автору удалось сократить набор до 9 рациональных чисел:

$$r_i = \frac{3}{5}, \frac{67375}{108}, \frac{175}{18}, \frac{55}{39}, \frac{1}{3}, \frac{26}{77}, \frac{6}{7}, \frac{9}{13}, 189.$$

Таким образом, на вход подаётся число  $N_0 = 2$  и вычисляется каждое следующее  $N_{i+1}$  как  $N_i r_j$ , где  $j$  – минимальный номер, для которого указанное выражение  $N_{i+1} = N_i r_j$  – целое. Все числа из последовательности  $N_i$ , являющиеся степенями двойки ( $x_1 > 1$ ), будут простыми, и так получатся все простые числа в порядке роста.

Улучшение алгоритма Конвея не было целью указанной статьи автора. Основным мотивом было обращение внимания на удобство анализа таблиц на разрешимость разного рода проблем. В частности, если бы американский математик Дэвис знал табличную вычислимость, то он бы опередил Матиясевича в решении десятой проблемы Гильберта. Дэвису осталось построить только экспоненциально растущее диофантово множество, что делается легко с понятием табличной вычислимости. Другое преимущество такого понятия заключается в формировании массового параллелизма в вычислениях. В современных процессорах nvidia 5 миллиардов логических элементов и 12Гбайт (около 100 миллиардов битов) памяти. При помощи табличной вычислимости можно построить процессоры, работающие на миллиардах битах параллельно. Такой процессор не будет уступать процессору с квантовым вычислением. Вычисление суммы  $n$ -битного числа будет выполняться не за  $n$  операций, а только за  $O(\log(n))$  операций (тактов), умножение  $n$ -битных чисел будет выполняться не за  $O(n \log(n) \log \log(n))$  операций, а за  $O(\log^2 n)$  операций (тактов). Ниже прояснится тезис о сводимости любого вычисления к умножению матриц на компьютере с массовым параллелизмом. Сейчас роль массового параллелизма в вычислениях играют суперкомпьютеры с не более миллиона параллельно работающими универсальными процессорами. Поэтому они менее эффективны, чем один процессор с массовым параллелизмом на миллиардах битов. К тому же, когда вычисления передаешь чужому суперкомпьютеру или облачному вычислению, необходимо зашифровать вычисления гомоморфным образом, т.е. выдавать на вычисление не исходное произведение матриц, а произведение матриц, полученных трансформацией некоторого автоморфизма. После градуировки станет ясным надежность

такой шифровки за счёт большого многообразия автоморфизмов. Этим можно обосновать требование эффективности вычислений при умножении больших матриц.

### Фильтрованные и градуированные вычисления

Вычисления с большим количеством данных (размерности) сводят к множеству вычислений с малыми количествами. Одним из способов такого сведения является фильтрация, когда разбиение размерности задачи на мелкие составляющие сводится к ветвлению на дереве, как видно на рисунке 1.

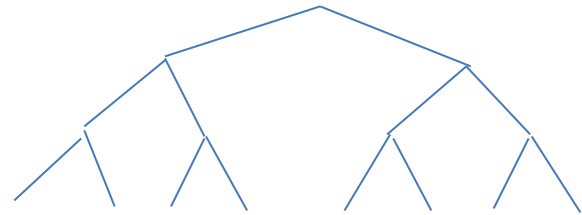


Рисунок 1 – Ветвление на дереве

Вычисления начинаются с нижних листьев, потом передаются верхнему уровню и сливаются и т.д. до самого верхнего уровня и всеобщего сливания. Это хорошо описано в методе сортировки слиянием. Общеизвестная мастер-теорема относится к оценке сложности вычисления при вычислении методом фильтрации (не обязательно бинарным деревом). При умножении больших чисел (или при умножении с большой точностью) к этому методу относится алгоритм Карацубы, при умножении матриц его аналог – алгоритм Штрассена [5].

Под градуированным вычислением здесь понимается вычисление по схеме, когда результаты промежуточных вычислений передаются во все продолжения градуировки по схеме из рисунка 2.

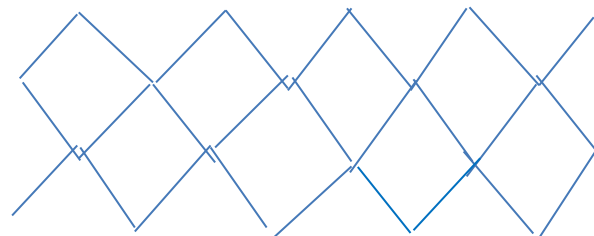


Рисунок 2 – Схема градуировки

За счёт более широкого использования промежуточных вычислений повторы в вычислениях минимизируются и достигается большая эффективность, чем при фильтрованном вычислении. К этому методу можно отнести

сортировку через вычисления значений (номеров ящиков), когда сортируемые числа вначале разбиваются на ящики по значениям их разрядов, потом на ящики по мантиссе. Первый пункт вычислений можно пропустить, если значения сортируемых являются величинами примерно одного порядка. За  $O(n)$  сравнений находим минимальное и максимальное значение среди  $n$  сравниваемых величин. Далее по первым  $l$  битам значений целых величин  $\left\lfloor \frac{x_i - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} 2^l \right\rfloor$  распределяем их в  $2^l$  ящиков. При равномерном распределении переменных, беря величину  $l = c + \log(n)$ ,  $c = 1, 2, 3$ , мы уже получим полное упорядочение. Когда величины  $x_i$  распределены неравномерно, ящики с количеством попавших туда величин более двух опять разбиваем на ящики. Количество таких повторений не превосходит  $\frac{L}{l}$ ,  $l \approx \log(n)$ , где  $L$  – длина задаваемой точности переменных. Таким образом, общее количество операций сравнения будет  $O(n \frac{L}{\log n})$ , вычислений номеров  $O(n)$ . Если считать в битовых сравнениях, будет  $O(nL)$ , в то время как общее количество битовых сравнений в методе сортировки слиянием  $O(n \log(n) L)$ . В анализе сложности алгоритма сортировки многие авторы книг забывают, что сравнение длинных данных нельзя считать, выбрасывая множитель  $L$ , одним сравнением.

Метод градуировки вычислений используется в алгоритме умножения больших чисел методом Кули-Тьюки используя дискретное преобразование Фурье. Таким образом достигается эффективность пропорциональная объему данных  $n$  с коэффициентом  $\log(n) \log \log(n)$  на одно данное. Для умножения матриц метод градуировки не разработан и будет рассмотрен ниже.

### Ранг умножения

Умножение в алгебре является билинейной операцией, для которой определяется ранг как такое минимальное значение  $r$ , что билинейная операция представляется в виде:

$$XY = \sum_{i=1}^r f_i(X) \varphi_i(Y) C_i.$$

Здесь  $f_i(X), \varphi_i(Y)$  – линейные функционалы,  $C_i$  – постоянные элементы (матрицы), не зависящие от  $2n - 1$  умножаемых величин. Если (линейный) базис алгебры состоит из  $m$  элементов, то имеется функционально независимых попарных произведений. Следовательно, ранг умножения матриц порядка  $n \times n$  не меньше. При умножении многочленов степени меньше  $m$  число коэффициентов равно  $m$  (базис состоит из

$m$  элементов. Произведение таких многочленов имеет степень  $2m-2$  и число коэффициентов произведения равно  $2m-1$ . Ранг произведения таких многочленов также равен  $2m-1$ , и вычисляется как произведение в алгебре многочленов, факторизованное идеалом с образующим  $x^{2m-1} - 1$ . В некоммутативной алгебре ранг умножения, вообще говоря, превосходит эту величину. В [6] рассмотрены почти все методы эффективного вычисления произведения матриц. Они сводятся к оценке ранга умножения и вычисления экспоненты умножения  $\alpha = \log_n r(n)$  для алгебры матриц порядка  $n \times n$  с рангом умножения  $r(n)$ . Наилучшие оценки экспоненты умножения получены Виноградом и Копперсмитом в [7]. Этот метод более развёрнуто описан на русском языке в [8]. При этом оценивается ранг в алгебре тензорного произведения через ранги алгебр сомножителей. Так оценены ранги произведения матриц порядков, являющихся некоторыми степенями 2. Виноградом и Копперсмитом получена оценка с  $\alpha = 2.373$ , и в [9] с помощью компьютеров их же методом оценка уточнена для порядка  $n = 2^8 = 256$  до  $\alpha = 2.3728639$ . В их методе оценки ранга имеется такой изъян (недостаток), что экспонента умножения для тензорного произведения получается больше  $\log_2 5 \approx 2.321928$ , если экспоненты умножения для сомножителей больше этого числа. При этом отсутствует эффективный способ вычисления значений функционалов, как при преобразовании Фурье. Это приводит к нереально большому коэффициенту для количества операций при значениях  $n < 10^9$ . При больших значениях  $n$  количество операций и ресурсов памяти таковы, что вычисления невыполнимы даже на самых мощных суперкомпьютерах. Действительно, не имея эффективный способ вычисления функционалов, количество операций при умножении матриц порядков  $n = m^k$  оценивается величиной  $n^{\alpha m + \frac{2}{k}}$ . В методе Штрассена функционалы и постоянные матрицы более разреженные, и количество операций за счёт этого получается несколько меньше этой оценки. Однако, и здесь вычисление произведения эффективнее стандартного метода, начиная только с  $k > 9$  и не превосходит 2 раз, пока  $k < 14$ . Для лучшей оценки на сегодня с  $\alpha = 2.3728639, m = 256$  вычисление произведения эффективнее только при  $k > 3$ , и при этом ( $k \geq 4$ )  $n$  не меньше не достижимого значения даже для суперкомпьютеров с  $n = 2^{32}$ .

### Бигрупповая алгебра и автоморфизмы

Пусть  $G$  – группа и  $K$  – кольцо с единицей. Групповая алгебра  $K(G)$  определяется как множество, состоящее из конечных сумм вида  $\sum k_g g, k_g \in K, g \in G$ . Операции сложения и умножения определяются естественным образом, считая, что при умножении каждый коэффициент из кольца коммутирует с каждым элементом из  $G$ . Когда группа конечная, элементам групповой алгебры соответствуют матрицы порядка  $n \times n$  диагонального вида, где  $n$  – число элементов группы. Их явно не достаточно для представления всех матриц порядка  $n \times n$ . Расширяя групповую алгебру добавлением характеров, получаем бигрупповую алгебру, являющуюся скрещенным произведением групповых алгебр группы характеров и самой группы с естественным скрещиванием:

$$\mu g = \mu(g)g\mu, \mu \in G^*, g \in G, \mu(g) \in K^*. \quad (1)$$

Здесь мы исходим из естественного представления в групповой алгебре, когда  $\mu g$  означает вначале умножение слева на элемент  $g: s \rightarrow gs$ , а потом изменение знака (умножение на корень из 1)  $\mu: s \rightarrow \mu(s)s$ .

Бигрупповая алгебра определяется как множество, состоящее из конечных сумм вида  $\sum k_{\mu g} \mu g, k_{\mu g} \in K, \mu \in G^*, g \in G$ . Эта алгебра становится цветной алгеброй, где однородные элементы имеют вид  $k_{\mu g} \mu g$ . Когда  $\mu = 1, g = 1$ , получается нулевой цвет, и он принадлежит центру алгебры (считаем, что кольцо коммутативное). Нас интересуют только конечные абелевы группы порядка  $|G| = n$ . Группа  $G$  изоморфна прямой сумме циклических подгрупп:  $G = Z_{n_1} \oplus Z_{n_2} \dots \oplus Z_{n_k}, n_1 n_2 \dots n_k = n$ . Можно упорядочить циклические подгруппы так, чтобы было:  $n_1 | n_2 | \dots | n_k$ . Обозначим образующие циклических подгрупп группы через  $y_1, y_2, \dots, y_k$ , а соответствующие образующие группы характеров через  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Тогда любому однородному элементу бигрупповой алгебры соответствует одночлен  $g = \prod_{l \leq k} x_l^{i_l} y_l^{j_l}, 0 \leq i_l < n_l$  со своим коэффициентом из кольца. Таким образом, бигрупповая алгебра представляется как алгебра квазикоммутативных многочленов со следующими соотношениями:

$$x_i^{n_i} = y_i^{n_i} = 1, x_i y_j = y_j x_i, i \neq j, x_i y_i = \theta_i y_i x_i. \quad (2)$$

Связь бигрупповых алгебр с умножением матриц кроется в следующей теореме.

**Теорема 1. Бигрупповая алгебра изоморфна алгебре матриц порядка  $n \times n$ , если**

**в кольце  $K$  имеются примитивные корни порядка  $n_k$  и эти числа обратимы ( $n_k \in K^*$ ).**

Доказательство основывается на известных соотношениях между характеристиками и элементами группы:

$$\sum_{\mu \in G^*} \mu(g) = \begin{cases} |G|, g = e, \\ 0, g \neq e. \end{cases}$$

$$\sum_{g \in G} \mu(g) = \begin{cases} |G|, \mu = e \\ 0, \mu \neq e. \end{cases}$$

Зафиксируем представление, согласно которому матрице  $A = (a_{sl})$  соответствует отображение  $\sum_{sl} a_{sl} e_l^s$ , где  $e_l^s(g^j) = \delta_l^j g^s$ . Здесь  $g^j$  – некоторая нумерация элементов в группе, для циклической группы нумерация соответствует степеням образующей. Таким образом,

$$\mu^i \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \theta^{n-1} \end{pmatrix}^i,$$

$$g^j \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}^j, \theta = \mu^1(g^1).$$

Из этого представления получается соответствие элементам  $\bar{A}$  бигрупповой алгебры матриц  $A$ :

$$\bar{A} \rightarrow A = (a_{sl}): a_{sl} = \sum_{\mu} \mu(s) \bar{a}_{\mu,l}. \quad (3)$$

Просуммировав по диагонали, соответствующей умножению на соответствующий элемент группы, получим обратное отображение:

$$A \rightarrow \bar{A} = \sum_{\mu g} \bar{a}_{\mu g} \mu g, \bar{a}_{\mu g} = \frac{1}{|G|} \sum_l \mu(g^{-1} l^{-1}) a_{g,l}. \quad (4)$$

В дальнейшем ограничимся случаем, когда  $n = p^k, n_i = p$ , где  $p$  – простое число. На группе цветов  $(i_1, i_2, \dots, i_k, \dots, i_{2k})$ , соответствующих одночленам  $x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k} y_1^{i_{k+1}} \dots y_k^{i_{2k}}$ , определим кососимметричное билинейное произведение

$$[(i_1, \dots, i_{2k}), (j_1, \dots, j_{2k})] = \sum_{l=1}^k (i_l j_{l+k} - i_{l+k} j_l), \quad (5)$$

относительно которой группа цветов становится  $2k$ -мерным симплектическим пространством над  $Z_p$  [6]. Любой цветной (сохраняющий однородные элементы однородными) автоморфизм, задаваемый значениями на образующих

$$x_l \rightarrow \theta^{b_l} \prod_j x_j^{a_{lj}}, \quad (6)$$

сохраняет симплектическую структуру, задаваемую с помощью (5), т.е. матрица  $A =$

$(a_{ij})$  симплектична. Если  $X = \prod_l x_l^{i_l}, Y = \prod_l x_l^{j_l}$ , то соотношение (5) может быть записано в виде:

$$YXY^{-1} = Y\theta^{[X,Y]}. \quad (7)$$

На группе цветов введём оператор:

$$I(i_1, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_{2k}) = (i_{k+1}, \dots, i_{2k}, -i_1, \dots, -i_k),$$

Аналогично определяется действие на мономах. Очевидно,  $I^2 = -1$  и  $[IX, IY] = -[X, Y]$ . Оператор  $(X, Y) = [IX, Y] = [IY, X]$  симметричный и играет роль скалярного произведения.

При  $p > 2$  условие (6) является достаточным, чтобы отображение, задаваемое соотношением (6) на образующих, привело к автоморфизму алгебры, когда  $(a_{ij})$  симплектична. При  $p = 2$  необходимо умножить правую часть (6) на корень четвёртой степени из 1, если  $\sum_{j \leq k} a_{ij} a_{l(j+k)}$  нечётно, т.е.  $b_l = b'_l + \frac{1}{2} \sum_{j \leq k} a_{ij} a_{l(j+k)}$ ,  $b'_l \in Z_p$ . Фактически за  $\theta$  надо брать корень четвёртой степени из 1, и только с такой оговоркой можно говорить о достаточности условия (6) для продолжения отображения до автоморфизма. Для описания автоморфизмов удобнее использовать (обобщенный) базис Вейля–Швингера:

$$W(i_1, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_{2k}) = \theta^{-(i_1 i_{k+1} + i_2 i_{k+2} + \dots + i_k i_{2k})/2}.$$

Таблица умножения в этом базисе имеет вид:

$$\theta^{\frac{[(i_1, \dots, i_{2k}), (j_1, \dots, j_{2k})]}{2}} W(i_1, \dots, i_{2k}) W(j_1, \dots, j_{2k}) = W(i_1 + j_1, \dots, i_{2k} + j_{2k}). \quad (8)$$

В этом базисе группа автоморфизмов раскладывается в прямую сумму группы знаков, меняющих только знаки перед базисными элементами, и группы симплектических матриц  $(a_{ij})$ . Первая группа состоит из  $p^{2k}$  элементов, вторая группа большая, логарифм от порядка по основанию  $p$  оценивается как  $O(2k^2)$ . Например, при  $n = 2^k$ ,  $k = 25$  количество автоморфизмов больше  $2^{1024}$ , т.е. шифр надёжнее чем у RSA.

### Значения многочленов

Для наших некоммутативных многочленов можно придумать различные значения. Для произведения выбор его значений практически не имеет значения. Главное в выборе значений многочленов, является удобство выражения значений произведения многочленов  $\psi(x, y) = f(x, y)\varphi(x, y)$  через значения сомножителей. Здесь мы первые  $k$  переменных обозначили через  $x$ , а последние  $k$  через  $y$ . Определим значения

$$\psi(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k} c_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k} x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k} y_1^{j_1} \dots y_k^{j_k} \quad (9)$$

при  $x_i = \theta^{\alpha_i}, y_j = \theta^{\alpha_j+k}$  вычисляется подстановкой соответствующих значений в

выражение многочлена. Для сомножителей предварительно можно вычислить такие же значения

Само вычисление значений и матрицы произведения по вычисленным значениям занимает всего  $O(n^2 \log(n))$  операций. При этом коэффициент быстро растёт при больших  $p$ . Поэтому в дальнейшем для простоты будем рассматривать только случай  $p=2$ . На каждом шаге вычисления значений, привлекая новые шаги некоммутативности, можем пересчитать все значения многочленов. На пересчёт новых значений тратится только  $O(n^2)$  операций. Поэтому при количестве шагов  $O(k) = O(\log n)$  сложность вычисления произведения останется порядка  $O(n^2 \log n)$ . Для некоммутативных многочленов значения произведения вычисляются линейной комбинацией произведений смещённых (относительно вычисляемого) значений сомножителей. Например, при  $k=1$  значения произведения будут

$$\frac{1}{2} [f(x, y)\varphi(x, y) + f(x, -y)\varphi(x, y) + f(x, y)\varphi(-x, y) - f(x, -y)\varphi(-x, y)]. \quad (10)$$

Уже при  $k=1$  можно использовать модернизированные значения для сомножителей, привлекая показатели степеней для сомножителей. С учётом этого имеется 12 формул с вычетом из исходного  $f(x, y)\varphi(x, y)$  и 12 формул с добавлением. Произведение любого типа значений сомножителей имеет вид:

$$\sum_{i_1, \dots, i_{2k}, j_1, \dots, j_{2k}} \theta^{\sum_s \alpha_s (i_s + j_s)} a_{i_1, \dots, i_{2k}} b_{j_1, \dots, j_{2k}} \theta^{\beta_1(i) + \beta_2(j)}. \quad (11)$$

Здесь  $\theta = -1$ ,  $\beta_1(i), \beta_2(j)$  – логические формулы, получаемые при модернизации и смещения значений. Тогда вычисление значений произведения сводится к комбинаторике булевых функций и нахождения краткой формулы для выражения значений:

$$\psi(x, y)|_{(x,y)=(-1)^\alpha} = \sum_s C_s f(x, y)|_{(x,y)=(-1)^{\alpha+\beta_1}} \varphi(x, y)|_{(x,y)=(-1)^{\alpha+\beta_2}}.$$

Коэффициенты  $C_s$  находятся из булевого выражения:

$$(-1)^{i_{k+1}j_1 + \dots + i_{2k}j_k} = \sum_s C_s (-1)^{\beta_{1s}(i) + \beta_{2s}(j)}.$$

Здесь в показателях роль истины играет 1, лжи – 0 (*true* = 1, *false* = 0), а после применения степени роль истины – 1, лжи – (-1). Например, простейшие булевы формулы от двух переменных выглядят так:

$$(-1)^{x_1+x_2} = \begin{cases} 1, & x_1=x_2 \\ -1, & x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

$$(-1)^{x_1 x_2} = \frac{1}{2} [1 + (-1)^{x_1} + (-1)^{x_2} - (-1)^{x_1+x_2}].$$



Длину формул можно сократить существенно за счёт существенной модернизации типа значений. Единственное, что мы не можем, – это смешать в формулах индексы  $i_l, j_l$ , относящиеся к разным многочленам. Тем не менее, в рамках произвольности выбора  $\beta_{1s}(i), \beta_{2s}(j)$  длина формулы может быть уменьшена как минимум до  $O(k^2) = O(\log^2 n)$ .

### **Литература**

1. Пенроуз Р. Путь к реальности, или законы, управляющие вселенной. Москва, Ижевск, 2007г.
2. Пенроуз Р. Новый ум короля. Москва, УРСС, 2010 г.
3. Изменяющаяся природа математического доказательства. Москва, 2016 г.
4. Айдагулов Р.Р., Шамолин М.В. Некоторое уточнение алгоритма Конвея. Вестник Московского Университета, №3, 2005 г.

5. Strassen V. Gaussian elimination is not optimal. Numer. Math. -1969. – Vol. 13, - P. 354-356.

6. Olga Holtz. Fast and stable matrix multiplication (доклад).

7. Coppersmith D., Winograd S. Matrix multiplication via arithmetic progressions. J. Symbol. Comput. -1990. – Vol. 9. P. 251-280.

8. Жданович Д.В. Экспонента сложности матричного умножения. Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, №2, с. 107-166.

9. Francois Le Gall. Powers of Tensors and Fast Matrix Multiplication. 2014 (архив).

10. Айдагулов Р.Р., Шамолин М.В. Группы цветов. Современная математика и её приложения. Т.62. с. 15-27. 2009 г.

11. П. Ноден, К. Китте. Алгебраическая алгоритмика. «Мир», Москва, 1999.

*Айдагулов Р.Р. Эффективность вычислений при умножении матриц. Вводится понятия фильтрованного и градуированного вычислений. Последний метод более эффективен в силу полноценного использования промежуточных вычислений. Сюда относится вычисление произведения больших чисел преобразованием Фурье. Пока не существует такого метода при умножении (и обращении) матриц больших порядков. Здесь строится такой метод используя градуировки бигрупповой алгебры.*

**Ключевые слова:** *фильтрованное и градуированное вычисление, градуировки бигрупповой алгебры*

*Aydagulov R.R. The efficiency of computation in matrix multiplication. Introduces the concept of filtered and graded (calibration) calculations. The latter method is more efficient due to the full use of intermediate calculations. This includes the evaluation of the work of large numbers by the Fourier transform. While there is no such method when multiplying (and circulation) of matrices of large orders. Here is this method using the calibration bigroup algebras.*

**Keywords:** *filtered and graduated calculation, calibrating of bigroup algebra*

*Статья поступила в редакцию 22.02.2018  
Рекомендована к публикации д-ром физ.-мат. наук А.С. Миненко*

## Разработка речевого распознавателя исходного кода программ в инструментальной среде CMU Sphinx

В.С. Бакаленко

Донецкий национальный технический университет  
valeriy.bakalenko@gmail.com

*Бакаленко В.С. Разработка речевого распознавателя исходного кода программ в инструментальной среде CMU Sphinx. В статье рассматривается разработка системы, предназначенной для речевого ввода и вывода исходного кода программ. Для решения данной задачи использовалась инструментальная среда CMU Sphinx-4. В результате, на основании грамматики языка программирования Pascal, были построены акустико-лингвистические модели автоматического распознавания речи и словарь.*

**Ключевые слова:** речевое управление, декодер, база знаний, акустическая модель, база знаний, акустическая модель, речевой интерфейс, распознавание речи, марковские модели, словарь.

### Введение

В современном мире набор исходного кода программ выполняется вручную с помощью клавиатуры. Этот способ ввода является трудоемким и требует хороших навыков работы с клавиатурой [1]. Данный недостаток можно устранить путем качественного решения задачи автоматического распознавания речи при вводе исходного кода программ.

Задача голосового ввода текста программ заключается в распознавании лексем языка программирования. Обозначим через  $w$  – пространство образов (лексем),  $f(t)$  - функцию, которая выражает в каждый момент времени  $t$  амплитудно-частотную характеристику сигнала,  $g(f)$  – решающее правило для оценки  $f(t)$ . Задача распознавания речи заключается в построении такого решающего правила  $g(f)$ , которое бы позволяло проводить распознавание с минимальным числом ошибок за приемлемое время.

В решении этой задачи есть несколько основных проблем: качество распознавания, большой объем словаря, высокая скорость распознавания. Кроме того, необходимо учитывать огромное количество вариантов названия для переменных, функций и процедур. Скорость распознавания должна быть такой, чтобы программист мог в режиме реального времени видеть исходный код, который он диктует. От точности распознавания зависит количество ошибок в исходном коде и время необходимое на их устранение [2].

Поэтому цель исследования состоит в разработке и оценке эффективности речевого

интерфейса, позволяющего осуществлять ввод исходного кода программ, с помощью построения акустико-лингвистических моделей, словаря и настройки на особенности голоса диктора в системе Sphinx.

### Описание инструментальной среды CMU Sphinx

На сегодняшний день Sphinx является самым популярным и работоспособным из открытых движков [3]. Он разработан в университете Карнеги-Меллона с участием Массачусетского технологического института и Sun Microsystems. Достоинством Sphinx является поддержка множества языков. На его основе можно создавать свои собственные модели распознавателей речи.

Sphinx-4 является версией из семейства CMU Sphinx. Он состоит из двух компонентов: «тренера» и декодера. Тренер создаёт акустическую модель, адаптированную под конкретные потребности, а декодер выполняет собственно распознавание. Архитектура Sphinx-4 на верхнем уровне очень проста. Она включает FrontEnd, клиентскую часть (приложение), декодер и базу знаний (рис.1).

Блок FrontEnd отвечает за сбор, аннотирование и обработку входных данных. Он извлекает объекты из входных данных для чтения с помощью декодера. Аннотации определяют начальный и конечный сегменты данных. Основные операции блока FrontEnd реализуют шумоподавление, автоматическую регулировку усиления, анализ Фурье и спектральную

фильтрацию Мэла.

База знаний содержит информацию для декодера. Эта информация определяет акустическую модель и модель языка.

Декодер выполняет основную часть работы. В первую очередь он считывает данные с помощью FrontEnd и сопоставляет их с информацией из базы знаний. Затем декодер выполняет поиск в пространстве последовательностей слов, которые входят в число претендентов на выбор. Термин «пространство поиска» означает описание наиболее вероятных последовательностей слов, которые динамически обновляются с помощью декодера в процессе распознавания.



Рисунок 1 – Структура среды CMU Sphinx-4

Инструмент Sphinx-4 в отличие от других архитектур распознавателей речи предоставляет приложению контролировать некоторые функции речевого движка. Приложение во время декодирования может получать важные данные от декодера. Эти данные позволяют приложению следить за процессом декодирования, а также влиять на процесс декодирования до его завершения. Кроме того, приложение может обновлять базу знаний на любом этапе распознавания.

Главным достоинством Sphinx является возможность описания проектируемого распознавателя на уровне формальных моделей, что и послужило основанием для выбора Sphinx-4 в качестве инструментария.

### **Функциональная схема распознавания речи**

При разработке речевого интерфейса основная проблема заключается в автоматическом распознавании речи. В данной статье она решалась на основе скрытых марковских моделей, используемых в инструментальной системе Sphinx.

Как известно, марковская модель – это вероятностный автомат с конечным числом

состояний, который изменяет своё состояние один раз в единицу времени [4]. Учитывая, что марковская модель описывает вероятностные процессы, а динамические характеристики речи человека по своей природе нестабильны и не поддаются строгому математическому описанию, было принято решение построить распознаватель речи на основе аппарата скрытых марковских моделей.

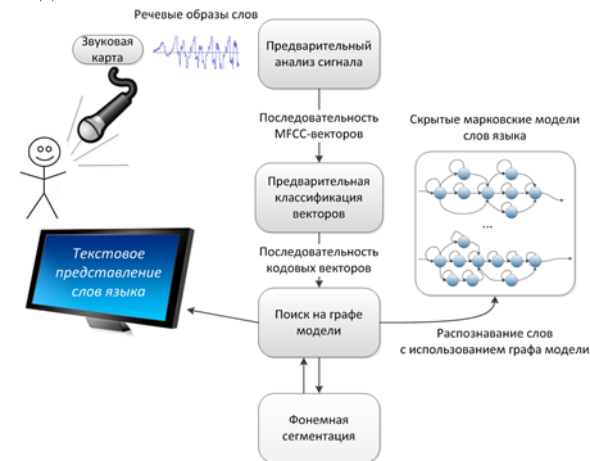


Рисунок 2 – Функциональная схема системы распознавания речи

На рисунке 2 показана функциональная схема процесса распознавания. Во время голосового ввода текста программы программист произносит лексемы языка в микрофон. Звуковая карта преобразовывает звук в цифровой сигнал. На этапе предварительной обработки сигнал преобразуется в последовательность векторов характеристик. В них выделяются фрагменты, которые соответствуют словам (лексемам). Каждое слово разбивается на фонемы и им сопоставляются наиболее вероятные состояния скрытой марковской модели. В итоге марковская модель для каждого входного речевого образа определяет текстовое изображение слова.

Рассмотрим пример скрытой марковской модели (рис. 3). Слева и справа изображена одна и та же модель. Слева обозначены состояния и переходы между ними, справа – наблюдаемые символы и тоже переходы между ними. В данном случае количество состояний  $N=3$ , количество наблюдаемых символов  $M=3$  (A, B, C). Количество состояний может быть больше количества наблюдаемых символов, т.к. с одним и тем же символом могут быть связаны разные состояния. Матрица переходов между состояниями A представляет собой таблицу размером 3 на 3. Матрица вероятностей появления символов наблюдения B имеет аналогичный размер.

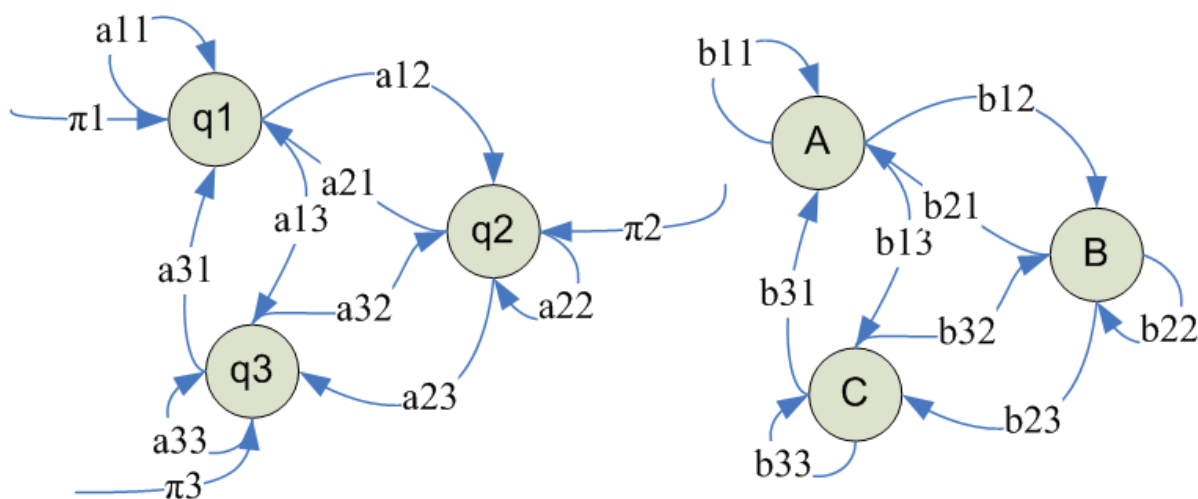


Рисунок 3 – Скрытая марковская модель с 3 состояниями

В распознавании речи используются лево-правые скрытые марковские модели. Их последовательность состояний обладает свойством, которое выражается в том, что с увеличением времени индекс состояния также увеличивается или же остается неизменным. Т.е. состояния переходят слева направо, а наоборот сделать переход нельзя. Этот тип отлично подходит для описания процессов с прямым ходом времени, в частности, для распознавания речевых сигналов.

**Акустико-лингвистическая модель системы распознавания лексем языка**

В первую очередь технология Sphinx предусматривает разработку акустико-лингвистической модели языка [5]. В неё входят: словарь с транскрипциями, грамматика и обучающее множество для акустической модели. Составляющие акустической модели показаны на рисунке 4.

Словарь содержит список слов и транскрипции к ним. Транскрипции должны состоять исключительно из фонем, которые присутствуют в списке фонем. Кроме слов учитываются и другие побочные звуки: звуки дыхания, различный шум окружающей среды, шум от звуковой аппаратуры.

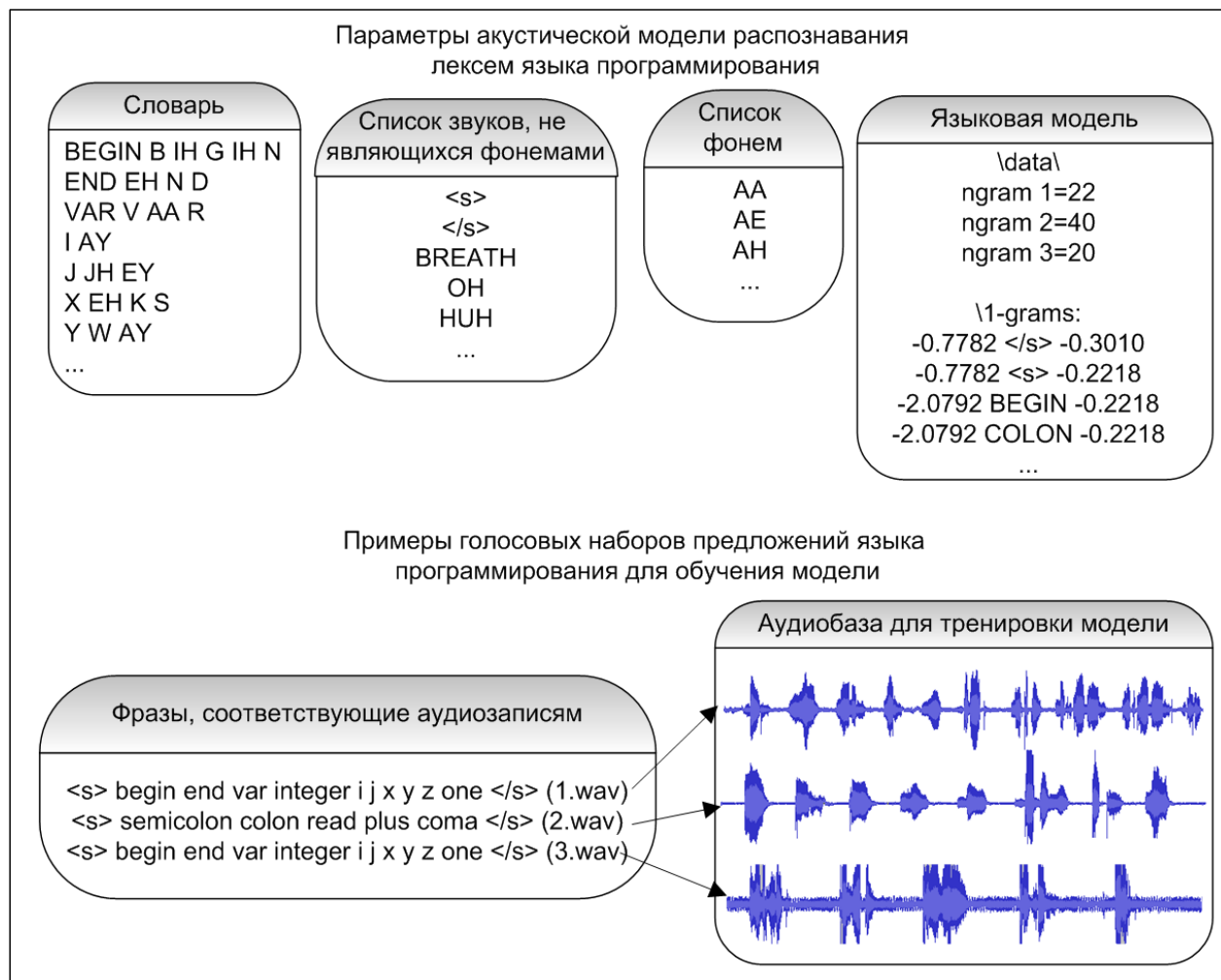
Языковая модель – это совокупность вероятностей появления слов в речи.

Для обучения модуля распознавания записывается аудиобазы. Она представляется в виде обучающих примеров с вариантами речи конкретного диктора. Каждая аудиозапись должна иметь своё текстовое представление. От объёма и содержания материала аудиобазы зависит качество распознавания. Элементы информационной структуры лингвистической модели показаны на рис. 5.

По введенным характеристикам лингвистической модели распознаваемого языка инструмент Sphinx формирует акустическую модель [1,2]. Она является ядром интерфейса речевого ввода исходного кода программ. Акустическая модель состоит из скрытых марковских моделей, необходимых для распознавания речи. Для обучения скрытой марковской модели инструмент Sphinx использует алгоритм Баума-Велша [6]. Акустическая модель содержит вероятности появления кластеров, которые объединяются в фонемы. Наиболее вероятное слово определяется по распознанным фонемам, транскрипциям в словаре и вероятностям появления слов из языковой модели [7-10].



Рисунок 4 – Структура акустической модели



3 Рисунок 5 – Информационная структура лингвистической модели

### Анализ качества построенных моделей

Окно пользовательского интерфейса системы речевого ввода программ разработанное для тестирования построенных моделей показано на рисунке 6.

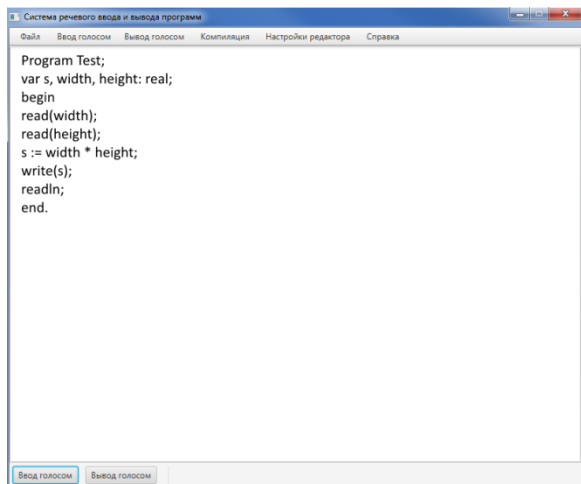


Рисунок 6 – Интерфейс речевой системы ввода исходного кода программ

Лучшие показатели работы модуля распознавания речи были тогда, когда он был настроен на дикторозависимое распознавание.

Для настройки речевого интерфейса под конкретного диктора строились соответствующие обучающие множества. Всего в тестовой программе было 144 слова, и аудиозапись длилась 123,67 секунд. Каждая из акустических моделей проходила ряд тестов с использованием двух языковых моделей. Первая – модель, построенная на словах, вторая – по часто встречающимся словосочетаниям.

Первый тест проводился с акустической моделью, обученной на 100 аудиофайлах. На этой маленькой модели ясно видно, что при малом количестве обучающего материала, распознавание будет сильно зависеть от качества языковой модели. При плохой языковой модели процент

ошибки составил 48,96%, а при хорошей – 37,44%.

Второй тест проводился с акустической моделью, обученной на 293 аудиофайлах. На этой модели также видна зависимость качества распознавания от языковой модели. При плохой модели ошибка составила 12,96%, а при хорошей – 2,88%.

Третий тест проводился с акустической моделью, обученной на 500 аудиофайлах и на этом тесте уже не так заметна разница в качестве распознавания в зависимости от различных типов моделей. При плохой модели ошибка составила 7,2%, а при хорошей – 2,88%. Это может сказать о том, что чем больше имеется обучающего материала, тем меньше распознавание зависит от качества языковой модели. Результаты всех этих тестов изображены на рисунке 7.

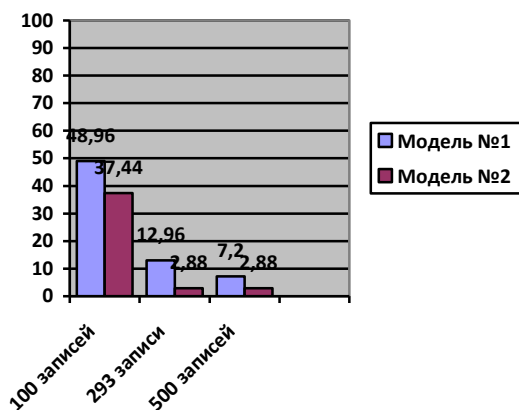


Рисунок 7 - Результаты тестирования акустических моделей с разными языковыми моделями, процент ошибки

Одним из важных аспектов распознавания речи является оценка скорости распознавания речи и количество потребляемой оперативной памяти.

Количество потребляемой памяти явно не зависит от качества моделей и от количества обучающего материала. Всего приложению было выделено 400мб оперативной памяти и во всех случаях количество потребляемой разрабатываемым программным продуктом памяти приближалось к этому порогу.

### Заключение

Проблемы в области создания приложений с речевым вводом не имеют однозначных и тривиальных решений.

По показателю точности распознавания можно сделать следующие выводы:

- одноклассорная акустическая модель имеет точность распознавания выше, чем дикторонезависимая;
- с увеличением объема словаря ухудшается качество распознавания;
- использование грамматики не ухудшает точность распознавания;
- автоматная грамматика даёт лучшие результаты распознавания, чем контекстно-свободная из-за маленького размера контекста;
- грамматика исключает появление лишних лексем при наличии шума.

По критерию скорости распознавания можно сделать следующий вывод: автоматная грамматика работает медленнее контекстно-свободной из-за большего количества правил. Длительность распознавания одного слова составляла половину времени его произношения, что является приемлемым результатом.

Речевой интерфейс с дополнительными сервисными функциями предоставит начинающим программистам более естественный способ набора исходного кода программы.

### Литература

1. Ли У.А. и др. Методы автоматического распознавания речи: В 2-х книгах. Пер. с англ. / Под ред. У. Ли. М.: Мир, 1983. - Кн. 1. 328 е., ил.
2. Рабинер Л.Р., Шафер Р.В. Цифровая обработка речевых сигналов: Пер. с англ. / Под ред. М.В. Назарова и Ю.Н. Прохорова. М.: Радио и связь, 1981.
3. Савченко В.В., Акатьев Д.Ю., Губочкин И.В. Формирование фонетической базы данных из речевого сигнала на основе информационной теории восприятия речи. // Системы управления и информационные технологии. 2008. 4.1 (34). С. 193-198.
4. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов: Пер. с англ.- М.: Мир, 2002.
5. Елинек Ф. Распознавание непрерывной речи статистическими методами//ТИИЭР. 1976. Т. 64. №4. С. 131-160.
6. Чучупал В. Я. Выделение незнакомых слов и акустических событий при распознавании речи // Модели, методы, алгоритмы и архитектуры систем распознавания речи, 2006, стр. 119-137.115
7. Моттль В.В., Мучник И.Б. Скрытые марковские модели в структурном анализе сигналов. М.: Физматлит, 1999, 352 с.
8. Yu, D. Automatic Speech Recognition: A Deep Learning Approach [Text] /

D. Yu, L. Deng. — London : Springer-Verlag, 2015.

9. Bourlard, H. Continuous speech recognition using multilayer perceptrons with hidden Markov models [Text] / H. Bourlard, C. Wellekens // Proc. IEEE International

Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). — 1990. — P. 413—416.

10. Morgan, N. Neural networks for statistical recognition of continuous speech [Text] / N. Morgan, H. Bourlard // Proc. IEEE. — 1995. — Vol. 83, no. 5. — P. 742—772.

**Бакаленко В.С.** *Разработка речевого распознавателя исходного кода программ в инструментальной среде CMU Sphinx.* В статье рассматривается разработка системы, предназначенной для речевого ввода и вывода исходного кода программ. Для решения данной задачи использовалась инструментальная среда CMU Sphinx-4. В результате, на основании грамматики языка программирования Pascal, были построены акустико-лингвистические модели автоматического распознавания речи и словарь.

**Ключевые слова:** речевое управление, декодер, база знаний, акустическая модель, база знаний, акустическая модель, речевой интерфейс, распознавание речи, марковские модели, словарь.

**Bakalenko V.S.** *Development of a speech recognition of the source code of programs in the CMU Sphinx tool environment.* The article deals with the development of a system designed for speech input and output of the source code of programs. To solve this problem, the CMU Sphinx-4 tool environment was used. As a result, based on the grammar of the Pascal programming language, acoustic-linguistic models of automatic speech recognition and a dictionary were built.

**Keywords:** speech control, decoder, knowledge base, acoustic model, knowledge base, acoustic model, speech interface, speech recognition, Markov models, dictionary.

Статья поступила в редакцию 20.03.2018  
Рекомендована к публикации д-ром техн. наук В.Н. Павлышом

## Фрактальный анализ речевых сигналов

Д.В. Бельков, Е.Н. Едемская

Донецкий национальный технический университет  
belkov65@list.ru

*Бельков Д.В., Едемская Е.Н. Фрактальный анализ речевых сигналов. Анализ речевых сигналов является актуальной задачей поиска объективного показателя эмоционального состояния человека, выполняющего ответственную деятельность. В данной работе для речевых сигналов выполнен фрактальный анализ плотности распределения, автокорреляционных функций и энергетических спектров. Найдены значения показателя Херста. Он может быть показателем эмоционального состояния человека, поскольку степень фрактальности речевых сигналов зависит от эмоционального состояния и гендерных различий.*

**Ключевые слова:** речевой сигнал, плотность распределения, автокорреляционная функция, энергетический спектр, показатель Херста.

### Введение

1. В настоящее время большое внимание уделяется вопросам обработки информации и принятия решений при человеко-компьютерном взаимодействии. Эффективность данного процесса во многом зависит от качества информации, поступающей от пользователя автоматизированной системы и целенаправленности воздействия человека на объекты исследования. Достижение цели диалогового взаимодействия между компьютером и пользователем возможно при учете аспектов, характеризующих речевые потоки, возникающие в процессе общения.

2. Труд человека в системах управления техникой связан с периодическим, возможно длительным и интенсивным воздействием экстремальных значений профессиональных, социальных, экологических факторов, которое сопровождается эмоциями, перенапряжением физических и психических функций, деструкцией деятельности. Одним из источников эмоций является речевой сигнал. Русский язык содержит около 40% эмоционально окрашенных слов. Эмоции кодируются определенными акустическими параметрами в речевом сигнале. Понимание особенностей акустического кодирования эмоций позволит понять механизм восприятия эмоций [1]. Исследования речевых сигналов проводились многими учеными с целью описания как лингвистических, так и технических характеристик речи [2,3]. Однако, проблема автоматического распознавания эмоционально окрашенной речи не является полностью решенной. Эмоционально окрашенная речь находит применение во многих сферах жизнедеятельности человека и является востребованной функцией в современных

автоматизированных системах управления, реабилитации и протезирования, срочного оповещения и т.п. В последние годы усилился интерес к анализу речевых сигналов для поиска объективного показателя эмоционального состояния человека, выполняющего ответственную деятельность. На данный момент отсутствует модель описания речевых образцов в условиях проявления разных видов эмоций. Модель эмоционально окрашенной речи должна отражать взаимосвязь вида эмоций и объективных признаков речевого сигнала. Определение такой взаимосвязи вызывает трудности.

3. Основная задача получения признаков эмоционально окрашенной речи состоит в том, чтобы преобразовать звуковую волну в признаковое пространство, в котором множество объектов одного класса будет сгруппировано вместе, а множество объектов альтернативных классов максимально разнесено. Соотнесение распознаваемого объекта (под объектом понимается фонема речевого сигнала) с базой объектов, которые необходимо идентифицировать, проходит в три этапа: 1) выделение того или иного признака; 2) объединение признаков в группы; 3) выбор предполагаемого значения из ряда альтернатив [4]. Отечественные и зарубежные авторы выделяют четыре группы объективных признаков, позволяющих различать речевые образцы: спектрально-временные, кепстральные, амплитудно-частотные и признаки нелинейной динамики [5-8].

4. В работах [9,10] представлены результаты применения фрактального анализа речевого сигнала при моделировании актерами различных эмоциональных состояний. Выявлены достоверные различия величины фрактальной размерности при моделировании состояния горя,



радости и гнева по сравнению с нейтральным состоянием. Обнаружены гендерные различия динамики показателя фрактальной размерности при моделировании эмоциональных состояний. С фрактальной размерностью  $D$  речевого сигнала связан показатель Херста  $H$ , который характеризует память сигнала и может быть вычислен по формуле  $H=2-D$ .

5. В данной статье предлагается использовать величину  $H$ , как признак эмоционально окрашенной речи. Он относится к группе признаков нелинейной динамики.

6. Целью статьи является исследование структуры речевых сигналов, направленное на выявление их характерных особенностей. В работе решаются следующие задачи: оцениваются плотности распределения, автокорреляционные функции (АКФ), энергетические спектры изучаемых сигналов, определяется степень фрактальности (показатель Херста). Исследования выполнены в среде MatLab.

### Анализ сигналов

7. В работе проведены две серии вычислительных экспериментов. В первой серии выполнен фрактальный анализ двух речевых сигналов. Сигнал  $s1$  - текст читается актрисой без выражения, сигнал  $s2$  тот же текст читается актрисой с выражением. Во второй серии экспериментов анализируются сигнал  $s1$  и сигнал  $s3$  (текст читается актером). Изучаемые сигналы показаны на рисунках 1 – 3.

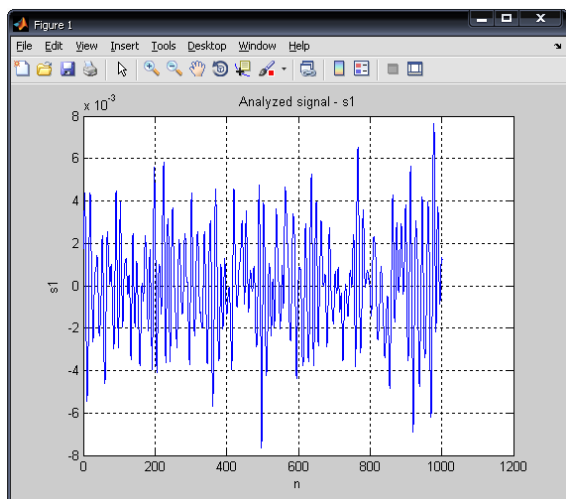


Рисунок 1 – Сигнал  $s1$

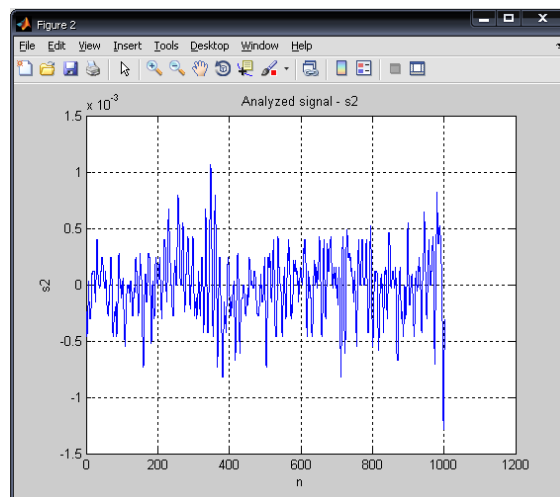


Рисунок 2 - Сигнал  $s2$

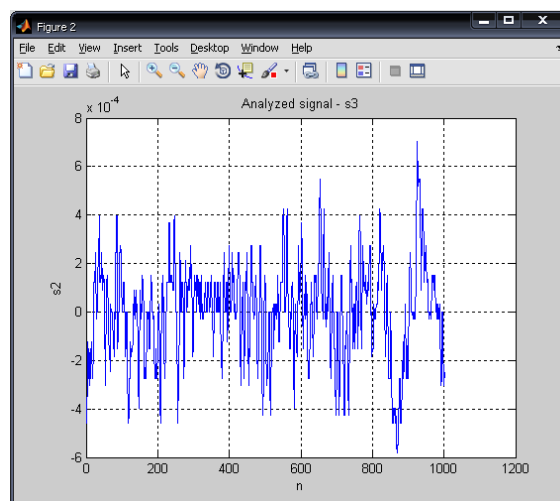


Рисунок 3 – Сигнал  $s3$

8. Оценка плотностей распределения проводится на основании гистограмм относительных частот, показанных на рисунках 4-6. Изучаемые сигналы не подчиняются нормальному распределению.

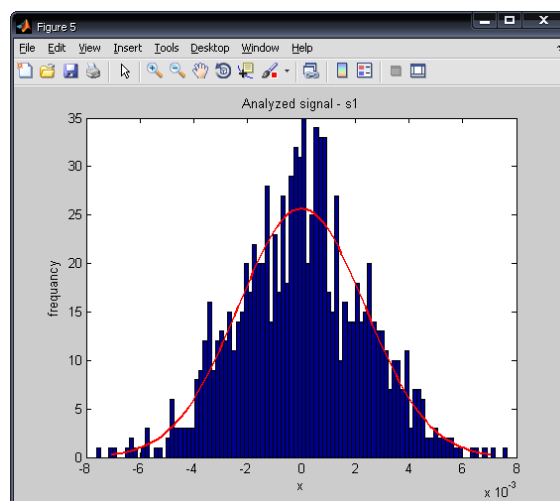


Рисунок 4 – Плотность распределения сигнала  $s1$

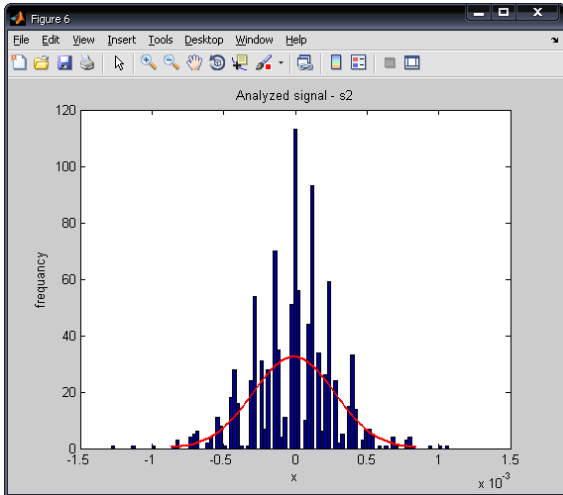


Рисунок 5 – Плотность распределения сигнала s2

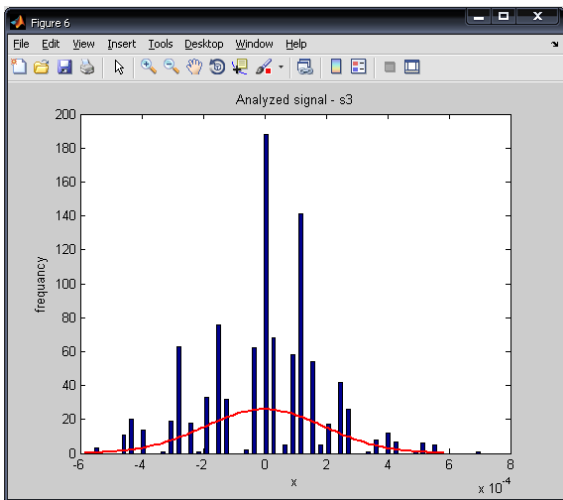


Рисунок 6 – Плотность распределения сигнала s3

9. В работе необходимо определить обладают ли сигналы медленно убывающей зависимостью или быстро убывающей зависимостью.

Процесс  $X$  обладает медленно убывающей зависимостью (МУЗ), если для его АКФ выполняется условие  $r(k) \sim k^{-\beta} \cdot L_1(k) + C_1, k \rightarrow \infty$ , где  $C_1 = const$ ,  $0 < \beta < 1$  и  $L_1$  - медленно меняющаяся на бесконечности функция:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L_1(tx)}{L_1(t)} = 1$  для всех

х. Процессы с МУЗ характеризуются автокорреляционной функцией, которая убывает по степенному закону при увеличении временной задержки (лага). В отличие от процессов с МУЗ, процессы с быстро убывающей зависимостью (БУЗ) обладают экспоненциально спадающей АКФ вида  $r(k) \sim \rho^k, k \rightarrow \infty$ .

Вычисления АКФ по формуле

$$r(k) = \frac{\sum_{i=1}^{N-\tau} (X_i - \bar{X})(X_{i+k} - \bar{X})}{(N - \tau)\sigma^2(X)},$$

где  $\bar{X}$  - выборочное среднее ряда  $X$ ,  $\sigma^2(X)$  - выборочная дисперсия ряда  $X$ ,  $k=0,1,\dots$ . Автокорреляционные функции исследуемых сигналов приведены на рисунках 7-9. Они не обращаются в ноль при больших значениях  $k$ , что говорит о медленном убывании АКФ и присутствии МУЗ.

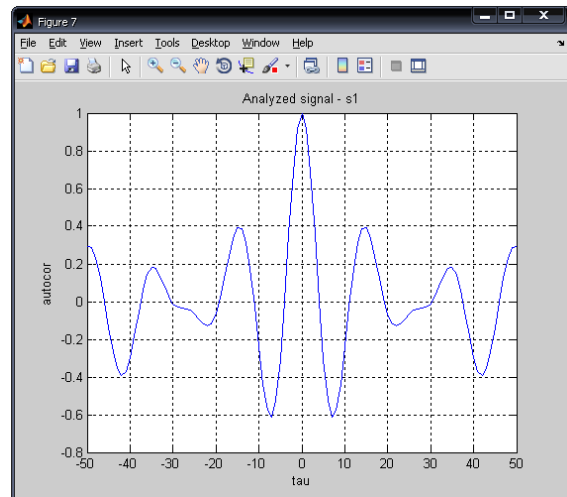


Рисунок 7 – АКФ сигнала s1

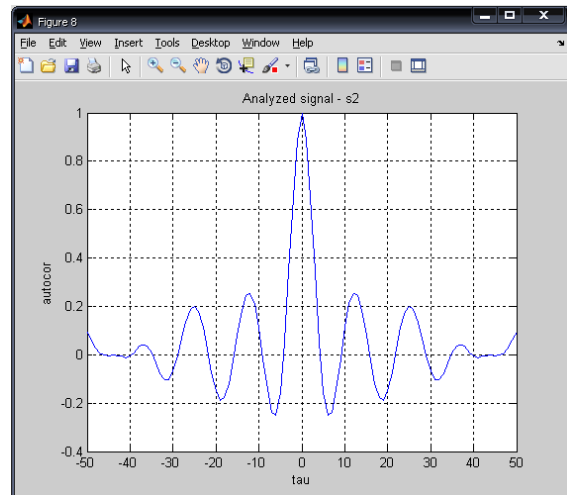


Рисунок 8 – АКФ сигнала s2

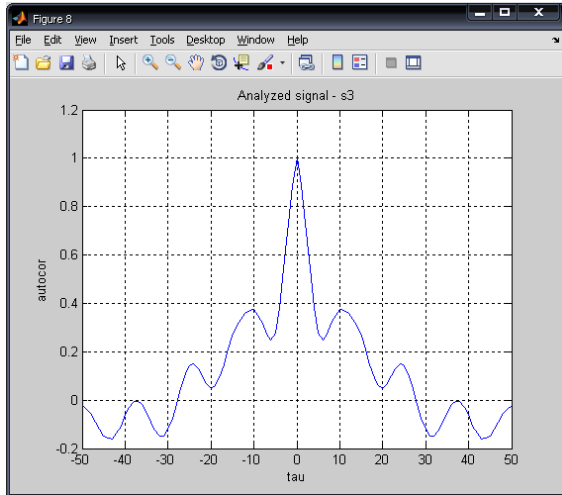


Рисунок 9 – АКФ сигнала s3

10. В частотной области МУЗ приводит к степенному закону поведения спектральной плотности процесса. Энергетические спектры временных рядов представлены на рисунках 10-12.

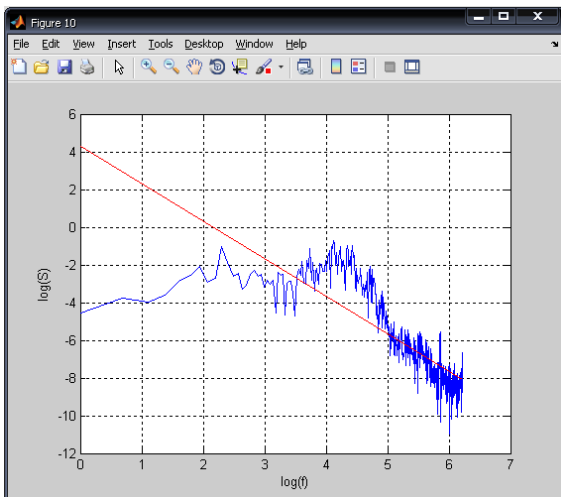


Рисунок 10 – Спектральная плотность сигнала s1

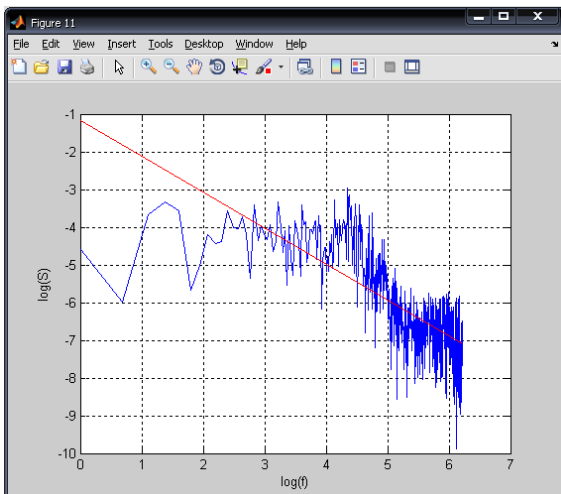


Рисунок 11 – Спектральная плотность сигнала s2

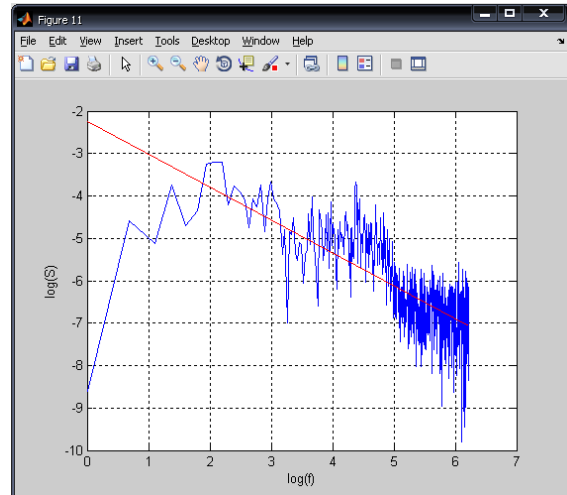


Рисунок 12 – Спектральная плотность сигнала s3

### Показатель Херста

В этом разделе оценивается показатель Херста  $H$ , который является мерой устойчивости статистического явления или мерой длительности долгосрочной зависимости процесса. Значение  $H=0,5$  указывает на отсутствие долгосрочной зависимости. Корреляция между событиями отсутствует. Ряд является случайным, а не фрактальным. Чем ближе значение  $H$  к 1, тем выше степень устойчивости долгосрочной зависимости. При  $0 \leq H < 0,5$  временной ряд является трендоустойчивым (антиперсистентным). Он более изменчив, чем случайный ряд, поскольку состоит из частых реверсов спад-подъем. При  $0,5 < H \leq 1$  ряд трендоустойчив. Тенденция его изменения может быть спрогнозирована. Показатель Херста связан с другими фрактальными параметрами формулами, показанными в таблице 1.

Таблица 1. Фрактальные параметры

Параметр	Расчетная формула
Фрактальная размерность $D$	$D = 2 - H$
Корреляционный параметр $\beta$	$\beta = 2(1 - H)$
Спектральный показатель $b$	$b = 2H + 1$
Фрактальный показатель $\alpha$	$\alpha = 3 - 2H$

Для определения значения  $H$  в работе используется алгоритм R/S-анализа, который состоит в следующем. В исходной реализации  $Z$  последовательно выделяем отрезки  $Z_\tau = z_1, z_2, \dots, z_\tau$ ,  $\tau = 1000, 2000, \dots, 12000$ , для

каждого из которых вычисляем текущее среднее

$$\bar{z}_\tau = \frac{\sum_{i=1}^{\tau} z_i}{\tau}.$$

Далее для каждого фиксированного  $Z_\tau$  вычисляем накопленное отклонение для его

$$\text{отрезков длины } t: X_{\tau,t} = \sum_{i=1}^t (z_i - \bar{z}_\tau), t = 1, 2, \dots, \tau,$$

разность (размах) между максимальным и минимальным накопленными отклонениями  $R = R(\tau) = \max_{1 \leq t \leq \tau} (X_{\tau,t}) - \min_{1 \leq t \leq \tau} (X_{\tau,t})$  и стандартное отклонение  $S = S(\tau)$ . Показатель Херста

вычисляем по формуле 
$$\frac{R}{S} = \left(\frac{\tau}{2}\right)^H.$$

Логарифмируя обе части этого равенства, получаем последовательность координат точек  $(x_\tau, y_\tau)$ , где  $x_\tau = 1000, 2000, \dots, 12000$ ,  $y_\tau = H(\tau) = \frac{\lg(R(\tau)/S(\tau))}{\lg(\tau/2)}$ . Построив график зависимости  $H(\tau)$  и линию тренда, определим аппроксимированное значение показателя Херста  $H$ .

11. На рисунках 13 – 15 показан результат R/S-анализа изучаемых сигналов. Эмпирические значения показателя Херста отклоняются от теоретического значения ( $H=0,5$ ) случайного сигнала. Показатель Херста сигналов показан в таблице 2.

Таблица 2. Показатель Херста

Сигнал	Показатель Херста
s1	0,3745
s2	0,7139
s3	0,6882

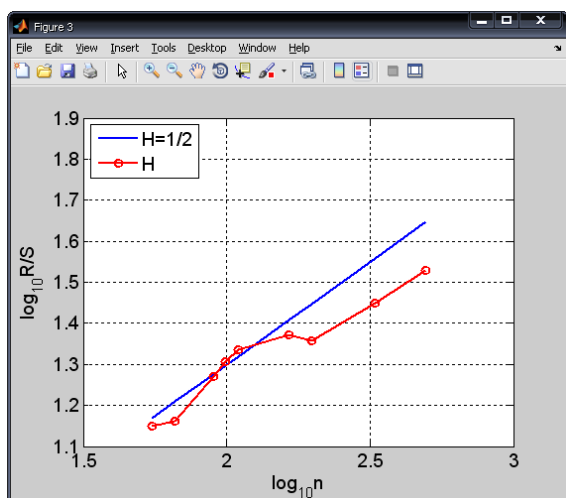


Рисунок 13 – Результат R/S-анализа сигнала s1

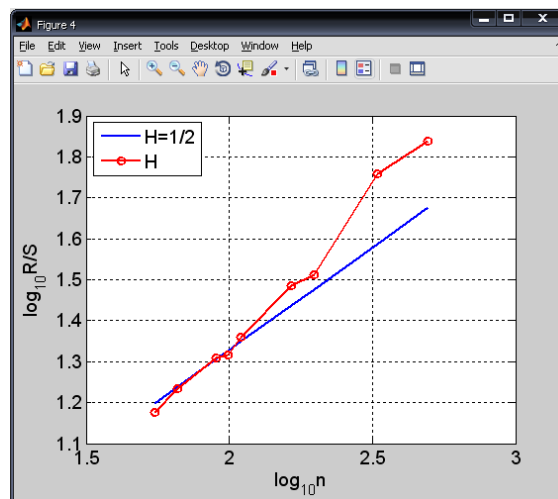


Рисунок 14 – Результат R/S-анализа сигнала s2

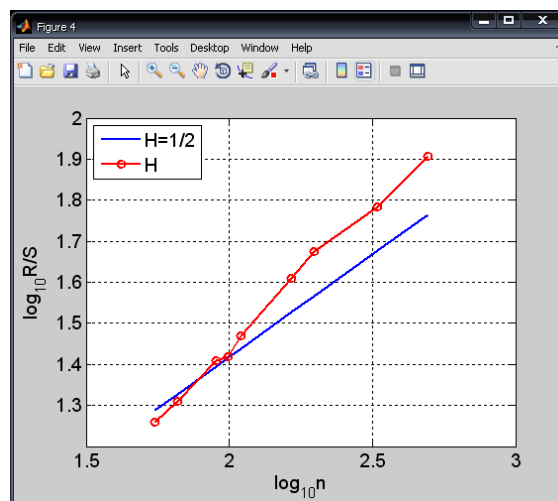


Рисунок 15 – Результат R/S-анализа сигнала s3

## Выводы

12. Анализ речевых сигналов является актуальной задачей поиска объективного показателя эмоционального состояния человека, выполняющего ответственную деятельность.

13. В данной работе для сигналов эмоционально окрашенной речи выполнен фрактальный анализ плотности распределения, автокорреляционных функций и энергетических спектров. Найдены значения показателя Херста. Получены следующие результаты:

14. Изучаемые сигналы не подчиняются нормальному распределению.
15. Изучаемые сигналы не обладают экспоненциально спадающей АКФ, свойственной случайным сигналам.
16. Для сигнала s1 выполняется условие  $0 < H < 0,5$ . Этот ряд является антиперсистентным.
17. Для сигналов s2, s3 выполняется условие  $0,5 < H < 1$ . Эти сигналы являются трендоустойчивыми (персистентными) и обладают долговременной памятью.

## Литература

1. Розалиев, В.Л. Моделирование эмоциональных реакций пользователя при речевом взаимодействии с автоматизированной системой: дис. ...канд. тех. наук / В.Л. Розалиев. Волгоград: ВГТУ, 2009.
2. Хроматиди, А.Ф. Исследование психофизиологического состояния человека на основе эмоциональных признаков речи: дис. ...канд. тех. наук / А.Ф. Хроматиди. Таганрог, 2005.
3. Калюжный, М.В. Система реабилитации слабобудящих на основе настраиваемой сегментарной модели синтезируемой речи: дис. ...канд. тех. наук / М.В. Калюжный. СПб., 2009.
4. Соловьева, Е.С. Методы и алгоритмы обработки, анализа речевого сигнала для решения задач голосовой биометрии: дис. ...канд. тех. наук / Е.С. Соловьева. М., 2008.
5. Chen, Y.T. A study of emotion recognition on mandarin speech and its performance evaluation: Ph. D. dissertation / Y.T. Chen. Tatung, 2008.
6. Morist, M.U. Emotional speech synthesis for a radio dj: corpus design and expression modeling: master thesis MTG-UPF dissertation / M.U. Morist. Barcelona, 2010.
7. Siging, W. Recognition of human emotion in speech using modulation spectral features and support vector machines: master of science dissertation / W. Siging. Kingston, 2009.
8. Сидоров, К.В. К вопросу оценки эмоциональности естественной и синтезированной речи по объективным признакам / К.В. Сидоров, М.В. Калюжный // Вестник Тверского государственного технического университета. Вып. 18. Тверь, 2011. С. 81–85.
9. Н.Н. Лебедева, Р.А. Марагей, А.Н. Котровская. Фрактальный анализ речевого сигнала при различении эмоционального состояния в модельных экспериментах. [//http://www.radiotec.ru/article/7266](http://www.radiotec.ru/article/7266)
10. Кузьмичев С.А. Опыт сравнения речевых и стандартных аудиосигналов в параметрах фрактального анализа // Концепт. – 2015. – Спецвыпуск № 28. [//http://e-koncept.ru/2015/75376.htm](http://e-koncept.ru/2015/75376.htm)

*Бельков Д.В., Едемская Е.Н. Фрактальный анализ речевых сигналов. Анализ речевых сигналов является актуальной задачей поиска объективного показателя эмоционального состояния человека, выполняющего ответственную деятельность. В данной работе для речевых сигналов выполнен фрактальный анализ плотности распределения, автокорреляционных функций и энергетических спектров. Найдены значения показателя Херста. Он может быть показателем эмоционального состояния человека, поскольку степень фрактальности речевых сигналов зависит от эмоционального состояния и гендерных различий.*

*Ключевые слова:* речевой сигнал, плотность распределения, автокорреляционная функция, энергетический спектр, показатель Херста.

*Belkov D.V., Edemskaya E.N. Fractal analysis of speech signals. Analysis of speech signals is actual task of the search of objective index for emocial state of the man. In this work the analysis of closeness of distributing, autocorrelation functions and power spectrums are executed. The values of Hurst index are found. It can be the index for emocial state of the man because the fractal value of speech signals is depending of emocial state and gender difference.*

*Keywords:* speech signal, closeness of distributing, autocorrelation function, power spectrum, the Hurst index.

Статья поступила в редакцию 20.03.2018  
Рекомендована к публикации д-ром техн. наук В.Н. Павлышом

## Защита веб-ресурса от несанкционированного доступа с использованием метода аутентификации без необходимости ввода личных данных

Л.О. Воробьев, А.В. Чернышова  
Донецкий национальный технический университет  
[lev.vorobjev@rambler.ru](mailto:lev.vorobjev@rambler.ru), [chernyshova.alla@rambler.ru](mailto:chernyshova.alla@rambler.ru)

*Воробьев Л.О., Чернышова А.В. Защита веб-ресурса от несанкционированного доступа с использованием метода аутентификации без необходимости ввода личных данных. В статье рассматривается метод аутентификации, позволяющий избавиться от необходимости ввода личных данных пользователя для доступа к веб-ресурсу. Проанализированы существующие методы аутентификации, определены их достоинства и недостатки. Описывается авторский алгоритм хеширования, приводится обоснование его применения в разработанном методе аутентификации.*

**Ключевые слова:** аутентификация, авторизация, идентификация, несанкционированный доступ, информационная система

### Введение

Обеспечение защиты информации от несанкционированного доступа является актуальным вопросом в обеспечении компьютерной безопасности при разработке корпоративных информационных систем.

### Постановка задачи

Цель: Разработка средств защиты информационного ресурса в Интернете от несанкционированного доступа (НСД) с авторизацией без необходимости ввода личных данных.

Перед разработчиками информационных систем часто возникает задача обеспечения защиты от несанкционированного доступа к разрабатываемому информационному ресурсу в Интернете. Предоставление доступа к защищаемому ресурсу для определенного пользователя называется авторизацией [1, с. 117], и включает процедуру идентификации пользователя и аутентификации для определения подлинности пользователя.

Необходим метод авторизации по идентификатору устройства и учетной записи в операционной системе. Этот метод аутентификации позволит освободить пользователя от необходимости ввода своих личных данных для регистрации в базе данных электронного ресурса и облегчить процедуру аутентификации.

В качестве информационного веб-ресурса разрабатывается электронная зачетная система. Пользователи системы сохраняют результаты своей работы в виде заметок, отчетов и публикаций. Авторы регистрируются в

организации с установленной системой, и необходимо обеспечить возможность работы с ресурсом без необходимости хранения их личных данных.

Для получения доступа к этому ресурсу необходимо иметь ключ, представленный цифрами и латинскими буквами. Один ключ выдается на одно устройство. При первом доступе к ресурсу в базе данных сохраняется зашифрованный хеш этого ключа и зашифрованный идентификатор устройства, с которого был получен доступ. Доступ с другого устройства с помощью этого ключа после его активации становится невозможным.

При получении доступа в файлах cookies сохраняется сертификат доступа в зашифрованном виде с ключом, который зависит от идентификатора устройства. Доступ к ресурсу с помощью этого cookies-файла возможен только с данного устройства и только при входе в учетную запись операционной системы. Копирование cookies на другое устройство не даст возможности злоумышленнику получить доступ к защищенному ресурсу.

Администратор защищаемого ресурса должен иметь возможность создавать новые ключи для регистрации пользователей и блокировать отдельные активированные ключи при необходимости.

### Структура программной системы

Защищаемая программная система представляет собой информационную систему для хранения и редактирования заметок для электронной зачетной системы. Заметки сохраняются в базе данных под управлением СУБД PostgreSQL в зашифрованном виде.

Доступ к базе данных осуществляется по HTTP протоколу через удаленный сервер. Это позволяет пользователям взаимодействовать с системой посредством Интернет сервиса, мобильного телефона или программой на ПК, для того, чтобы создавать и синхронизировать редактируемые заметки.

Разрабатываемая программная система состоит из веб-сервера с базой данных и клиентских приложений. Структура системы описана на языке UML [2] в виде диаграммы компонентов (рисунок 1).

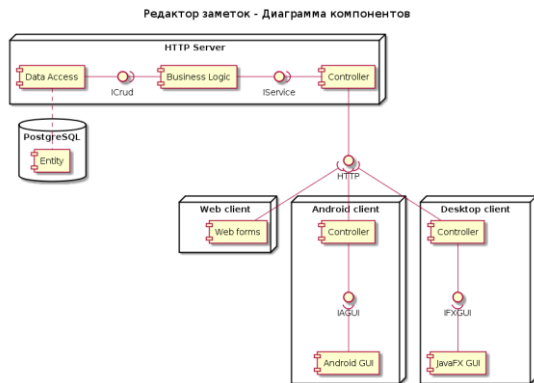


Рисунок 1 – Диаграмма компонентов разрабатываемой системы

Компонент Data Access предназначен для доступа к базе данных PostgreSQL посредством объектно-реляционного отображения. Интерфейс CRUD предоставляет операции создания, чтения, обновления и удаления данных. Схема базы данных приведена на рисунке 2.

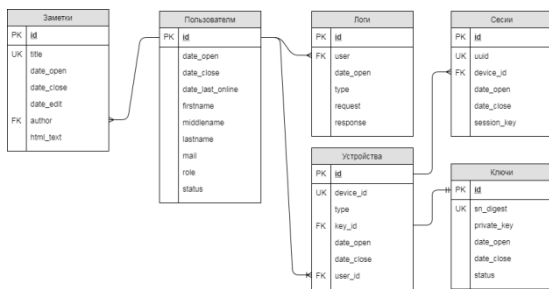


Рисунок 2 – Схема базы данных разрабатываемого ресурса

Таблица ключей содержит серийные номера в хешированном виде и секретные ключи асимметричного алгоритма шифрования RSA для получения зашифрованных данных от регистрируемого устройства.

Зарегистрированное устройство сохраняется в таблице устройств, в которой содержится идентификатор устройства для Android, или серийный номер жесткого диска для ноутбуков или ПК, или MAC-адрес сетевой

карты, если авторизация проходит через веб-интерфейс. Тип идентификатора устройства определяется значением поля type в таблице устройств.

Для авторизации устройство должно предъявить серийный номер, хеш которого сравнивается со значением поля sn\_digest ключа, зарегистрированного для данного устройства. При успешной авторизации генерируется UUID сессии, и передается в зашифрованном и подписанном виде клиенту. Ключ шифрования хранится в поле session\_key таблицы сессий.

При необходимости, пользователь авторизованного устройства может создать учетную запись автора заметок и привязать её к своим устройствам для синхронизации. Учетные данные хранятся в таблице пользователей.

Порядок регистрации нового пользователя в системе показан на рисунке 3.

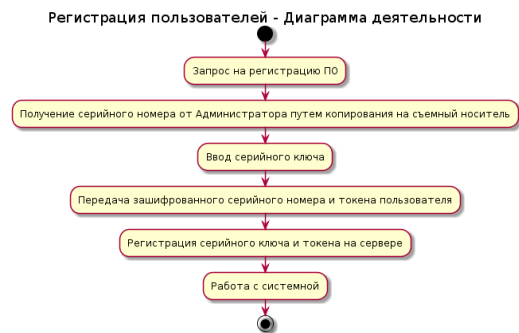


Рисунок 3 – Порядок регистрации пользователей в информационной системе

Серийный номер для регистрации нового устройства выдается администратором ресурса на съемном носителе вместе с открытым ключом шифрования. Конечный пользователь использует эти материалы для регистрации одного своего устройства, которое получит доступ к защищаемому устройству. Под токеном пользователя понимается зашифрованный идентификатор устройства. Сервер проверяет полученные зашифрованные данные, и если серийный номер действительно существует в базе данных и еще не был активирован, то новое устройство получает доступ к защищаемому ресурсу.

### Стандартные алгоритмы аутентификации, достоинства и недостатки

Известные методы аутентификации:

- протокол аутентификации Нидхема-Шрёдера [3];
- протокол аутентификации по квитированию вызова [4, с. 860];

– аутентификация на основе одноразового пароля [4, с. 861];  
– аутентификация на основе сертификатов [4, с. 863];  
– протокол аутентификации OAuth 2.0 [5].

Протокол Нидхема – Шрёдера позволяет взаимно аутентифицировать две стороны посредством удостоверяющего центра. Реализацией данного протокола является система Kerberos [6], используемая в Microsoft ActiveDirectory и OpenLDAP для Linux. Сервер аутентификации хранит секретные ключи всех абонентов. Клиенты А и Б устанавливают защищенное соединение в следующей последовательности:

$$A \rightarrow SA: \{A, B, I_{A1}\} \quad (1.1)$$

где  $I_{A1}$  – одноразовый идентификатор клиента А.

Получив это сообщение, СА извлекает из базы данных секретные ключи абонентов А и Б, вычисляет сессионный ключ К, и отправляет следующую информацию:

$$SA \rightarrow A: \{I_{A1}, B, K, \{K, A\}^{KB}\}^{KA} \quad (1.2)$$

где  $KB$  и  $KA$  – секретные ключи абонентов.

Субъект А расшифровывает полученный пакет, и передает субъекту Б данную информацию:

$$A \rightarrow B: \{K, A\}^{KB} \quad (1.3)$$

Субъект Б расшифровывает полученный пакет и отправляет А свой идентификатор:

$$B \rightarrow A: \{I_B\}^K \quad (1.4)$$

Ожидается отклик абонента А:

$$A \rightarrow B: \{I_B - 1\}^K \quad (1.5)$$

Таким образом, оба абонента прошли взаимную аутентификацию.

Протокол Нидхема–Шрёдера обеспечивает надежную аутентификацию абонентов.

Аутентификация по квитированию вызова [7] заключается в передаче хешированного пароля между двумя абонентами. Схема аутентификации между клиентом А и сервером Б:

$$A \rightarrow B: \{\text{запрос на аутентификацию}\} \quad (2.1)$$

$$B \rightarrow A: \{ID, Challenge\} \quad (2.2)$$

$$A \rightarrow B: \{d(ID, Challenge, d(password))\} \quad (2.3)$$

где  $d$  – функция хеширования.

Сервер сравнивает полученное значение с ожидаемым значением, и если результаты совпадают:

$$B \rightarrow A: \{Success\} \quad (2.4)$$

Надежность данного алгоритма аутентификации зависит от сложности пароля, поскольку известен случай взлома данного алгоритма с помощью алгоритма прямого перебора.

Для аутентификации по одноразовому паролю используется аппаратные или программные устройства, называемые токенами. Они вычисляют значение одноразового пароля

по таймеру. Пользователь вводит этот пароль для аутентификации. Сервер выполняет вычисления по тому же алгоритму, что заложен в аппаратном ключе. Преимущество данного способа в надежности одноразового пароля по сравнению с условно-постоянным паролем.

При аутентификации на основе сертификатов информацию о пользователях предоставляют сами пользователи с помощью сертификатов, которые выдает централизованная организация. Сертифицирующие организации публикуют свои открытые ключи, необходимые для проверки цифровых сертификатов. Сертификат содержит: открытый ключ владельца сертификата; сведения о владельце; наименование сертифицирующей организации; электронная подпись сертификата, зашифрованная закрытым ключом организации. Данный метод используется, когда известно количество сертифицирующих организаций.

Метод аутентификации OAuth 2.0 позволяет получить доступ к нескольким сетевым ресурсам с помощью одной учетной записи без необходимости передачи логина и пароля. Уязвимость системы в том, что при получении несанкционированного доступа к одному ресурсу потенциальный злоумышленник получает доступ сразу ко всем ресурсам.

Также существует двухфакторная аутентификация, когда проверка осуществляется по нескольким аутентифицирующим особенностям: определенному свойству, знанию или владению. Такой подход обеспечивает большую надежность и используется в электронной почте или банковской системе.

### **Предлагаемый алгоритм аутентификации**

Предлагаемый алгоритм аутентификации позволяет получить доступ к защищаемому ресурсу без необходимости передачи логина и пароля. Аутентификация основывается на владении секретным серийным номером для доступа к ресурсу с одного устройства. В отличие от стандартных способов авторизации, где регистрируются пользователи, предлагается способ регистрации устройств.

Авторизуемый пользователь обладает уникальным серийным номером SN и открытым ключом организации К для асимметричного шифрования.

Клиент генерирует ключ сессии для защищенного соединения:

$$A \rightarrow B: \{\text{запрос на аутентификацию}, SK\}^K \quad (3.1)$$

Сервер аутентификации отправляет зашифрованный ключ для аутентификации ЕК:

$$B \rightarrow A: \{ID, Challenge, EK\}^{SK} \quad (3.2)$$

Клиент отправляет аутентифицирующие данные серверу:



$A \rightarrow B: \{ ID, Challenge, HARD, d(SN) \}^{EK} (3.3)$   
где HARD – серифный номер жесткого диска клиента.

Сервер аутентификации расшифровывает полученный пакет своим закрытым ключом, и если дайджест серифного номера по базе данных соответствует данному устройству, то возвращает сертификат доступа, зашифрованный секретным ключом СК:

$B \rightarrow A: \{ PK, \{ UUID, HARD \}^{CK} \}^{EK} (3.4)$   
где UUID – уникальный идентификатор сессии; СК – сгенерированный секретный ключ данной сессии; PK – открытый ключ клиента для шифрования передаваемых данных повторной аутентификации.

Далее клиент сохраняет ключ PK и аутентифицируется с помощью полученного сертификата:

$A \rightarrow B: \{ HARD, \{ UUID, HARD \}^{CK} \}^{PK} (3.5)$

Сервер расшифровывает данный пакет и находит идентификатор сессии в базе данных. Если переданный идентификатор устройства совпадает с зашифрованным в сертификате и в базе данных, то клиенту предоставляется доступ.

В отличие от протокола Нидхема – Шрёдера, в предложенном способе уязвимыми являются серийные номера. Поэтому их необходимо хранить и передавать надежными каналами, через съемные носители.

Серийные номера генерируются на сервере, как случайные последовательности букв и цифр. В таблицу ключей записываются значения функции хеширования для сгенерированных ключей.

Для получения дайджеста предполагается использовать алгоритм MD5 [8]. Однако разрабатывается новый алгоритм, основанный на логической функции, описанной в следующем пункте.

### Авторский алгоритм хеширования

Алгоритм вычисления дайджеста сообщения можно модифицировать, если использовать новый вид преобразования, изображенного на рисунке 4.

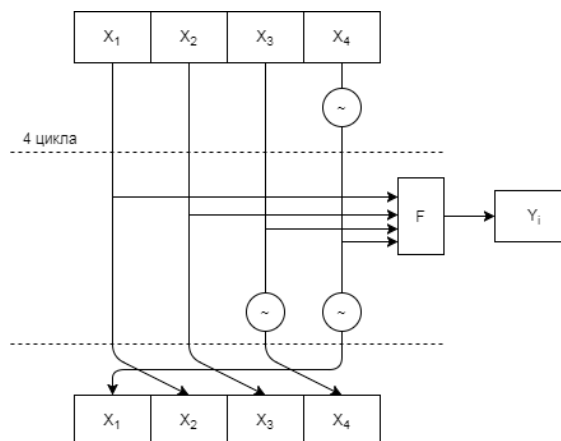


Рисунок 4 – Преобразование для новой функции хеширования

Побитовая функция F имеет следующий вид:

$$F(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1 \wedge X_3 \vee X_2 \wedge X_4 \vee X_2 \wedge X_3 \quad (4.1)$$

где операции конъюнкции и дизъюнкции выполняются для каждого бита исходного значения.

Набор выходных значений определяется выражениями:

$$Y_1 = F(X_1, X_2, X_3, \neg X_4); Y_2 = F(X_4, X_1, X_2, \neg X_3); Y_3 = F(X_3, X_4, X_1, \neg X_2); Y_4 = F(X_2, X_3, X_4, \neg X_1); \quad (4.2)$$

Таблица истинности функции (4.1) имеет одинаковое количество значений 1 и 0. Это гарантирует однозначность преобразования. Посредством использования основных законов булевой алгебры [9, с. 81] или с помощью пакета Wolfram Mathematica было несложно показать, что обратное преобразование возможно:

$$X_1 = F(Y_1, Y_2, Y_3, \neg Y_4); X_2 = F(Y_4, Y_1, Y_2, \neg Y_3); X_3 = F(Y_3, Y_4, Y_1, \neg Y_2); X_4 = F(Y_2, Y_3, Y_4, \neg Y_1); \quad (4.3)$$

Поэтому для получения необратимого результата необходимо выполнить функцию свертки:

$$S(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) = F(Y_1 \gg 2, Y_2 \gg 4, Y_3 \gg 6, \neg Y_4) \text{ XOR } F(Y_4 \gg 1, Y_1 \gg 3, Y_2 \gg 5, \neg Y_3 \gg 7) \quad (4.4)$$

где оператор  $\gg$  обозначает побитовый циклический сдвиг.

Полученное в результате значение является функцией от 8 независимых аргументов и для нахождения исходного значения необходим полный перебор.

### Выводы

Предложенный алгоритм решает проблему аутентификации без необходимости ввода личных данных. Традиционная авторизация в Интернете предполагает регистрацию пользователей с вводом имени пользователя и других его персональных данных. Обязательным пунктом регистрации является согласие пользователя на обработку

персональных данных. Предложенный метод аутентификации решает проблему регистрации, когда пользователь не согласен с последним пунктом.

Среди недостатков метода является слабая защищенность серверных ключей. Полученный ключ может быть передан третьим лицам до активации, что может привести к утечке информации. Поэтому предусмотрена возможность своевременного блокирования активированных ключей.

Предложена теоретическая возможность разработки нового алгоритма хеширования. Использование разработанного алгоритма повысит надежность предложенного метода аутентификации.

### **Литература**

1. А.Ю. Щеглов «Защита компьютерной информации от несанкционированного доступа» [Текст] / А.Ю. Щеглов, – СПб.: Наука и техника, 2004 г. – 384 стр.

2. Г. Буч «Язык UML. Руководство пользователя. 2-е изд.: Пер. с англ. Мухин Н.» [Текст] / Буч Г., Рамбо Д., Якобсон И., – М.: ДМК Пресс, 2006. – 496 с.: ил.

3. Ю.А. Семенов «Протокол аутентификации Нидхэма-Шредера в случаях симметричной и асимметричной системы шифрования» [Электронный ресурс], 2004. – Режим доступа: [http://book.itep.ru/6/n\\_s\\_p\\_k.htm](http://book.itep.ru/6/n_s_p_k.htm) (дата обращения: 03.11.17)

4. В.Г. Олифер «Компьютерные сети. Принципы, технологии, протоколы: Учебник для вузов. 4-е изд.» / В.Г. Олифер, Н.А. Олифер – СПб.: Питер, 2010. – 2010. – 944 с.: ил.

5. RFC 6749 «Аутентификация OAuth 2.0»

6. RFC 1510 «Сервис аутентификации Kerberos 5.0»

7. RFC 2617 «Аутентификация по HTTP»

8. RFC 1321 «Алгоритм MD5»

9. И.А. Назарова «Дискретный анализ: учебно-методическое пособие» / И.А. Назарова – Донецк: ГВУЗ «ДонНТУ», 2012. – 277 с.

*Воробьев Л.О., Чернышова А.В. Защита веб-ресурса от несанкционированного доступа с использованием метода аутентификации без необходимости ввода личных данных. В статье рассматривается метод аутентификации, позволяющий избавиться от необходимости ввода личных данных пользователя для доступа к веб-ресурсу. Проанализированы существующие методы аутентификации, определены их достоинства и недостатки. Описывается авторский алгоритм хеширования, приводится обоснование его применения в разработанном методе аутентификации.*

**Ключевые слова:** аутентификация, авторизация, идентификация, несанкционированный доступ, информационная система

*Vorobuev L.O., Chernyshova A.V. Protecting a web resource from unauthorized access using an authentication method without the need to enter personal data. The article describes an authentication method that allows you to get rid of the need to enter the user's personal information to access the web resource. Existing methods of authentication are analyzed, their advantages and disadvantages are determined. The author's algorithm of hashing is described; the substantiation of its application in the developed method of authentication is given.*

**Keywords:** authentication, authorization, identification, unauthorized access, information system

Статья поступила в редакцию 20.03.2018

Рекомендована к публикации д-ром техн. наук В.Н. Павлышом

УДК 336.4:519.86

## Методика исследования безопасности функционирования систем электронной коммерции средствами математического моделирования

Г.В. Доценко

Донецкий национальный технический университет  
dogeo47@mail.ru

*Доценко Г.В. Методика исследования безопасности функционирования систем электронной коммерции средствами математического моделирования. Предложена методика прогнозирования наличия уязвимых для атак НСД элементов автоматизированной системы электронного бизнеса (АСЭБ), защиту которой необходимо предусматривать при разработке политики безопасности. Использован аппарат стохастических сетей и методы параметрической оптимизации СМО, с помощью которых достигим аналитический анализ, поэтапно уточняющий параметры процессов обслуживания платежных документов в АСЭБ. Полученные приближенные оценки окончательно детализируются на программных имитационных моделях любой сложности в среде GPSS, что дает возможность выявления критических мест в АСЭБ и их устранения для обеспечения требований безопасности функционирования объектов электронного бизнеса.*

**Ключевые слова:** система электронного бизнеса, информационная безопасность, платежный документ, математическая модель, параметрическая оптимизация, имитационная модель.

Электронная коммерция — это быстрый и экономичный вид бизнеса, который не знает границ. Лавинообразный рост объемов взаимодействия субъектов и объектов автоматизированных систем электронного бизнеса требует оценки актуальности эффективности, а, значит, и безопасности их функционирования [1,2]. Платежным системам, автоматизированным банковским системам, сетям интернет-магазинов свойственны ситуации «стопора платежей» [3], связанные с нарушением поступающими запросами функциональных лимитов: по финансовым ресурсам при клиринге, ограниченностью предложенных к реализации товарных запасов, логистическими сбоями. Это вызвано случайным характером множества поступающих заявок на обслуживание, непрерывно циркулирующих в системах электронной коммерции.

Применение математических методов и моделей для исследований позволяет проанализировать реальный эффект от использования ресурсов Интернета в коммерческих целях. Техно-технологические и вирусные сбои в работе автоматизированных систем нежелательны, но вероятны в процессах обслуживания заявок от субъектов, являющихся

участниками законных сделок, и опасны — с точки зрения уязвимости от интернет-мошенников, незаконно использующих в своих интересах возникающие (или инициируемые ими) сбои в работе автоматизированных систем электронной коммерции. Для решения задач анализа рисков и составления кризисного плана устранения угроз в автоматизированных системах электронного бизнеса требуется методика и инструменты оценки их адекватно корректной реакции на поступление требующих обслуживания, но «сбойных» заявок, и для выявления узких мест в защите систем электронной коммерции [4].

Характерные особенности анализа и развития систем электронной коммерции, несмотря на короткий период ее существования, получили освещение в российской и западной экономической литературе [5,6,7]. Среди отечественных авторов, внесших заметный вклад в освещение проблем развития методов анализа систем электронной коммерции, можно выделить Аверченкова В.И., Аммосова Ю.М., Афонину СВ., Ахметову С. Г., Балабанова И.Т., Волкову В.Н., Гурова В.В., Деднева М.А., Емельянова А.А., Ефремова В.С., Запечникова С.В., Кульченко М.В., Ляпунова СИ., Маршавина Р.А.,

Мясникову Л.А., Попова В.М., Сенаторова М.Ю., Смирнова С.Н., Соколову А.Н., Успенского И.Н. и др. Среди зарубежных исследователей, разрабатывающих проблему развития электронной коммерции, следует отметить Багета М., Вагера Х., Вахренса М., Кларка Р., Козье Д., Лоу П., Матоу А., Магнусона П., Минса Г., Карвера Д., Соломона Р., Стэндинга С, Хонекут Дж., Церовак Б., Шнайдера Д., Шукнехта Л., Эймора Д. и др.

В основе электронной коммерции находится платежная система - совокупность финансовых и нефинансовых институтов, существующих в определенный исторический период и взаимодействующих в рамках национального законодательства и интернациональных стандартов с целью оптимизации денежного оборота и удовлетворения расчетно-платежных потребностей общества в соответствии с принятой денежно-кредитной политикой, требующей развития национальной экономики для обеспечения эффективной социальной и хозяйственной деятельности. Современные платежные системы должны иметь значительный потенциал для качественного видоизменения и количественного расширения своих функций. Для этого они обладают особыми характеристиками. Суть этих характеристик состоит в обеспечении:

- 1) роста скорости проведения платежей (достигается как за счет технической составляющей, так и за счет финансового механизма системы);
- 2) сокращения издержек (в том числе транзакционных) - как собственно на платежи, так и на организацию операций трансформации и перемещения денег (достигается за счет увеличения количества операций и сокращения этапов перемещения денег);
- 3) высокой степени удобства платежей для субъектов сделок (состоит в приближении платежной инфраструктуры к субъектам, упрощении за счет стандартизации платежно-расчетных операций, использовании банковского маркетинга);
- 4) безопасности проведения платежей и приемлемого уровня рисков (обеспечивается достижением прозрачности и понятности схем перемещения денег за счет использования общих банковских и специфических механизмов минимизации рисков);
- 5) социальной эффективности (в широком смысле) платежных систем, что выражается в общем улучшении социального климата, в росте доступности финансовых услуг по категориям пользователей и территориям, в приросте

эффективности смежных (пограничных) сфер экономической и социальной деятельности.

Поскольку базовыми элементами платежной системы являются автоматизированные банковские системы (АБС). Не следует рассматривать принципы построения платежных систем в отрыве от проблемы оптимизации расчетной деятельности отдельных ее элементов. Каждый банк после проработки своей системы организации межбанковских платежей (выработки наиболее удобных ему и его клиентам форм и методов проведения платежей) и после построения такой системы (открытия корреспондентских счетов в других банках или клиринговых учреждениях и организации филиальной сети) приступает к решению еще одной важнейшей проблемы. Ее суть состоит в определении количества ресурсов, которые банк обязан держать на своих корреспондентских счетах, и распределении этих ресурсов между совокупностью его корсчетов, определение суммы ресурсов. Для этого необходимо определить:

- a. минимальное количество средств, достаточных для осуществления текущих платежей (многие банки совершенно справедливо стремятся доводить этот минимум до величин близких к нулю, так как остатки по корсчетам в соответствии со сложившейся практикой корреспондентских отношений обычно не приносят дохода);
- b. максимальную сумму средств, подлежащих хранению на корреспондентских счетах, сверх которой банк будет иметь ощутимые потери в доходности своих активов, отвлекая средства на поддержание корреспондентской сети;
- c. оптимальное количество средств, подлежащих хранению на его корсчетах. Именно это количество ресурсов банка будет оставаться на его корсчетах при нормальной ситуации.

Вторая и несравненно более сложная задача сводится к распределению этих ресурсов, выделенных по корреспондентским счетам, участвующим в системе межбанковских расчетов. Теоретического решения этой проблемы, а также какого-либо универсального решения, которое подходило бы для всех банков пока не существует. Лишь обозначены некоторые направления, в которых, как правило, ведется решение этой проблемы [9]. Во-первых, требуется провести статистическое исследование для определения средних объемов потоков платежей (для каждого направления). Во-вторых, для этого может быть использован

инструмент OLAP-технологий и пакеты статической обработки данных. Поэтому необходима разработка модели, для оценки возможных дублирующих вариантов проведения платежей, (например, когда конкретный платеж в регион может осуществиться через банк-корреспондент в этом регионе, клиринговый центр или платежную систему центрального банка). В-третьих, все варианты платежей оцениваются с точки зрения экономической эффективности распределения ресурсов по корреспондентским счетам, наиболее выгодным для банка и в плане их хранения (на остатки средств в разных банках могут начисляться разные проценты).

Выделенное количество ресурсов распределяется в установленном соотношении между корсчетами и в дальнейшем поддерживаются соответствующие суммы на каждом из корсчетов и заданные соотношения между ними. В дальнейшем решение перечисленных задач должно корректироваться на основе постоянного прогноза остатков по корсчетам и с учетом прогноза их текущих и долговременных изменений. Постоянный контроль за состоянием корсчетов и управление распределением ресурсов на них позволяют достичь определенного экономического эффекта и не в меньшей степени повышения авторитета банка, т.к. поддержание надежной, устойчивой, экономичной разветвленной корреспондентской сети оказывает существенное влияние на клиентов кредитной организации и перспективы их дальнейшего увеличения.

Следует отметить, что для быстрого пополнения средств на корреспондентских счетах, в случае их внезапной нехватки, целесообразно иметь специальные резервы в высоколиквидных активах. Поэтому необходимы предварительные прогнозные оценки необходимых резервов и «скорости» их использования. Анализ системы электронных межбанковских расчетов позволяет определить ее как систему организаций, наделенных государством правом обслуживания платежного оборота и расчетных отношений, обеспечиваемых платежными инструментами, использование которых в экономических отношениях субъектов хозяйствования регулируется государством и нормами делового оборота.

Таким образом, платежная система как на уровне отдельного банка так и на уровне системы в целом содержит факторы для оптимизации, и работа по ее совершенствованию особенно важна, поскольку оценка банка клиентами во многом зависит именно от скорости и качества осуществления платежей. Построению платежной системы должен предшествовать, прежде всего, выбор

приоритетного способа осуществления расчетов и организации его автоматизации. А исполнение платежей в любой платежной системе может происходить двумя способами: на валовой основе (система брутто-расчетов) или на чистой основе (система нетто-расчетов).

Математическую модель автоматизированных межбанковских расчетных процессов рассмотрим на примере расчетного центра (РЦ). В первом приближении модель представим в виде единственной одноканальной системы массового обслуживания (СМО), характеризующую осуществление расчетов через платежную систему. Платежный документ (ПД), поступающий на вход в СМО в момент выполнения оперативных задач обслуживающим устройством, ожидает возможности расчетного центра загрузить его и принять для обработки, что позволяет представлять математическую модель расчетного центра в виде одноканальной СМО с ожиданием. Представленная на рис.1 СМО предназначена для обработки некоторого потока платежных документов, поступающих на вход системы большей частью нерегулярно (в случайные моменты времени).

Загрузка платежных документов и их последующая обработка длится не постоянно, заранее известное время, а случайное, зависящее от ряда случайных факторов. Целью математического описания расчетного центра в виде СМО является пояснение построение математической модели, связывающей производительность канала обслуживания, характер потока ПД и др. с показателями эффективности функционирования системы расчетов, описывающими ее способность обслуживать поток ПД.

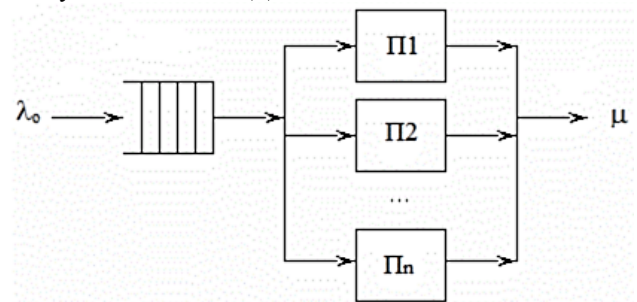


Рисунок 1 – СМО заявок платежной системой.  $\Pi_i$  – однотипные звенья платежной системы, выполняющие обслуживание платежных документов.

На рис.1 входящий поток имеет интенсивность  $\lambda_0$ , а поток обработанных имеет интенсивность  $\mu$ . Предполагается, что ПД – простейшие потоки, обладающие свойствами ординарности:

- вероятность поступления более одного события за элементарный «малый» промежуток времени  $\Delta t$  пренебрежимо мала;

- отсутствия последействия (события в потоке появляются в последовательные моменты времени независимо друг от друга).

Немаловажным свойством простейших потоков является свойство стационарности. В реальной СМО часто имеет место нестационарность процесса (в различные часы дня и различные дни месяца поток ПД может меняться. Он может быть интенсивнее во второй половине операционного дня, а также в первые и последние дни месяца. Однако в целом пуассоновский закон распределения с достаточно высоким приближением отражает процессы рассматриваемой модели РЦ, где входящий поток можно представить в виде суммы большого числа независимых потоков и ни один из которых не является сравнимым по интенсивности со всем суммарным потоком. Данное предположение становится верным благодаря общей теореме А.Я.Хинчина [1].

Для расчета предельных характеристик функционирования рассматриваемой системы, описывающих ее способность справляться с потоком ПД, необходимо рассчитать показатель производительности канала обслуживания. Возможности расчетного центра коммерческого банка (производительность канала обслуживания) обеспечиваются его структурой, а также встроенными алгоритмами проведения расчетов используемой подсистемой на сервере СУБД. Разложим путь ПД в СМО на  $n$  элементарных отрезков на интервале процесса его обслуживания. Получим следующий состав этапов:

– время прохождения каждым ПД контрольно-учетных процедур на сервере БД подсистемы расчетов;

– время вывода реестра обрабатываемых ПД на бумажный носитель;

– время прохождения каждым ПД дополнительных контрольно-учетных процедур на компьютере оператора.

Как видим, детализация процесса массового обслуживания множества платежных документов в каждом звене платежной системы на рис.1 требует отобразить параллельность выполнения всех процессов, ограниченность ресурсов системы и наличие очередей заявок на их обслуживание на любом этапе с учетом среднестатистического значения вероятности обслуживания (события) заявки в каждом звене платежной системы. Поэтому, основываясь на описанном выше принципе обслуживания потоков заявок в межбанковских расчетах, можно аналогично представить платежную

систему в виде совокупности взаимосвязанных СМО, представленную на рис.2.

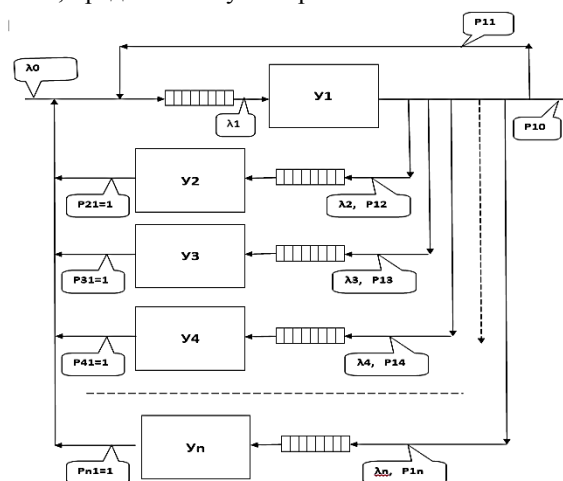


Рисунок 2 – Стохастическая сетевая модель платежной системы, составляющая основу автоматизированной системы электронного бизнеса

На рис.2 приняты следующие обозначения:

$Y_1$  – система идентификации запроса-заявки на выбор типа обслуживания или требуемой функции платежной системы (контроль ПД - платежного документа) или определение завершения обслуживания клиента;

$Y_2 - Y_n$  - подсистемы платежной системы, выполняющие запросы клиентов на перечисление и прием сумм, на разрешение и выдачу обменной валюты, выполнение операций по клирингу, составление и выдача отчетов, диагностика системы и т.д.;

$P_{ij}$  – вероятность передачи заявок клиентов на обслуживание из  $i$  – той подсистемы платежной системы в  $j$  – тую;

$P_{10}$  – вероятность завершения обслуживания заявок клиентов платежной системой;

$\lambda_i$  – интенсивность потока заявок в  $i$  – тую подсистему;

$\lambda_0$  – интенсивность внешнего (входного) потока заявок на выполнение требуемых клиентами функций платежной системой;

Для выполнения математических преобразований введем следующие обозначения:  
 $\lambda$  – интенсивность входного потока заявок (на обслуживание платежных документов);

$l$  – длина очереди заявок;

$w$  – среднее время ожидания обслуживания каждой заявкой;

$v$  – среднее время обслуживания заявки;

$\mu$  - скорость обслуживания заявок звеном платежной системы.

Степень загрузки одного прибора СМО ( $\rho$ ) можно определить следующим образом:

$$\rho = \lambda \cdot v = \frac{\lambda}{\mu} \leq 1, \quad (1)$$

иначе система войдет в режим «перегрузка» и очередь заявок станет бесконечно большой.

Количество заявок, находящихся в СМО, определяется по формуле:

$$M = l + \rho. \quad (2)$$

Длина очереди вычисляется по формуле:

$$l = \frac{\rho^2}{1 - \rho}. \quad (3)$$

Среднее время ожидания обслуживания находится по формуле:

$$w = \frac{l}{\lambda}. \quad (4)$$

Среднее время обслуживания запроса (U) находится следующим образом:

$$U = v + w = \frac{\rho^2}{(1 - \rho) \cdot \lambda} + v = \frac{v}{1 - \lambda v}. \quad (5)$$

Поскольку для оценки предельных параметров платежной системы большой интерес представляет длительный установившийся режим – режим стационарной работы платежной системы, то можно воспользоваться свойством эквивалентного замещения модели многоканальной ( $N$ -канальной) СМО совокупностью из  $N$ -штук однопоточных одноканальных СМО где их входной поток заявок -  $\lambda$  будет уменьшен в  $N$  раз. Тогда формула времени пребывания заявки на обслуживании в эквивалентно замещающей одноканальной СМО будет иметь следующий вид:

$$U_i = \frac{N_i v}{N_i - \lambda_i v}. \quad (6)$$

Таким образом, каждая СМО имеет:

$\lambda_i$  - свой входной поток обслуживания,

$N_i$  - количество параллельных каналов для выполнения каждого типа услуг,

$P_{ij}$  - вероятность, с которой к каждой СМО обращаются запросы.

Также для каждой из СМО задается своё время обслуживания ( $v_i$ ) и объем ресурса, предоставляемого средне статистической заявке - ( $C_i$ ).

Для стохастической сетевой модели платежной системы на рис.2 можно построить

граф состояний всех возможных этапов обслуживания платежного документа и для моделирования длительного режима работы всей сети можно записать систему уравнения баланса потоков всех обслуживаемых платежной системой заявок в установившемся режиме. На основании решения этой системы можно получить формулы для расчета среднего количества раз посещения одной среднестатистической заявкой каждой СМО - ( $\alpha_i$ ). Зная среднее время обслуживания заявки в каждой СМО – это (6) можно найти полное время обслуживания заявки в платежной системе –  $T$  и стоимость платежной системы -  $S$ . Если дополнить полученные уравнения ограничением по стоимости платежной системы и требованием минимизации времени обслуживания платежного документа в платежной системе, то получим типовую задачу параметрической оптимизации вида:

$$\begin{cases} T = \frac{\theta \cdot \alpha_1}{1 - \lambda_1 \theta} + \sum_2^5 \frac{N_i V_i \alpha_i}{N_i - \lambda_i V_i} \\ S = C_k \cdot B + \sum_2^5 C_i N_i \\ T \rightarrow \min \\ S = S^* \end{cases} \quad (7)$$

где  $\theta$  – трудоемкость операций идентификации и администрирования поступившей в систему и требующей обслуживания заявки,

$B$  – быстродействие автоматизированной банковской системы при выполнении операций идентификации и администрирования поступившей в систему и требующей обслуживания заявки.

В итоге, получили задачу синтеза системы заданной стоимости при максимальном ее быстродействии (или при минимальном времени обслуживания платежных документов в системе).

Аналогично эту модель можно представить и в другой трактовке задачи синтеза: минимизировать стоимость платежной системы при заданном допустимом усредненном полном времени обслуживания платежного документа в АВС. Для ее аналитического решения в любой постановке применим метод «неопределенного множителя Лагранжа» -  $\gamma$ . Согласно методу формируем вспомогательную функцию  $G$  и найдём её минимум с учетом ограничений и требований максимального быстродействия при заданной стоимости платежной системы – (7).

$$G = T + \gamma(S - S^*) \rightarrow \min \quad (8)$$

Из этого следует:

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial B} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial N_i} = 0 \\ S = S^* \\ i = 1 - 5 \end{cases} \quad (9)$$

Неизвестными являются  $B$ ,  $N_i$  ( $i=1-5$  (от 1 до 5)),  $T_{\min}$ ,  $S_{факт}$ , где  $v = \theta / B$ .

Решая систему (9) получим:

$$B = \alpha_1 \theta + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{\frac{\alpha \theta}{C_k}}, \quad (10)$$

$$N_i = \lambda_i V_i + \frac{V_i}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{\frac{\alpha_i \lambda_i}{C_i}}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} S^* = & C_k \left( \alpha_1 \theta + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{\frac{\alpha \theta}{C_k}} \right) + \\ & + \sum_2^5 C_i \left( \lambda_i V_i + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \cdot V_i \cdot \sqrt{\frac{\alpha_i \lambda_i}{C_i}} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Из последнего уравнения (12) найдем неопределенный множитель Лагранжа -  $\gamma$ :

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} = \frac{S^* - C_k \cdot \alpha_1 \cdot \theta - \sum_2^5 C_i \cdot \lambda_i \cdot V_i}{\sqrt{C_k \alpha_1 \theta + \sum_2^5 V_i \sqrt{C_i \alpha_i \lambda_i}}}. \quad (13)$$

Подстановкой  $\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$  в формулы для  $B$  и

$N_i$ , а затем в  $T$  и  $S$  можно получить расчетные формулы  $T_{\min}$  и  $S_{факт}$  - фактическую стоимость платежной системы.

Анализируя выводы, сделанные учеными, внесшими вклад в развитие доктрины скорости обращения денег, можно сказать об однозначности отсутствия влияния параметра времени, затрачиваемого на совершение сделки (перевод денежных средств для прекращения долговых обязательств) на изменение системы обработки данных. Измерение осуществляется

количеством сделок в экономике и ее общим состоянием - ростом или же депрессией. определяется числом меновых актов, последовательно совершающихся во времени, а число таких меновых актов, очевидно, не может быть увеличиваемо или уменьшаемо произвольно. Правда, нельзя сказать того, чтобы скорость обращения денег не поддается никакому воздействию.

Остается бесспорным тот факт, что внедрение высоко затратных технологий осуществляется в том числе и с целью сокращения времени на доставку платежа от плательщика до получателя, обработку банковской информации на всех этапах прохождения электронного документа. Тем самым, можно говорить об увеличении эффективности обслуживания товарно-денежного оборота в стране. В случае разлаженности механизма осуществления безналичных расчетов, хозяйствующие субъекты будут испытывать определенные трудности при совершении сделок и в действие начнут вступать другие платежные механизмы - наличные средства, бартер, платежные суррогаты.

Однако, если денежные средства остаются невостребованными экономическими субъектами в экономике страны, то они остаются без движения в виде остатков на счетах, в кассах или на руках граждан, не зависимо от того с какими временными характеристиками осуществляется перевод платежей от плательщика до получателя. Используя электронные технологии, банки предоставляют своим клиентам способ перевода и обработки электронных платежных документов, т.е. расчетные услуги высокого уровня. В работе [10] показано - насколько важна роль платежных систем для функционирования финансовой системы и экономики в целом. При этом способность производить платежи безопасным и эффективным образом является важнейшей задачей, как отечественной, так и глобальной платежной системы. Жизнеспособные и эффективные платежные механизмы улучшают распределение ресурсов, содействуют развитию и повышают общественное благосостояние.

Во-избежание платежного «стопора» и нормального функционирования платежной системы: предоставление кредита, для межбанковских систем платежей необходимо обеспечить регулярный поток платежей. «Стопор» платежей может произойти, независимо от причины несостоятельности платежной системы и его оператора. Неплатежеспособность одного из участников может быть результатом операций, не связанных с платежной системой, и в тоже время стать причиной распространения этой проблемы среди остальных участников и повлиять на



состоятельность самого расчетного агента. Эти опасности подчеркивают значимость жизнеспособности расчетного агента для платежной системы, следовательно, для экономики в целом. Поэтому возможность и количество ликвидности (и, следовательно, потенциально размер кредита), необходимой для фондирования платежных потоков, является еще одним фактором уменьшения системных рисков. Требуются средства для его расчета.

Приведенные выше аналитические модели как раз и позволяют оценить размеры резервов, необходимых для каждого из звеньев платежной системы – чтобы не возникал «стопор» платежей. При этом модификация расчетной модели сводится только к заданию (увеличению) стоимостных коэффициентов ресурсов каждого из звеньев платежной системы (т.е. регулируется величинами  $(C_i)$  для анализируемой СМО).

В качестве расчетных активов могут использоваться деньги как центральных, так и коммерческих банков. На практике, большинство межбанковских платежных систем используют центральный банк в качестве расчетного учреждения, и, следовательно, непосредственные участники этих систем пользуются деньгами центрального банка, в силу их особого статуса:

- использование свободных от риска расчетных активов может помочь снизить системный риск;
- использование не подверженного дефолту расчетного учреждения может ограничить риск задержки в услугах;
- способность создавать неограниченную ликвидность в национальной валюте может быть важной для бесперебойного функционирования системы;

Непосредственное участие в межбанковских платежных системах требует обычно значительных сумм ликвидности. И хотя особенности структуры внедрены в некоторые системы, чтобы экономить на ликвидности, корреспондентские банки могут управлять платежными потоками своих клиентов таким образом, чтобы сокращать размеры ликвидности и кредитов, в получении которых нуждается каждый клиент.

Представленная здесь модель и методический подход позволяют вести детальный анализ и параметрический синтез различных структур автоматизированных систем электронного бизнеса, выяснять узкие места в АБС, рационально планировать финансовые и товарные ресурсы, оптимизировать логистические операции. В целом методика исследования объектов электронного бизнеса представимых моделью стохастической сети состоит из трех этапов.

Этап 1. Наполнение числовыми характеристиками математической модели для аналитического расчета параметров обслуживания заявок в конкретной исследуемой системе электронного бизнеса и расчет ее параметров согласно формул (7 – 13). В итоге, для анализа получаем среднестатистические параметры процесса обслуживания заявок в системе, в том числе выявляем высоко загруженные подсистемы (где  $\rho$  близко к 1), являющиеся кандидатами на статус «узкого», а значит - уязвимо для безопасности функционирования конкретной систем электронного бизнеса. После выявления звеньев необходимо предложить структурные решения, снижающие их загруженность.

Этап 2. На основе полученной аналитической модели (7 – 13) можно уже осуществить решение второй задачи - задачи синтеза необходимой структуры исследуемой системы, в которой исключается наличие «узких мест» - узлов обслуживания заявок в режиме перегрузки. Для этого применяется инструмент EXCEL «Поиск решения» для подбора величин  $B$  и  $N_i$  ( $i = 2-5$ ), при которых  $T$  достигает минимума при задаваемой величине допустимой стоимости исследуемой системы электронного бизнеса. При расчетах требуется накладывать ограничения на не отрицательность знаменателей дробей в (7), иначе модель выходит из области определения и время обслуживания заявок становится недопустимо отрицательным. В результате по вариантных расчетов можно построить зависимость  $T_{min} = F(S^*)$ . На ее основании можно выбрать искомые параметры структуры системы электронного бизнеса -  $B$  и  $N_i$  ( $i = 2-5$ ), при которых достигается среднестатистическая корректная функциональность всех СМО заявок в исследуемой системе.

Этап 3. Результаты исследований на предыдущем этапе являются среднестатистическими величинами, отображающими временные и загрузочные параметры СМО, входящих в состав системы электронного бизнеса. Т.е. нет гарантий, что в переходных режимах некоторые СМО окажутся в состоянии «стопора». Для детального анализа возможности таких ситуаций рекомендуем использовать имитационное моделирование процесса обслуживания заявок в системе электронного бизнеса в программируемой среде GPSS [11]. Здесь можно развернуть модель массового обслуживания уже с использованием многоканальных СМО, что дает возможность выполнения еще более детального анализа наличия «узких» мест в автоматизированной системе электронного бизнеса. В этом инструменте за счет назначения высокого приоритета заявкам, моделирующим не санкционированный или лимитированный

доступ к ресурсам автоматизированной системы электронного бизнеса имеется возможность отследить в динамике ситуации ведущие к сбою работы СМО или «стопору» всей системы и, затем, предусмотреть меры их устранения.

Таким образом, описанная выше методика обеспечивает возможность практического применения принципа последовательного приближения результатов: за счет детализации процессов и параметров обслуживания заявок в автоматизированных системах электронного бизнеса для решения разнообразных задач анализа, синтеза и их параметрической оптимизации. В итоге - приближенные аналитические оценки уточняются на программных имитационных моделях любой сложности и с необходимой детализацией, что дает возможность выполнения детального анализа наличия «узких» мест в автоматизированной системе электронного бизнеса с целью их устранения для обеспечения требований безопасности функционирования объектов электронного бизнеса.

### **Литература**

1. Волкова В.Н. Методы формализованного представления систем: учеб. пособие / В.Н. Волкова, А.А. Денисов, Ф.Е. Темников. СПб.: СПбГТУ, 1993. - 107 с.
2. Емельянов А.А. Имитационное моделирование экономических процессов: учеб. пособие / А.А. Емельянов, Е.А. Власова, Р.В. Дума; под ред. А.А. Емельянова. - М.: Финансы и статистика, 2002. - 368 с.
3. Коробейникова О.М. Предметный анализ характеристик платежных систем. В кн.: «Вести Волгоград. Гос. Университета, сер.3,

Эконом. Экол.» - Волгоград: 2015. - №2, с.96-103.

4. Основы защиты информации : учеб.-метод. пособие / Л.М. Лыньков, В.Ф. Голиков, Т.В. Борботько. – Минск: БГУИР, 2011. – 243с.
5. Деднев М.А. Защита информации в банковском деле и электронном бизнесе / М.А. Деднев Д.В. Дыльников, М.А. Иванов.- М.: Изд-во "ОЦ КУДИЦ-ОБРАЗ", 2004.-512с.
6. Аверченков, В.И. Аудит информационной безопасности: учеб. пособие для вузов / В.И. Аверченков. – 2-е изд., стер. – Брянск: БГТУ, 2010.–268 с.-
7. Милославская Н.Г., Сенаторов М.Ю., Толстой А.И. Управление инцидентами информационной безопасности и непрерывностью бизнеса Учебное пособие для вузов. — 2-е изд., испр. — М.: Горячая линия-Телеком, 2014. — 170 с.
8. Запечников С.В. Стандартизация информационных технологий в аспекте защиты информации в открытых системах. - М.: МИФИ, 2000. - 135 с.
9. Каталевский Д.Ю. Основы имитационного моделирования и системного анализа в управлении— М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2015. – 311с.
10. Ахметова С. Г. Информационная безопасность : учебно-методическое пособие / С. Г. Ахметова ; Пермский национальный исследовательский поли технический университет .— Пермь : Изд-во ПНИПУ, 2013 .— 122 с.
11. Кудрявцев Е. М. GPSS World. Основы имитационного моделирования различных систем. – М.: ДМК Пресс, 2004. – 320 с

*Доценко Г.В. Методика исследования безопасности функционирования систем электронной коммерции средствами математического моделирования. Предложена методика прогнозирования наличия уязвимых для атак НСД элементов автоматизированной системы электронного бизнеса (АСЭБ), защиту которой необходимо предусматривать при разработке политики безопасности. Использован аппарат стохастических сетей и методы параметрической оптимизации СМО, с помощью которых достигим аналитический анализ, поэтапно уточняющий параметры процессов обслуживания платежных документов в АСЭБ. Полученные приближенные оценки окончательно детализируются на программных имитационных моделях любой сложности в среде GPSS, что дает возможность выявления критических мест в АСЭБ и их устранения для обеспечения требований безопасности функционирования объектов электронного бизнеса.*

**Ключевые слова:** система электронного бизнеса, информационная безопасность, платежный документ, математическая модель, параметрическая оптимизация, имитационная модель.

**Dotsenko G.V. The technique of research of safety of functioning of systems of electronic commerce by means of mathematical modeling.** A technique for predicting the presence of elements of an automated e-business system (AEBS), vulnerable to unauthorized access to data attacks, is proposed, the protection of which should be included in the development of a security policy. The apparatus of stochastic networks and methods of parametric optimization of queuing system are used, with the help of which we can achieve analytical analysis, gradually refining the parameters of the processes of servicing payment documents in the AEBS. The approximate estimates obtained are finally detailed on software simulation models of any complexity in the GPSS environment, which makes it possible to identify critical locations in the ASEB and to eliminate them in order to ensure the security requirements for the operation of e-business objects.

**Keywords:** e-business system, information security, payment document, mathematical model, parametric optimization, simulation model

Статья поступила в редакцию 20.03.2018  
Рекомендована к публикации д-ром техн. наук В.Н. Павлышом

УДК 519.725, 625.7, 681.3

## Комплексная оценка компактного тестирования цифровых схем на основе минимальных полиномов

В.О. Дяченко, О.Н. Дяченко  
Донецкий национальный технический университет  
do@donntu.org

*Дяченко В.О., Дяченко О.Н. Комплексная оценка компактного тестирования цифровых схем на основе минимальных полиномов. Выполнен анализ эффективности компактного тестирования цифровых схем при предположении, что генератор тестовых последовательностей и анализатор тестовых реакций - РСЛОС с минимальными порождающими полиномами. На основе такого анализа предложена комплексная оценка для различных вариантов сочетания минимальных порождающих полиномов для исчерпывающего тестирования комбинационных схем.*

**Ключевые слова:** минимальные полиномы, генератор тестовых последовательностей, анализатор тестовых реакций, порождающий полином.

### Введение

Признанный классик теории постиндустриализма Д. Белл выделяет три технологических революции: изобретение паровой машины в XVIII веке; научно-технологические достижения в области электричества и химии в XIX веке; создание компьютеров в XX веке [1].

Современная цивилизация XXI века переживает очередную революцию – информационную. Стремительные темпы разрастания всемирной паутины приводят к формированию цифровой цивилизации: если в 2000 году было 359 млн. пользователей сети Интернет, то в марте 2017 года количество пользователей уже 3732 млн. – это половина населения земного шара. В средствах массовой информации все чаще объявляют грядущую (а некоторые – уже наступившую) зеттабайтную эпоху развития человечества. По оптимистическим прогнозам – в период с 2012 по 2020 годы ежегодно будет происходить удвоение объема данных и на конец этого периода он составит примерно 37 ЗБ [2]. Достоинства информизации и роботизации трудно переоценить. В последние десятилетия достижения в области внедрения информационных технологий являются одним из определяющих факторов экономического потенциала общества. В результате появляется и развивается информационная инфраструктура, которая предоставляет новые услуги, такие как дистанционное образование, телеработа, телемедицина, электронная торговля, заказ

билетов для транспорта, интернет-банкинг, оплата счетов, и др. Вместе с тем, увеличение количества информации, которая передается, хранится и обрабатывается, приводит к требованиям обеспечения ее достоверности и надежности используемых аппаратных и программных средств. От успешного решения этих задач, с одной стороны, зависит процветание нынешней цивилизации, или, с другой стороны – ее саморазрушение, например, из-за случайного или намеренного сбоя в военных приложениях. Кроме того, необходимо учитывать такие явления, как солнечная активность и жесткое космическое излучение. Например, солнечный "супершторм" 1859 года привел к геомагнитной буре, известной как Событие Кэррингтона. Она стала причиной сбоя телеграфной сети в Европе и США. Другой пример - в 1998 году неисправность на одном из спутников привела к тому, что 90% из 50 миллионов пейджеров в США перестали работать. С высокой вероятностью подобная вспышка на солнце произойдет до конца XXI века, в результате чего выйдут из строя орбитальные спутники, пассажиры самолетов получат высокие дозы радиации, а также нарушится работа энергосистем и систем охлаждения на ядерных электростанциях. Широкое распространение получили такие явления, как блэкаут и кибератаки. Например, 13 июля 1977 – «Ночь страха» в Нью-Йорке. Вплоть до 2003 года эта авария считалась самым крупным ЧП в мировой электроэнергетике. Из-за попадания молнии в линию электропередачи на 25 часов была прервана подача электричества в Нью-Йорк и 9 млн. жителей оказались без

электроснабжения. 14 августа 2003 – сбой электросети США и Канады — «Великий блэкаут-2003». Одна из причин этого сбоя – ошибка в компьютерной системе.

23 августа в США запланировано проведение широкомасштабных учений "EarthEX2017", связанных с действиями специальных служб и различных ведомств для выработки взаимодействия при «широкомасштабных отключениях электроэнергии». По сценарию учений сбой энергосистемы будет иметь «субконтинентальный масштаб, длительный перерыв в электропитании с каскадными отказами всех других инфраструктур». Учения "EarthEX2017", будут проведены для выработки действий на случай мега землетрясения, кибертерроризма или больших электромагнитных импульсных атак.

Поэтому для устранения возможных ошибок из-за естественных природных явлений, либо искусственных причин, или дефектов аппаратных информационных средств, для защиты от разрушений, возникающих под действием жесткого космического излучения, используются современные технологии помехоустойчивого кодирования при проектировании микросхем памяти, весь спектр методов и средств встроенного самотестирования цифровых систем [1-20].

Одним из способов повышения надежности и тестопригодности СБИС микропроцессоров, устройств на ПЛИС является применение встроенных средств контроля, реализующих методы компактного тестирования. Метод сквозного сдвигового регистра (LSSD - level sensitive scan design) - другой широко известный способ снижения трудоемкости тестирования дискретных устройств. Метод LSSD сводит задачу тестирования к проверке нескольких регистров сдвига и комбинационных схем. Наиболее совместимым с методом LSSD из широкого ряда методов компактного тестирования является сигнатурный анализ, поскольку основой анализатора тестовых реакций (АТР) в этом случае является регистр сдвига с линейными обратными связями (РСЛОС). С помощью незначительных аппаратных затрат сдвиговые регистры преобразуются в РСЛОС, которые выполняют роль генераторов тестовых последовательностей (ГТП) и АТР для тестирования комбинационных схем (КС).

Реализация методов компактного тестирования ставит задачу определения достоверности результатов контроля. В одной из первых работ, посвященных вопросу зависимости тестируемости схемы в зависимости от вида ГТП и АТР, предлагается синдромное тестирование [7]. В этом случае в качестве ГТП используется любой счетчик, АТР – двоичный счетчик. В работах [9-12] рассматривается сигнатурно-

синдромное исчерпывающее тестирование, при котором ГТП - двоичный счетчик, АТР – РСЛОС. В работах [4, 6, 9, 10, 15, 16] рассматриваются вопросы комплексной оценки достоверности тестирования КС при применении ГТП и АТР в виде РСЛОС, которая учитывает не только обнаруживающие способности АТР, но также структуру ГТП и характер тестовых реакций объекта диагностики. В частности, получен вывод о значительной зависимости эффективности сигнатурного анализа от выбора того или иного сочетания порождающих полиномов РСЛОС ГТП и АТР. Данная работа представляет собой продолжение исследований в этом направлении для случая тестирования на основе минимальных полиномов.

### **Цель статьи**

Целью статьи является анализ эффективности компактного тестирования цифровых схем при предположении, что ГТП и АТР - РСЛОС с минимальными порождающими полиномами. На основе такого анализа выполнить комплексную оценку наиболее оптимального сочетания порождающих полиномов для исчерпывающего тестирования комбинационных схем.

### **Самотестирование в СБИС и ЭВМ**

Применение принципов псевдослучайного тестирования позволило эффективно диагностировать типовые элементы замены (ТЭЗ) и модули серийно выпускаемых в СССР ЭВМ серии ЕС, таких как: ЕС-1036, ЕС-1061, ЕС-1130, ЕС-1842 и др. Высокая эффективность компактного тестирования с использованием псевдослучайных тестовых воздействий и синтезированных генераторов псевдослучайных исчерпывающих тестов позволила применить его для реализации тестирования всех типовых элементов замены ЭВМ ЕС-1130. [9]

Анализ диагностического обеспечения микропроцессорных СБИС ведущих зарубежных фирм: IBM (S/390, метод LSSD); Hewlett Packard (сигнатурный анализ); альянс компаний Apple, IBM и Motorola (Power PC); Motorola (MC 202-206); Intel Corporation (микропроцессоры 80386, Pentium Pro); Advanced Micro Devices (AMD-K6), показывает, что 5-8 % площади кристалла СБИС занимают встроенные схемы тестирования, которые позволяют обнаружить практически 100% дефектов. Например, диагностическое обеспечение микропроцессора S/390 включает: ОЗУ, кэш, память, схемы их управления со встроенными схемами самотестирования; триггеры, регистровые сети, образующие в режиме тестирования сканируемый путь по методу LSSD; встроенные ГТП; встроенный АТР

- многоканальный сигнатурный анализатор; порт JTAG в соответствии со стандартом IEEE 1149.1.

Методы исчерпывающего тестирования КС и сканирования позволяют вместе обнаруживать 95% неисправностей. Применение разных псевдослучайных последовательностей, обеспечивает 99,9 % покрытия всех неисправностей СБИС.

### **Альтернативный метод вычисления сигнатур**

Предположим, что ГТП и АТР реализованы в виде РСЛОС с внутренними сумматорами в цепях обратной связи с порождающими полиномами соответственно  $h(X)$  и  $g(X)$ , причем оба полинома примитивные, а их корни связаны равенством  $\beta = \alpha^\gamma$ ,  $m = \text{deg}h(X) = \text{deg}g(X)$ .

Тестовые наборы, которые поступают на входы исследуемой КС, представляют собой ненулевые элементы поля  $GF(2^m)$ , являющегося расширением поля  $GF(2)$  над полиномом  $h(X)$ . Эти элементы поля могут быть представлены в двоичном, полиномиальном и степенном обозначениях. Каждому ненулевому элементу  $\alpha^j$  поля  $GF(2^m)$  соответствует минимальный полином, причем, если минимальный полином примитивный, то его степень равна  $m$ . Если в качестве порождающего полинома РСЛОС АТР выбрать минимальный полином, соответствующий элементу  $\alpha^j$ , то между корнями полиномов  $h(X)$  и  $g(X)$  будет выполнено равенство  $\beta = \alpha^j$ . Анализ таблицы минимальных полиномов [14] показывает, что для любой степени  $m < 5$  существует только два примитивных полинома, причем  $\beta = \alpha^{-1}$ , т. е. эти полиномы являются двойственными (взаимобратными). Поэтому для примеров будем рассматривать  $h(X)$  степени  $m=12$ .

Основное отличие предлагаемого метода расчета сигнатур от известного [4] заключается в выборе степенного обозначения тестовых наборов вместо двоичного. В этом случае значение сигнатуры для конъюнкции с рангом  $m$  может быть вычислено согласно следующему выражению:  $S = M_\gamma X^{-A\gamma}$ , где  $X^A$  - степенное обозначение тестового набора,  $M$  - матрица для перехода от значений РСЛОС ГТП к значениям РСЛОС АТР.

### **Комплексная оценка эффективности компактного тестирования**

В общем случае для  $\gamma = -1$  сигнатура конъюнкции с рангом  $r = m-1$  равна произведению матрицы  $M_1$  и  $X^i$ , где  $i$  - индекс отсутствующей переменной, уменьшенный на единицу; сигнатура конъюнкции с  $r < m-1$  равна нулю.

Аналогично, для произвольных примитивных полиномов  $h(X)$  и  $g(X)$  степени  $m$ ,

корни которых связаны равенством  $\beta = \alpha^{-3}$ , для конъюнкции с рангом  $r < m-2$   $S = M_{-3}(0) = 0$ . Сигнатура равна нулю в следующих случаях:  $\gamma = -5, r < m-3; \gamma = -7, r < m-4; \gamma = -9, r < m-3; \gamma = -11, r < m-4; \gamma = -13, r < m-4$ ; для произвольного  $\gamma$   $r < m-1-w$ , где  $w$  - вес двоичной записи  $-\gamma$ .

Если рассматривать полученный результат при конкретных значениях  $m$ , условие равенства сигнатуры нулю можно сформулировать иначе:  $r < w[(\gamma_0)]$ , где  $w[(\gamma_0)]$  - вес двоичной записи  $\gamma$  в обратном коде.

**Утверждение 1.** Пусть  $h(X)$  - примитивный полином,  $g(X)$  - неприводимый полином,  $\text{deg}h(X) = m, \text{deg}g(X) = r$ , причем  $m/r = j$ ,  $j$  - натуральное число. Тогда вес  $w(-\gamma)$  числа  $-\gamma$  принимает максимальное значение, равное  $m-j$  при  $\gamma = (2^m - 1)/(2^r - 1) = 2^{(j-1)r} + 2^{(j-2)r} + \dots + 2^r + 1$ ; сигнатура конъюнкции с рангом  $r < j$  равна нулю;  $w(-\gamma)$  принимает минимальное значение, равное  $j$  при  $\gamma = -(2^m - 1)/(2^r - 1)$ , сигнатура конъюнкции с рангом  $r < m-j$  равна нулю.

*Доказательство.* Поскольку  $r$  делит  $m$  нацело, поле  $GF(2^r)$  является подполем  $GF(2^m)$ , поэтому корни полиномов  $h(X)$  и  $g(X)$  связаны между собой соотношением  $b = a^\gamma$ .

Число  $w(-\gamma)$  представляет собой вес числа  $-\gamma$ , поэтому, чем меньше количество единиц в двоичном представлении  $\gamma$ , тем  $w$  больше. Минимальное значение числа  $\gamma$  равно при максимальном значении показателя полинома  $g(X)$ . Максимальный показатель  $g(X)$  соответствует примитивному полиному и равен  $(2^r - 1)$ .

Прежде всего докажем, что  $\gamma = (2^m - 1)/(2^r - 1) = 2^{(j-1)r} + 2^{(j-2)r} + \dots + 2^r + 1$  (1), при  $r > 1$  (случай при  $r = 1$  рассмотрим отдельно). В соответствии с методом математической индукции, вначале проверим выполнение этого равенства при  $j = 2$  (при  $j = 1$  равенство (1) очевидно):  $m = 2r; (2^{2r} - 1)/(2^r - 1) = 2^r + 1; (2^{2r} - 1) = (2^r - 1)(2^r + 1) = 2^{2r} - 1$ , таким образом, равенство выполняется.

Предположим, что выражение (1) справедливо при  $j$ . Покажем, что оно выполняется при  $(j+1)$ :

$$(2^{(j+1)r} - 1)/(2^r - 1) = 2^{jr} + 2^{(j-1)r} + 2^{(j-2)r} + \dots + 2^r + 1,$$

$$\text{или } (2^{(j+1)r} - 1)/(2^r - 1) = 2^{jr} + (2^r - 1)/(2^r - 1);$$

$$2^{(j+1)r} - 1 = 2^{jr} (2^r - 1) + 2^{jr} + 1;$$

$$2^{(j+1)r} - 1 = 2^{(j+1)r} - 2^{jr} + 2^{jr} - 1 = 2^{(j+1)r} - 1.$$

Таким образом, число  $\gamma$  в двоичном представлении при максимальном показателе  $g(X)$   $2^r - 1$  содержит  $j$  единиц. Это количество единиц является минимальным. Поскольку показатель полинома вычисляется согласно выражению [14]:  $e = (2^m - 1)/\text{НОД}(2^m - 1, \gamma)$ , то другие значения показателей  $g(X)$  получаются при делении  $2^r - 1$  на простые множители числа  $2^r - 1$ . Поэтому, числа  $\gamma$ , соответствующие этим показателям, равны числу  $(2^m - 1)/(2^r - 1)$ , умноженному на соответствующее простое

число  $j$ . В результате такого умножения количество единиц в двоичном представлении числа  $\gamma$  только увеличивается и равно  $jw(j)$ , где  $w(j)$  - вес числа  $j$  в двоичном представлении.

Поскольку  $(2^m-1)/(2^r-1)$  в двоичном представлении содержит минимальное количество единиц, то  $-(2^m-1)/(2^r-1)$  содержит максимальное количество единиц. При этом  $w(-\gamma)$  принимает минимальное значение.

Рассмотрим случай, когда  $r=1$ . При этом  $\gamma=(2^m-1)=0$ , что соответствует полиному  $X+1$ . В этом случае  $w$  принимает два значения: если  $\gamma$  считать равным  $(2^m-1)$ ,  $w(-\gamma)=0$ , если  $\gamma$  считать равным 0,  $w(-\gamma)=m$ . Это соответствует особому поведению полинома  $X+1$ : сигнатура конъюнкций с рангом  $0 < r < m$  равна нулю.

Таким образом, число  $w$  (вес двоичной записи  $-\gamma$ ) представляет собой параметр, с помощью которого можно оценить эффективность сигнатурного анализа при применении в качестве ГТП и АТР РСЛОС с порождающими примитивными полиномами одинаковой степени. Параметр  $w$  принимает минимальное значение 1 при  $\gamma=-1$ , и максимальное значение  $m-1$  при  $\gamma=1$ .

Несмотря на трудоемкость операций, предлагаемый метод аналитического расчета значений сигнатур позволяет сформулировать важный вывод: при любом начальном состоянии РСЛОС ГТП и РСЛОС ГТП и АТР с порождающими примитивным полиномом  $h(X)$  и неприводимым полиномом  $g(X)$ , корни которых связаны равенством  $b=a^r$ ,  $\text{deg}h(X)=m$ ,  $\text{deg}g(X)=r$ , значение сигнатуры конъюнкции с рангом  $r < m-w$ , где  $w$  - вес  $m$ -разрядного двоичного числа  $-\gamma$ , равна нулю.

### Сравнительная оценка различных сочетаний порождающих полиномов

На основании приведенных утверждений можно выполнить простую сравнительную оценку различных сочетаний порождающих полиномов РСЛОС ГТП и АТР.

Например, для  $h(X)=X^{12}+X^6+X^4+X+1$  при  $g(X)=X^{12}+X^6+X^4+X+1$   $j=1$ , сигнатура конъюнкции с рангом  $r < 1$  равна нулю; при  $g(X)=X^6+X^5+1$ ,  $j=2$ ,  $\gamma=(2^{12}-1)/(2^6-1)=65$ , поэтому  $w$  принимает максимальное значение для  $\text{deg}g(X)=6$  и  $\text{deg}h(X)=12$ , равное  $12-2=10$ , сигнатура конъюнкции с рангом  $r < 2$  равна нулю.

Эти и другие результаты анализа для различных сочетаний минимальных полиномов, выбранных из таблицы неприводимых полиномов для степени 12 [14], приведены в таблице 1, а в таблице 2 аналогичные результаты для соответствующих двойственных полиномов.

### Выводы

Из приведенных вариантов сочетаний порождающих полиномов наилучшим с точки

зрения обеспечения максимальной эффективности сигнатурного анализа является первый из таблицы 1 и наихудшим - из таблицы 2, при этом разрядность РСЛОС АТР равна 12. При разрядности РСЛОС АТР равной 6 из рассмотренных девяти вариантов минимальных полиномов наихудшими являются пятый, седьмой (табл. 1), причем все варианты являются хуже второго (разрядность РСЛОС АТР равна 6) и четвертого (разрядность РСЛОС АТР равна 4).

Таблица 1. Результаты анализа для различных сочетаний минимальных полиномов

$\gamma$	$\gamma$ , 2 c/c	$g(X)$ , 8 c/c	$g(X)$	$m-w(-\gamma)=r <$
1	1	10123	$X^{12}+X^6+X^4+X+1$	12-11=1
65	1000001	00141	$X^6+X^5+1$	12-10=2
195	11000011	00165	$X^6+X^5+X^4+X^2+1$	12-8=4
273	100010001	00023	$X^4+X+1$	12-9=3
455	111000111	00111	$X^6+X^3+1$	12-6=6
585	1001001001	00013	$X^3+X+1$	12-8=4
715	1011001011	00133	$X^6+X^4+X^3+X+1$	12-6=6
819	1100110011	00037	$X^4+X^3+X^2+X+1$	12-6=6
1365	10101010101	00007	$X^2+X+1$	12-6=6

Таблица 2. Результаты анализа для сочетаний двойственных минимальных полиномов

$\gamma$	$\gamma$ 2 c/c	$g^*(X)$ , 8 c/c	$g^*(X)$	$m-w(-\gamma)=r <$
-1	1	14501	$X^{12}+X^{11}+X^8+X^6+1$	12-1=11
-65	1000001	00103	$X^6+X+1$	12-2=10
-195	11000011	00127	$X^6+X^4+X^2+X+1$	12-4=8
-273	100010001	00031	$X^4+X^3+1$	12-3=9
-455	111000111	00111	$X^6+X^3+1$	12-6=6
-585	1001001001	00013	$X^3+X+1$	12-4=8
-715	1011001011	00155	$X^6+X^5+X^3+X^2+1$	12-6=6
-819	1100110011	00037	$X^4+X^3+X^2+X+1$	12-6=6

-1365	10101010101	00007	$X^2+X+1$	12- 6=6
-------	-------------	-------	-----------	------------

Как правило, для минимальной аппаратной реализации порождающие полиномы для РСЛОС ГТП и АТР выбирают с минимальным количеством ненулевых коэффициентов. Такие полиномы, в частности, в таблице неприводимых полиномов [14] расположены на первом месте. Рассмотренный пример показывает, что для разрядности РСЛОС ГТП и АТР соответственно 12 и 6, выбор первых минимальных полиномов (табл. 1) для исчерпывающего тестирования КС является наиболее эффективным, а выбор первых двойственных минимальных полиномов (табл. 2) является наихудшим. Эти и другие варианты выбора порождающих полиномов были проверены с помощью имитационного моделирования на основе САПР Active-HDL.

Уменьшение топологических норм проектирования СБИС памяти увеличивает чувствительность ИС к локальным радиационным эффектам. При этом может не просто увеличиваться количество ошибок, но и меняться их характер. При этом задача повышения отказоустойчивости памяти с помощью помехоустойчивых кодов становится особенно актуальной [6].

Полученные результаты могут найти применение при реализации самотестирования цифровых схем, проектировании схем встроенного контроля и диагностирования, например, для ПЛИС, при компактном тестировании КС, в том числе, при сочетании с методом сквозного сдвигового регистра.

### Литература

1. Белл Д. Грядущее постиндустриальное общество. Опыт социального прогнозирования: Пер. с англ. 2-е изд., испр. и доп. - М.: Academia, 2004. - 788 с.
2. Гладких А.А., Климов Р.В., Чилихин Н.Ю. Методы эффективного декодирования избыточных кодов и их современные приложения. – Ульяновск : УлГТУ, 2016. – 258 с.
3. Richard E. Blahut. Algebraic Codes for Data Transmission / Cambridge University Press, 2012. – 498p.
4. Дяченко О.Н., Дяченко В.О. Альтернативный метод укорачивания циклических кодов // Электронные информационные системы. 2017. № 1 (12). С.94–100.
5. Ярмолик В.Н., Калоша Е.П. Эффективность сигнатурного анализа в самотестирующихся СБИС // Электрон. моделирование.- 1992.- 14,№3. - С.51-56.

6. Ершов А.Н., Петров С.В., Пяташню Ю.П., Коханько Д. В., Зяблов В.В. и др. Улучшение радиационной стойкости памяти с помощью помехоустойчивых кодов // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы. 2014, том 1, выпуск 4. - С.42–49.
7. Дяченко В.О., Дяченко О.Н. Циклическое кодирование цифровой информации на основе двойственных полиномов // Современные тенденции развития и перспективы внедрения инновационных технологий в машиностроении, образовании и экономике: материалы II Международной научно-практической конференции (Азов, 19 мая 2015 г.) – Ростов н/Д, ДГТУ, 2015. – С. 71-76.
8. Savir J. Syndrome-testable design of combinational circuits / Savir J. // IEEE Trans. Comput. – 1980. – С-29. – Р. 442-451.
9. Ярмолик В.Н. Тестовое диагностирование аппаратного и программного обеспечения вычислительных систем / Ярмолик В.Н., Иванюк А.А. // Доклады БГУИР, № 2 (80), 2014. – С.127-142.
10. Дяченко О.Н. Сравнительная оценка эффективности методов компактного тестирования комбинационных схем // Сборник трудов факультета вычислительной техники и информатики. Выпуск 1. Донецкий государственный технический университет. – Донецк: ДонГТУ, 1996. – С.103-110.
11. Дяченко О.Н. Анализ сигнатурной тестируемости комбинационных схем // Автоматика и вычислительная техника. – 1990. – № 5. С.85-89.
12. Дяченко О.Н., Тарасенко А.Н. Спектральный метод компактного тестирования в области сигнатурного анализа // Электрон. моделирование. – 1992. – 14, №6. – С.60-65.
13. А.с. 1829035 СССР, МКИ<sup>5</sup> G06F 11/00. Сигнатурно-синдромный анализатор / О.Н.Дяченко (СССР) № 4864016/24; Оpubл. 23.07.93.Бюл. № 27. – 2с.
14. Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки. – М.:Мир, 1976. – 594с., ил.
15. Дяченко В.О., Дяченко О.Н. Циклическое кодирование цифровой информации на основе двойственных полиномов // Современные тенденции развития и перспективы внедрения инновационных технологий в машиностроении, образовании и экономике: материалы II Международной научно-практической конференции (Азов, 19 мая 2015 г.) – Ростов н/Д, ДГТУ, 2015. – С. 71-76
16. Дяченко В.О., Дяченко О.Н. Особенности применения двойственных полиномов для аппаратной реализации циклических кодов // Информационные управляющие системы и компьютерный мониторинг в рамках форума “Инновационные



перспективы Донбасса” (ИУС КМ-2015): VI Международная научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых, 20-22 мая 2015, г.Донецк: / Донец. национал. техн. ун-т; сост.: К.Н.Маренич (председатель) и др. – Донецк: ДонНТУ, 2015. – С. 130–136.

17. Дяченко В.О., Дяченко О.Н. Альтернативный способ построения укороченных кодов Файра // Компьютерная и программная инженерия. Сборник материалов международной научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных 15-16 декабря 2015 года. – Донецк: ДонНТУ, 2015. – С. 86–89.

18. Дяченко О.Н., Дяченко В.О. Укорачивание циклических кодов на основе альтернативного деления полиномов // Современные тенденции развития и перспективы внедрения инновационных технологий в машиностроении, образовании и экономике:

материалы III Международной научно-практической конференции (Азов, 25 мая 2016 г.). – Азов: Изд-во: ООО "АзовПечать", 2016. – С. 45-50

19. Дяченко О.Н., Дяченко В.О. Альтернативный метод укорачивания циклических кодов // Электронные информационные системы. 2017. № 1 (12). – С. 94–100.

20. Дяченко О.Н., Дяченко В.О. Аппаратная реализация кодов БЧХ и кодов Рида-Соломона // Современные тенденции развития и перспективы внедрения инновационных технологий в машиностроении, образовании и экономике: материалы IV Международной научно-практической конференции (Азов, 25 мая 2017 г.). – Ростов н/Д, ДГТУ, 2017. – С. 30-34.

*Дяченко В.О., Дяченко О.Н. Комплексная оценка компактного тестирования цифровых схем на основе минимальных полиномов. Выполнен анализ эффективности компактного тестирования цифровых схем при предположении, что генератор тестовых последовательностей и анализаторы тестовых реакций - РСЛОС с минимальными порождающими полиномами. На основе такого анализа предложена комплексная оценка для различных вариантов сочетания минимальных порождающих полиномов для исчерпывающего тестирования комбинационных схем.*

*Ключевые слова:* минимальные полиномы, генератор тестовых последовательностей, анализатор тестовых реакций, порождающий полином.

*Dyachenko V.O., Dyachenko O. N. Complex evaluation of compact testing of digital circuits based on minimal polynomials. The efficiency of compact testing of digital circuits is analyzed under assumption that the test sequence generator and test response analyzers are LFSR with minimal generator polynomials. On the basis of such analysis, a complex evaluation is proposed for various combinations of minimal generator polynomials for exhaustive testing of combinational circuits.*

*Keywords:* minimal polynomials, test sequence generator, test response analyzer, generator polynomial.

*Статья поступила в редакцию 20.03.2018  
Рекомендована к публикации д-ром техн. наук В.Н. Павлышом*

## Математическое моделирование работы механизированной крепи на наклонных угольных пластах

В.И. Зензеров, Е.В. Перинская  
ГОУ ВПО "Донецкий национальный технический университет"  
[mpvik@3g.ua](mailto:mpvik@3g.ua)

*Зензеров В.И., Перинская Е.В. Математическое моделирование работы механизированной крепи на наклонных угольных пластах. На основе предлагаемого программного комплекса для ПЭВМ, выполнено моделирование передвижения секций механизированной крепи и оценена их устойчивость при работе на наклонных угольных пластах.*

**Ключевые слова:** механизированная крепь, боковая устойчивость, критический угол, алгоритм, программный комплекс.

### Актуальность задачи

Под статической устойчивостью и устойчивостью секций крепи в процессе их передвижения понимается способность секций сохранять под действием внешних силовых факторов и активных средств удержания такое пространственное положение, при котором возможна их нормальная эксплуатация в комплексе механизированной крепи. Проверка устойчивости опрокидыванию заключается в определении соотношения восстанавливающего и опрокидывающего моментов сил относительно оси, проходящей внутри контура основания (при боковых породах с  $f=3,5-4$  по шкале проф. Протодяконова Н.М.), а в пределе – через крайнюю точку контура (при боковых породах с  $f$  до 7-8) и сравнении этого соотношения с допустимым. Опрокидывание – поворот секции крепи вокруг оси, проходящей через основание, причем положение ее зависит от физико-механических свойств почвы [1]. При работе механизированных крепей в лавах с углом падения пласта свыше  $15^\circ$  значительная часть отказов возникает вследствие низкой эффективности средств обеспечения устойчивости их секций.

Поэтому научно-техническое обоснование и развитие методов и средств исследования, проектирования и расчета параметров секций механизированных крепей с характеристиками, обеспечивающими их эффективную эксплуатацию на наклонных пластах, является важной научной и практической задачей, имеющей отраслевое значение.

### Цель и задачи работы

Целью работы является разработка современных средств исследования параметров секций механизированных крепей для их

модернизации, обеспечивающих повышение эффективности их эксплуатации.

Для достижения поставленной цели решается задача разработки методики аналитической оценки устойчивости передвижения секций механизированной крепи на наклонных пластах. Для численного решения полученной математической модели предлагается программный комплекс для ПЭВМ, включающий модуль графического отображения результатов.

### Содержание и результаты работы

На пространственное положение секции и скорость ее передвижения оказывают влияние большое количество факторов, основными из которых являются: наклонные составляющие веса секции крепи, положение центра ее тяжести, составляющие тягового усилия гидродомкрата, активный удерживающий момент, создаваемый системой устойчивости, величина подпорного усилия при передвижении с подпором, усилия взаимодействия в межсекционных связях балок и оснований, пригрузка пород кровли на перекрытие секции, вдавливание основания в почву пласта и др. Определим запас устойчивости секций крепи в процессе однократного передвижения. Расчетная схема к определению боковой устойчивости секции механизированной крепи приведена на рис. 1.

Момент, удерживающий секцию крепи от опрокидывания, равен:

$$\sum M_{y\partial} = M_G^{y\partial} + M_{подп.}^{y\partial} + M_{взаим.}^{y\partial} + M_{акт.}^{y\partial}, \quad (1)$$

где  $M_G^{y\partial}$  – удерживающий момент от составляющей веса секции крепи;

$M_{подп.}^{y\partial}$  – удерживающий момент от подпорного усилия;

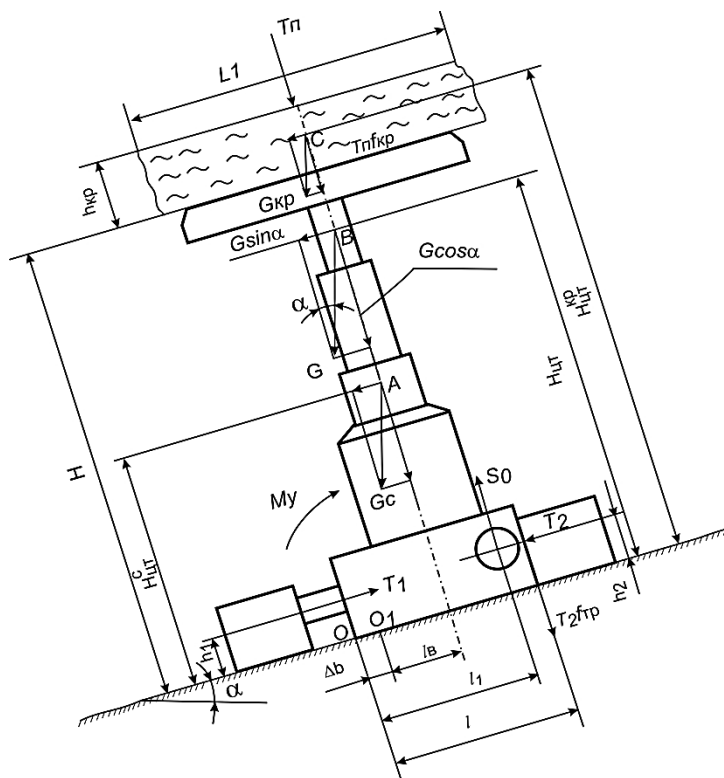


Рисунок 1 - Расчетная схема определения боковой устойчивости секции механизированной крепи

$M_{\text{взаим}}^{y\delta}$  – момент от взаимодействия в межсекционных связях;

$M_{\text{акт.}}^{y\delta}$  – активный удерживающий момент, создаваемый механизмом устойчивости.

Момент, опрокидывающий секцию крепи, складывается из моментов от составляющих веса  $M_G^{onp}$  и тягового усилия гидродомкрата передвижения  $M_{2\delta}^{onp}$ :

$$\sum M_{onp} = M_G^{onp} + M_{2\delta}^{onp} \quad (2)$$

Моменты от составляющих веса крепи равны:

$$M_G^{y\delta} = Gl_B \cos \alpha \quad (3)$$

$$M_G^{onp} = GH_{um} \sin \alpha$$

где  $G$  – вес секции крепи с пригрузкой;

$\alpha$  – угол падения пласта;

$l_B$  – плечо восстанавливающего момента, с учетом ширины основания, равной  $L$  и смятия пород почвы под нижним (со стороны падения пласта) ребром основания на величину  $\Delta b$  (в расчетах принимается равной 0,05м) равно:

$$l_B = \frac{l}{2} - \Delta b \quad (4)$$

$H_{um}$  – высота центра тяжести системы "секция крепи – кровля"; при слабых кровлях рассчитывается с учетом массы отслоившейся породы высотой  $h_{кр}=0,5 \div 0,7$  м:

$$H_{um} = \frac{G_c H_{um}^c + G_{кр} H_{um}^{кр}}{G} \quad (5)$$

где  $G_c$  – вес секции крепи;

$H_{um}^c$  – высота центра тяжести секции;

$G_{кр}$  – вес отслоившейся породы кровли плотностью  $\gamma$  равен:

$$G_{кр} = h_{кр} L_1 L_2 \gamma \quad (6)$$

где  $L_1$  – шаг установки секций крепи;

$L_2$  – ширина поддерживаемого крепью призабойного пространства;

$H_{um}^{кр}$  – высота центра тяжести отслоившейся кровли, находящейся на перекрытии секции высотой  $H$ :

$$H_{um}^{кр} = H + \frac{h_{кр}}{2} \quad (7)$$

Отметим, что передвижение секций крепи с подпором, способствует повышению устойчивости секций на наклонных пластах. Удерживающий момент от подпорного усилия  $T_n$  равен:

$$M_{подн.}^{y\delta} = T_n (l_b + f_{кр} H) \quad (8)$$

где  $f_{кр}$  – коэффициент трения перекрытия о кровлю.

Максимальная величина усилия подпора кровли определяется из условия обеспечения движения секции крепи усилием, развиваемым гидродомкратом передвижения. На основании исследований, выполненных в работах [2, 3, 4]

получено выражение для максимальной величины усилия подпора кровли в зависимости от конструктивных параметров и величины рассогласования в уровнях основания секции крепи и конвейера:

$$T_{n, max} = \frac{\frac{\pi}{4} [P_2(D_b^2 - d^2) - P_3 D_b^2] \eta (\cos \beta_u - f_u \sin \beta_u)}{\cos(\beta_u - \gamma_\delta) (f_n + f_{kp})} - \frac{[G \cos \alpha f_n + (T_1 + T_2 + R_y) f_{tp}] \cos(\beta_u - \gamma_\delta)}{(f_n + f_{kp})}, \quad (9)$$

где  $P_2$  и  $P_3$  – соответственно давления рабочей жидкости в штоковой и поршневой полостях гидродомкрата;

$D_b$  и  $d$  – соответственно внутренний диаметр цилиндра и диаметр штока гидродомкрата;

$\eta$  – объемный КПД (при уплотнениях резиновыми манжетами  $\eta=1$ );

$\beta_u$  – угол отклонения цепи от горизонтальной оси в вертикальной плоскости;

$\gamma_\delta$  – угол отклонения оси гидродомкрата от оси отверстия для установки в вертикальной плоскости.

Опрокидывающий момент от вертикальной составляющей тягового усилия гидродомкрата равен:

$$M_{\delta 0}^{opr} = S_b (l_1 - \Delta b), \quad (10)$$

где  $l_1$  – расстояние от оси гидродомкрата до нижнего по падению пласта ребра основания. Удерживающий момент, возникающий при взаимодействии секции с элементами конструкции комплекса:

$$M_{взаим}^{y\delta} = T_1 h_1 + T_2 f_{tp} (l - \Delta b), \quad (11)$$

где  $h_1$  – плечо силы  $T_1$ .

Исследования кинематики передвижения секций механизированных крепей проводилось на базе механизированных поддерживающих крепей с нижним расположением связей, предназначенных для работы в лавах с углом падения пласта до  $35^\circ$ .

Расчет устойчивости в процессе однократного передвижения без подпора секций крепей, не оснащенных специальной системой устойчивости, сводится к определению максимального значения угла падения пласта, при котором еще обеспечивается боковая устойчивость секций. Ориентировочный расчет устойчивости выполняется с учетом выражений (3) - (7) для конкретных горно-геологических условий эксплуатации и запаса устойчивости, равного единице, по формуле:

$$\alpha = \arctg \frac{(\frac{l}{2} - \Delta b) (G_c + h_{kp} L_1 L_2 \gamma)}{G_c H_{ум}^c + h_{kp} L_1 L_2 \gamma (H + \frac{h_{kp}}{2})}, \quad (12)$$

Для выполнения инженерных расчетов разработан алгоритм, позволяющий определить максимальное значения угла падения пласта  $\alpha$  в зависимости от массы секции крепи  $G_c$  высоты центра тяжести секции  $H_{ум}^c$ , площади кровли ( $L_1, L_2$ ), поддерживаемой одной секцией крепи, мощности пласта  $H$ , ширины основания  $l$  и высоты отслоившейся кровли  $h_{kp}$ . Блок-схема алгоритма приведена на рис. 2.

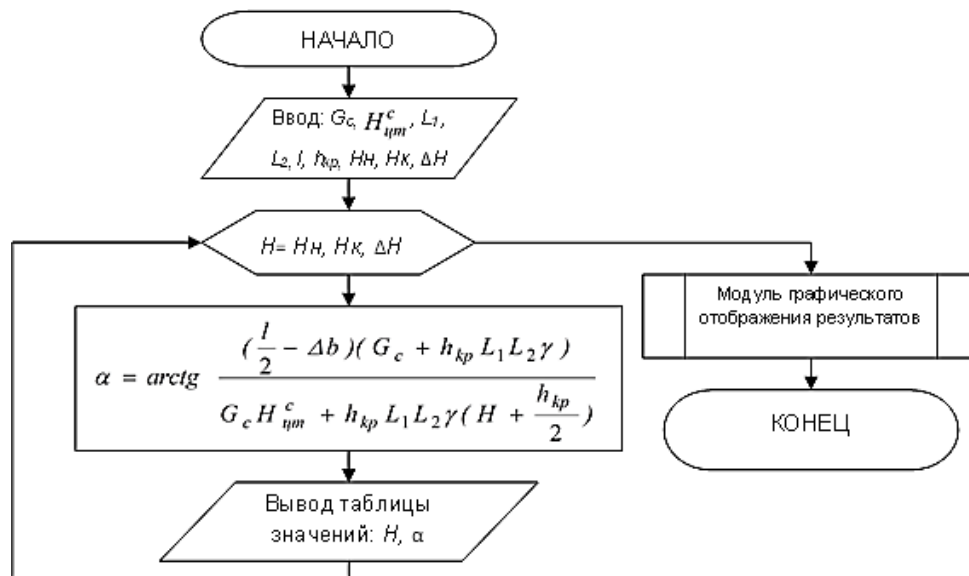


Рисунок 2 - Блок-схема алгоритма

На основании разработанного алгоритма и программы на языке DELPHI [8] определяем максимальный угол падения пласта при работе секции крепи без системы устойчивости. Зависимость критического угла статической боковой устойчивости секции крепи 1MT от горно-геологических условий приведена на рис. 3.

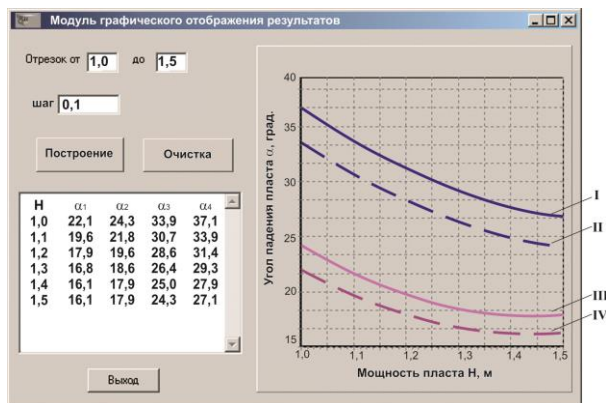


Рисунок 3 - Зависимость критического угла статической боковой устойчивости секции крепи 1MT от горно-геологических условий

Варьирование исходных параметров при расчетах показывает, что в благоприятных горно-геологических условиях эксплуатация секций крепи 1MT без использования специальных средств обеспечения боковой устойчивости (кривые I и II на рис. 3) на

максимальной для первого типоразмера мощности пласта возможна до углов падения пласта не более 25°. Показано, что состояние почвы и кровли пласта оказывает существенное влияние на устойчивость секции крепи, уменьшая диапазон возможной ее работы по углу падения пласта на величину до 41%. Так, критический угол статической устойчивости секции крепи 1MT при разгрузке в лаве со слабой почвой и неустойчивой, отслоившейся кровлей снижается до 15° (кривые III и VI на рис. 3).

Для расширения области эксплуатации механизированных крепей до 35° и повышения запаса устойчивости необходимо применение специальных систем устойчивости [5].

Запас устойчивости секции крепи в процессе однократного перемещения равен отношению моментов удерживающего  $\sum M_{уд}$  и опрокидывающего  $\sum M_{опр}$  секцию. С учетом формул (1) – (11) получим выражение для запаса устойчивости:

$$n = \frac{Gl_b \cos \alpha + T_n(l_b + f_{kp}H) + T_1h_1 + T_2f_{TP}(l - \Delta b) + Q_y l_y K_c}{GH_{цТ} \sin \alpha + S_r(l_1 - \Delta b)t \arcsin \frac{a}{l_{цети}}}, (13)$$

Разработан алгоритм (рис. 4) и программа на языке DELPHI [8], позволяющие используя формулу (13) определить давление, необходимое для удержания секции от опрокидывания.

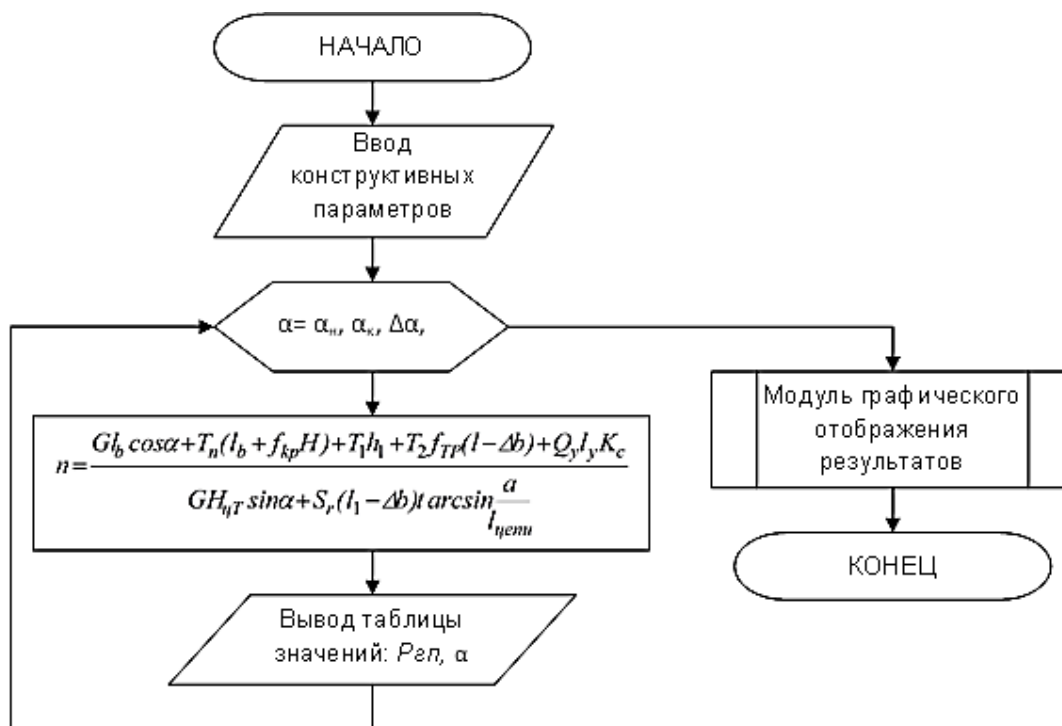


Рисунок 4 - Блок-схема алгоритма расчета запаса устойчивости

Зависимость требуемого давления  $P_{гп}$  в гидропатроне, обеспечивающего устойчивость секции крепи для различных углов падения  $\alpha$  и мощности пласта  $H$  приведена на рис. 5.

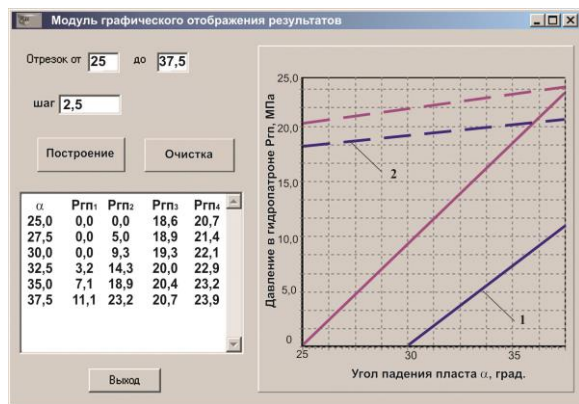


Рисунок 5 - Зависимость требуемого давления в гидропатроне от угла падения пласта

Анализ результатов расчета показывает, что при отсутствии в лаве горно-геологических нарушений рассматриваемая конструкция механизма устойчивости обеспечивает (при давлении в гидропатроне до 20МПа) удержание секций крепи от бокового опрокидывания на углах падения пласта до 35° и мощности пласта до 1,5 м (график I, рис. 5). При отклонении секций крепи от нормального положения этого давления уже недостаточно для их восстановления (график 2, рис. 5).

Предыдущие исследования были выполнены для коэффициентов запаса устойчивости  $n$ , равного единице. Однако, изменение горно-геологических условий в процессе продвижения забоя при отработке столба и, даже, по длине самой лавы, требует обеспечения запаса устойчивости, величина которого зависит от условий эксплуатации механизированной крепи [6].

На рис. 6 приведены зависимости запаса боковой устойчивости секций крепи 1МТ при мощности пласта  $H=1,5$ м для различных углов падения пласта  $\alpha$  и состояния почвы и кровли пласта (графики I-IV). Секции не оборудованы системой устойчивости.

Отмечаем, что статическая устойчивость секций крепи 1МТ (без системы устойчивости и без подпора) обеспечивается: кровля устойчивая  $h_{кр}=0$ , почва прочная  $\Delta b = 0$  на углах падения пласта до 25° (кривая I, рис. 6); кровля устойчивая  $h_{кр}=0$ , почва слабая – до 23°30' (кривая II, рис. 6); кровля неустойчивая, отслоившаяся  $h_{кр}=0,5$ м, почва прочная  $\Delta b = 0$  – до 18° (кривая III, рис. 6); кровля неустойчивая, отслоившаяся  $h_{кр}=0,5$ м, почва слабая – до 16° (кривая IV, рис. 6). Учитывая изложенное, для запасов устойчивости  $n = 1,3-1,5$  можно

рекомендовать эффективную работу секций крепи 1МТ без системы устойчивости в благоприятных горно-геологических условиях на пластах с углами падения до 20°, а в неблагоприятных условиях – до 10°.

На рис. 6 (график V) показаны зависимости запаса устойчивости секций 1МТ от угла падения пласта для сложных горно-геологических условий:  $h_{кр} = 0,5$  м,  $\Delta b = 0,06$  м при работе с подпором  $T_n=20$  кПа с учетом отрицательного влияния на устойчивость вертикальной составляющей тягового усилия гидродомкрата передвижения  $S_0=12,2$  кН.

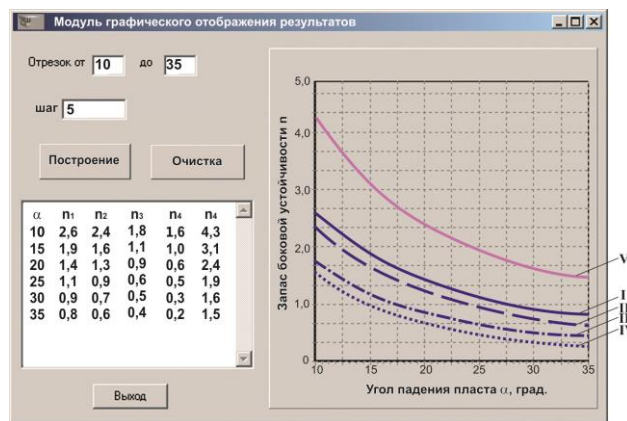


Рисунок 6 - Зависимость запаса боковой устойчивости секций от угла падения пласта при передвижении с подпором

Движение секций с подпором обеспечивает запас устойчивости крепи во всем диапазоне мощности пласта  $H = 1,0-1,5$  м. Причем, запас устойчивости при  $H = 1,5$ м,  $\alpha=35$ , равен  $n = 1,5$  [7].

Проведена оценка запаса устойчивости секций крепи с системой устойчивости при  $H = 1,5$  м,  $S_0 = \max$ ,  $T_n = 0$  для различных горно-геологических условий. Анализ результатов показывает, что использование системы устойчивости повышает коэффициент ее запаса в 1,65 раза с 0,7 (рис. 6, кривая I,  $\alpha = 35^\circ$ ) до 1,15 (рис. 7, кривая 1,  $\alpha = 35^\circ$ ) при мощности пласта  $H = 1,5$  м, благоприятных горно-геологических условиях  $\Delta b = 0$ ;  $h_{кр} = 0$ , давлении в гидропатроне  $P_{гп} = 60$ МПа, и диаметре гидропатрона системы устойчивости  $d_{гп} = 60$  мм. Увеличение диаметра гидропатрона с 60 мм до 80 мм повышает запас устойчивости в 1,3 раза, т.е. с 1,15 до 1,5 при тех же условиях.

В сложных горно-геологических условиях ( $h_{кр} = 0,5$  м,  $\Delta b = 0,05$ м) запас устойчивости секций крепи резко снижается с 1,15 (кривая 4,  $\alpha = 35^\circ$ ) до 0,5 (кривая 1,  $\alpha = 35^\circ$ ), т.е. в 2,3 раза (рис. 7). Увеличение давления в гидропатроне системы устойчивости не сказывается существенно на

росте запаса устойчивости секций крепи (кривые 1, 2, рис. 7), а увеличение диаметра гидropатрона с 60 мм до 80 мм повышает запас устойчивости в 1,3 раза (кривые 2, 3 рис. 7).

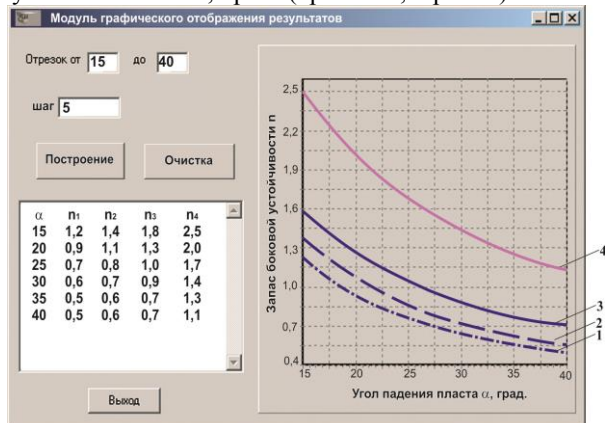


Рисунок 7 - Зависимость запаса боковой устойчивости секций от угла падения пласта при использовании системы устойчивости

### Выводы

Таким образом, выполненными исследованиями установлено, что обязательным условием эффективной эксплуатации секций крепи ИМТ (в благоприятных горно-геологических условиях на пластах с углом падения свыше  $20^\circ$  и в сложных – свыше  $10^\circ$ ) является передвижение секций с подпором.

Использование разработанного программного комплекса для расчета параметров устойчивости, позволило подтвердить, что назначение системы устойчивости – удержать от наклона секции крепи в разгруженном состоянии и восстанавливать их в нормальное положение в разгруженном состоянии в статике и при передвижении.

Наглядность представления результатов расчетов с помощью разработанного модуля графического отображения результатов на ПЭВМ облегчило анализ полученных данных и дало возможность показать, что наиболее эффективно устойчивое положение обеспечивается секционированным питанием гидropатронов механизмов устойчивости и передвижение секций механизированной крепи с подпором. Выполнение этих условий повышает эффективность и надежность работы секций крепи на наклонных пластах.

### Литература

1. Садыков Н.М. Исследование устойчивости мехкрепей М87ДН на пластах наклонного падения. - М.: Сб. трудов ВНИМИ, №08, 1969, С. 30-35

2. Шейн Ю.Г. К выбору системы управления механизированными крепями. - Научные сообщения. - М.: ИГД им. А.А.Скочинского, 1982, вып. 208, С. 50-54.

3. Элементы и системы автоматического управления гидрофицированными крепями / Рабинович М.С., Красик Я.Л., Кулаков Н.Н. и др. - М.: Недра, 1977, 256 с.

4. Пономаренко Ю.Ф., Баландин А.А. Инженерная методика проектного расчета параметров гидросистемы механизированных крепей. - М.: ИГД им. А.А. Скочинского, 1981, 22 с.

5. Горные машины и комплексы для подземной добычи угля. – Монография / Под общ. ред. С.С. Гребенкина // Гребенкин С.С., Павлыш В.Н., Зензеров В.И. и др. – Донецк: ВИК, 2006. – 353 с.

6. Математические модели и методы расчета параметров подземных горных работ и добычного оборудования. – Монография / Под общ. ред. С.С. Гребенкина и В.Н. Павлыша // Гребенкин С.С., Рябичев В.Д., Павлыш В.Н., Должиков П.Н., Зензеров В.И. – Донецк: ВИК, 2007. – 385 с.

7. Основы создания и эффективной эксплуатации систем жизнеобеспечения очистного оборудования для угольных шахт: [моногр.] / [С.С. Гребенкин, В.В. Косарев, С.Е. Топчий, Н.И. Стадник, В.И. Зензеров, В.В. Стеблин, Б.А. Перепелица, В.Н. Поповский]; под общей редакцией Гребенкина С.С. и Косарева В.В. – Донецк: «ВИК», 2009. – 375с.

8. Бобровский С.И. Delphi 7. Учебный курс. – СПб.: Питер, 2008. 736 с.

*Зензеров В.И., Перинская Е.В. Математическое моделирование работы механизированной крепи на наклонных угольных пластах. На основе предлагаемого программного комплекса для ПЭВМ, выполнено моделирование передвижения секций механизированной крепи и оценена их устойчивость при работе на наклонных угольных пластах.*

*Ключевые слова:* механизированная крепь, боковая устойчивость, критический угол, алгоритм, программный комплекс.

*Zenzerov V.I., Perinska E.V. Mathematical modeling of the powered roof supports on sloping coal layers. Based on the proposed software complex PC simulation of the movement of sections of powered support, and evaluated their stability when working on sloping coal layers.*

*Keywords:* powered support, lateral stability, critical angle, algorithm, software complex.

*Статья поступила в редакцию 20.03.2018  
Рекомендована к публикации д-ром техн. наук В.Н. Павлышом*



УДК 512.579

## О конгруэнциях полигонов над прямоугольными связками

И.Б. Кожухов, А.М. Пряничников  
МИЭТ, Москва  
kozuhov\_i\_b@mail.ru, genary@yandex.ru

*Кожухов И.Б., Пряничников А.М. О конгруэнциях полигонов над прямоугольными связками. Строится серия конгруэнций полигона над прямоугольной связкой. При определённых условиях ими исчерпываются все конгруэнции полигона. Результаты предполагается применить в исследовании полигонов с условиями на конгруэнции.*

**Ключевые слова:** полигон над полугруппой, прямоугольная связка, решётка конгруэнций.

В данной работе рассматриваются конгруэнции полигонов над полугруппами. Напомним, что полугруппой называется множество с одной бинарной ассоциативной операцией (т.е.  $(ab)c = a(bc)$  для любых элементов  $a, b, c$ ). Полигон над полугруппой – это множество  $X$ , на котором действует полугруппа  $S$ , т.е. определено отображение  $X \times S \rightarrow X$ ,  $(x, s) \mapsto xs$  такое, что  $(xs)t = x(st)$  для всех  $s, t \in S$ ,  $x \in X$  (см. [1]). Полигон является алгебраической моделью автомата (см. [2]), при этом  $X$  – множество состояний, а  $S$  – полугруппа входных сигналов.

Если полугруппа имеет относительно простое строение, то все полигоны над ней могут быть описаны. В работе [3] были описаны полигоны над вполне простой  $M(G, I, \Lambda, P)$  и полигоны с нулём над вполне 0-простой  $M^0(G, I, \Lambda, P)$  полугруппой (определения и обозначения см. в [4, гл.3]). Описание конгруэнций над этими полугруппами представляет собой более трудную задачу. В частных случаях полугрупп левых или правых нулей это было сделано в работах [5], [6]. А именно, в теореме 2 работы [5] были описаны конгруэнции полигона над полугруппой левых нулей, а теорема 5 работы [6] даёт описание конгруэнций над полугруппой правых нулей. Следует отметить, что эти описания достаточно громоздки, и в ряде ситуаций (например, для описания полигонов с модулярной решёткой конгруэнций) описания конгруэнций в такой общности, как это получено в работах [5,6], обычно не требуется ввиду наличия дополнительных условий на конгруэнции.

В работе [7] были исследованы условия, при которых решётка  $\text{Con } X$  конгруэнций полигона  $X$  (над произвольной полугруппой) является

модулярной или дистрибутивной. Важную роль для модулярности решётки конгруэнций полигона играла модулярность решёток конгруэнций компонент связности полигона и отсутствие так называемых сквозных конгруэнций (наличие их исключает модулярность). В работе [5] были полностью описаны полигоны над полугруппой правых или левых нулей с модулярной или дистрибутивной решёткой конгруэнций. Эти результаты, на наш взгляд, могут быть обобщены по крайней мере на полигоны над прямоугольными связками. Если  $X$  – полигон над прямоугольной связкой  $S$ , то нетрудно показать, что в случае модулярности решётки  $\text{Con } X$  множество  $A = X \setminus XS$  состоит не более, чем из двух элементов. Полигоны над прямоугольной связкой, имеющие модулярную решётку конгруэнций, были описаны в работе [8] в случаях, когда  $A = \emptyset$  или  $|A|=1$ . Таким образом, неразобраным остаётся лишь случай, когда  $|A|=2$ .

Цель данной работы – построить некоторые конгруэнции полигона над прямоугольной связкой, которые в дальнейшем помогут получить ограничения на полигон в случае модулярности, или дистрибутивности, или каких-либо других условий на решётку его конгруэнций.

Напомним некоторые определения, необходимые для дальнейшего.

*Полугруппа правых нулей*  $R$  – полугруппа, в которой  $ab = b$  для любых  $a, b \in R$ . Аналогично этому в *полугруппе левых нулей*  $ab = a$ . *Прямоугольная связка* – это прямое произведение полугруппы левых нулей на полугруппу правых нулей:  $S = L \times R$ . Иными словами, прямоугольная связка – это множество пар  $(l, r)$ , где  $l \in L$ ,  $r \in R$ , с умножением

$$(l, r) \cdot (l', r') = (l, r').$$

Конгруэнцией полигона  $X$  над полугруппой  $S$  называется такое отношение эквивалентности  $\rho$  на множестве  $X$ , что  $(x, y) \in \rho \Rightarrow (xs, ys) \in \rho$  для всех  $x, y \in X, s \in S$ . Решётку конгруэнций полигона  $X$  обозначим  $\text{Con } X$ .

Копроизведением  $\coprod_{i \in I} X_i$  семейства полигонов  $\{X_i \mid i \in I\}$  над полугруппой  $S$  назовём дизъюнктное объединение этих полигонов (если  $X_i$  имеют между собой непустые пересечения, то возьмём их изоморфные попарно не пересекающиеся копии).

Пусть  $X$  – полигон над прямоугольной связкой  $S = L \times R$ . Положим  $Y = XS$ . Нетрудно проверить, что для любых  $y \in Y, l, l' \in L, r \in R$  имеет место равенство  $y \cdot (l, r) = y \cdot (l', r)$ , т.е. произведение не зависит от  $l$ . Это означает, что множество  $Y$  можно рассматривать как полигон над полугруппой правых нулей  $R$ . Конгруэнции полигона  $Y$  одни и те же, если его рассматривать как  $R$ -полигон или как  $S$ -полигон. Кроме того, решётка конгруэнций полигона  $Y$  изоморфно вкладывается в решётку  $\text{Con } X$  следующим образом:  $\rho \mapsto \rho \cup \Delta_X$ , где  $\rho \in \text{Con } Y, \Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$  – отношение равенства на  $X$ .

Пусть  $X$  – полигон над прямоугольной связкой  $S = L \times R$  и  $Y = XS$ . Как отмечалось ранее,  $Y$  является одновременно  $R$ - и  $S$ -полигоном, причём  $\text{Con } Y_R = \text{Con } Y_S$ . Разложим  $Y$  в копроизведение конеразложимых полигонов:  $Y = \coprod_{i \in I} Y_i$ . Можно проверить, что  $Y_i = aS$  для

любого  $a \in Y_i$  и  $|Y_i r| = 1$  для всех  $r \in R$ . Пусть  $Y_i r = \{y_{ir}\}$ . Для  $i, j \in I$  и  $i \neq j$  обозначим через  $\Gamma_{ij}$  двудольный граф с множеством вершин  $Y_i \cup Y_j$  ( $Y_i$  и  $Y_j$  – его доли) и рёбрами  $(y_{ir}, y_{jr})$  при  $r \in R$ .

Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма.

**Лемма.** Пусть  $X$  – полигон над прямоугольной связкой  $S = L \times R$ ,  $XS = \coprod_{i \in I} Y_i$  – разложение подполигона  $XS$  в копроизведение конеразложимых подполигонов и  $\rho \in \text{Con } X$ .

Пусть  $(y, y') \in \rho$  для некоторых  $y \in Y_i, y' \in Y_j$ , причём  $i \neq j$ . Если граф  $\Gamma_{ij}$  связан, то все

элементы множества  $Y_i \cup Y_j$  лежат в одном  $\rho$ -классе.

*Доказательство.* Пусть выполнены условия леммы. Достаточно доказать, что  $(z, z') \in \rho$  при любых  $z \in Y_i, z' \in Y_j$ . По условию  $(y, y') \in \rho$ . Умножив на любое  $r \in R$ , получим  $(yr, y'r) \in \rho$ , т.е.  $(y_{ir}, y'_{ir}) \in \rho$ . Так как граф  $\Gamma_{ij}$  связан, то в нём существует путь от  $y$  к  $z'$ . Ввиду симметричности и транзитивности отношения  $\rho$  мы получаем, что  $(y, z') \in \rho$ . Ввиду произвольности элемента  $z' \in Y_j$  мы получаем, что все элементы множества  $Y_j$  лежат в одном  $\rho$ -классе с элементом  $y$ . Аналогично доказывается, что все элементы из  $Y_i$  лежат в одном  $\rho$ -классе с элементом  $y'$ . Отсюда следует, что  $(z, z') \in \rho$ .

Для любого множества  $A$  через  $\text{Eq } A$  будем обозначать решётку отношений эквивалентности на множестве  $A$ .

**Теорема.** Пусть  $X$  – полигон над прямоугольной связкой  $S = L \times R, XS = \coprod_{i \in I} Y_i$  – разложение подполигона  $XS$  в копроизведение конеразложимых подполигонов  $Y_i$ . Возьмём любое  $\sigma \in \text{Eq } I$ . Далее, возьмём какое-либо подмножество  $I' \subseteq I$ , состоящее из элементов,  $\sigma$ -классы которых одноэлементны (возможно,  $I' = \emptyset$ ). Для каждого  $i \in I'$  возьмём любое  $\sigma_i \in \text{Eq } Y_i$ . Положим  $I'' = I \setminus I'$ . Тогда отношение

$$\rho = \bigcup_{i \in I'} \sigma_i \cup \bigcup_{j \in I''} \left( \bigcup_{(i,j) \in \sigma} Y_i \times \bigcup_{(i,j) \in \sigma} Y_j \right) \quad (1)$$

является конгруэнцией полигона  $Y = XS$ . Кроме того, если все графы  $\Gamma_{ij}$  связны, то любая конгруэнция полигона  $Y$  имеет вид (1).

*Доказательство.* Докажем вначале, что отношение  $\rho$  является конгруэнцией. Ясно, что  $\rho$  – отношение эквивалентности. Нужно доказать, что  $(xs, ys) \in \rho$  при  $(x, y) \in \rho$  и  $s = (l, r) \in S$ . Если  $(x, y) \in \sigma_i$ , то  $x, y \in Y_i$ , а значит,  $x_s = y_s$  (левая и правая части равны  $y_{ir}$ ), откуда  $(xs, ys) \in \rho$ . Пусть теперь  $x, y \in \bigcup_{(i,j) \in \sigma} Y_i$

для некоторого  $j \in I''$ . Так как  $Y_i$  – подполигоны полигона  $X$ , то  $xs, ys \in \bigcup_{(i,j) \in \sigma} Y_i$ , следовательно,  $(xs, ys) \in \rho$ .

Предположим теперь, что графы  $\Gamma_{ij}$  связны и  $\rho \in \text{Con } Y$ . Введём в рассмотрение отношение  $\sigma = \{(i, j) \in I \times I \mid (X_i \times X_j) \cap \rho \neq \emptyset\}$  на множестве  $I$ . Проверим, что  $\sigma \in \text{Eq } I$ . Рефлексивность и симметричность отношения  $\rho$  очевидны. Пусть  $(i, j), (j, k) \in \sigma$ . Тогда  $(x, y), (y', z) \in \rho$  при некоторых  $x \in Y_i, y, y' \in Y_j, z \in Y_k$ . Если  $i = j$  или  $j = k$ , то ясно, что  $(i, k) \in \sigma$ . Далее считаем, что  $i \neq j$  и  $j \neq k$ . Так как граф  $\Gamma_{ij}$  связан, то по лемме  $Y_i \times Y_j \subseteq \rho$ . Из связности графа  $\Gamma_{jk}$  аналогично получаем, что  $Y_j \times Y_k \subseteq \rho$ . Транзитивность отношения  $\rho$  даёт включение  $Y_i \times Y_k \subseteq \rho$ . Таким образом,  $\sigma$  транзитивно. Следовательно,  $\sigma \in \text{Eq } I$ .

Пусть  $I' = \{i \in I \mid (Y_i \times Y_j) \cap \rho = \emptyset \text{ при } j \neq i\}$ .

Тогда для каждого  $i \in I'$  его  $\sigma$ -класс состоит из одного элемента  $i$ . Для  $i \in I'$  положим  $\sigma_i = \rho \cap (Y_i \times Y_i)$ . Ясно, что  $\sigma_i \in \text{Eq } Y$ .

Положим  $I'' = I \setminus I'$ . Тогда при  $i \in I''$  существуют элементы  $x, y$  такие, что  $x \in Y_i, y \in Y_j$  при некотором  $j \neq i$  и  $(x, y) \in \rho$ . Так как граф  $\Gamma_{ij}$  связан, то по лемме  $Y_i \times Y_j \subseteq \rho$ . При этом, очевидно,  $(i, j) \in \sigma$ . Наоборот, если  $(i, j) \in \sigma$  и  $i \neq j$ , то  $i, j \notin I'$  и  $Y_i \times Y_j \subseteq \rho$ . Следовательно,  $i, j \in I''$ . Теперь ясно, что  $\rho$  имеет вид (1).

Эта теорема позволяет сделать интересное замечание. Пусть  $X = XS$ . Если все графы  $\gamma \in \Gamma_{ij}$  связны, то решётка конгруэнций  $\text{Con } X$  не зависит от вида этих графов (важен лишь сам факт их связности). Решётка конгруэнций зависит лишь от мощностей  $|Y_i|$  конеразложимых компонент.

Прежде, чем привести пример решётки конгруэнций полигона в целях упрощения записи конгруэнций введём следующие обозначения. Если  $\tau$  – отношение эквивалентности на множестве  $X$  и  $\{x_1, \dots, x_{n_1}\}, \{x_{n_1+1}, \dots, x_{n_2}\}, \dots, \{x_{n_{k-1}+1}, \dots, x_{n_k}\}$  – её классы, то будем писать

$$\tau = (x_1, \dots, x_{n_1})(x_{n_1+1}, \dots, x_{n_2}) \dots (x_{n_{k-1}+1}, \dots, x_{n_k}).$$

При этом элементы одноэлементных классов можно вообще не писать. Например, запись  $\tau = (123)(45)(67)$  означает, что  $\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}$  – классы отношения  $\tau$ , а остальные классы одноэлементны.

Для любого полигона  $X$  отношение  $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$  (отношение равенства) и отношение  $\nabla = X \times X = \{(x, y) \mid x, y \in X\}$  (универсальное отношение) являются конгруэнциями, причём  $\Delta$  – наименьший элемент решётки  $\text{Con } X$ , а  $\nabla$  – её наибольший элемент.

**Пример.** Пусть  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  – полигон над прямоугольной связкой  $S$ , причём  $X = XS$  и  $Y_1 = \{1, 2, 3\}, Y_2 = \{4, 5\}, Y_3 = \{6, 7\}$  – его конеразложимые подполигоны. Тогда множество

$C = \{\Delta, (12), (13), (23), (123), (45), (12)(45), (13)(45), (23)(45), (123)(45), (67), (12)(67), (13)(67), (23)(67), (123)(67), (12)(45)(67), (13)(45)(67), (23)(45)(67), (123)(45)(67), (4567), (12)(4567), (13)(4567), (23)(4567), (123)(4567), (12345), ((12367), (12345)(67), (12367)(45), \nabla\}$  является подрешёткой решётки конгруэнций полигона  $X$ . Если графы  $\Gamma_{12}, \Gamma_{13}, \Gamma_{23}$  связны, то других конгруэнций нет, т.е.  $\text{Con } X = C$ .

Решётка  $C$  изображена на рисунке 1.

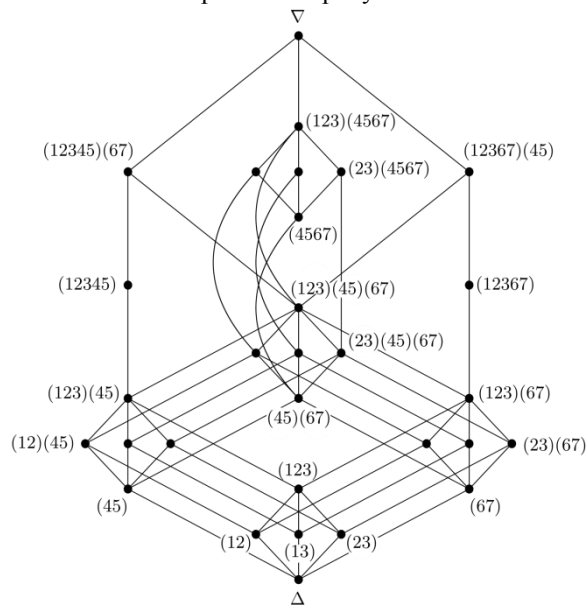


Рисунок 1 - Решётка  $C$

### Литература

1. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V. *Monoids, Acts and Categories*. N.Y. – Berlin,

Walter de Gruyter, 2000.

2. Плоткин Б.И., Гварамя А.А., Гринглаз Л.Я. *Элементы алгебраической теории автоматов*. М., Высшая школа, 1994.

3. Avdeyev A.Yu., Kozhukhov I.V. Acts over completely 0-simple semigroups. *Acta Cybernetica*, 2000, т. 14, вып. 4, с. 523–531.

4. Престон Г., Клиффорд А. *Алгебраическая теория полугрупп*. Тт. 1, 2. М., Мир, 1972, 1974.

5. Халиуллина А.Р. Условия модулярности решётки конгруэнций полигона над полугруппой правых или левых нулей. *Дальневосточный математический журнал*, 2015, т. 15, вып. 1, С. 102–120.

6. Халиуллина А.Р.. Конгруэнции полигонов над полугруппами правых нулей. *Чебышевский сборник*, 14(3):142–146, 2013.

7. Птахов Д.О., Степанова А.А. Решётки конгруэнций полигонов. *Дальневосточный математический журнал*, 2013, т. 13, вып. 1, с. 107–115.

8. Кожухов И.Б., Халиуллина А.Р. О решётке конгруэнций полигонов над прямоугольными связками. *Сб. научн. трудов МИЭТ, посв. 70-летию проф. А.С.Поспелова*, М., МИЭТ, 2016, С. 75–82.

**Кожухов И.Б., Пряничников А.М. О конгруэнциях полигонов над прямоугольными связками.** Строится серия конгруэнций полигона над прямоугольной связкой. При определённых условиях ими исчерпываются все конгруэнции полигона. Результаты предполагается применить в исследовании полигонов с условиями на конгруэнции.

**Ключевые слова:** полигон над полугруппой, прямоугольная связка, решётка конгруэнций.

**Kozhukhov I.B., Pryanichnikov A.M. On congruences of acts over rectangular bands.** We construct a series of congruences of an act over a rectangular band. Under certain conditions, they are all the congruences of the act. We hope to apply the result in the study of acts with conditions on congruences.

**Keywords:** act over semigroup, rectangular band, congruence lattice.

Статья поступила в редакцию 22.02.2018  
Рекомендована к публикации д-ром физ.-мат. наук А.С. Миненко

## Применение полиномов наилучшего равномерного приближения в оценке и анализе экономических явлений

И.А. Козлова

Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского  
irena1983.83@mail.ru

*Козлова И.А. Применение полиномов наилучшего равномерного приближения в оценке и анализе экономических явлений. В настоящей работе представлено построение наилучшего равномерного приближения фрактальной функции Бланка, которую с экономической точки зрения можно рассматривать как модель финансового рынка - двойной зигзаг. Метод построения полиномов наилучшего равномерного приближения данной функции, а также нахождение максимального отклонения полученной аппроксимации осуществляется с помощью разработанной "Программы, реализующей метод построения полиномов наилучшего равномерного приближения фрактальной функции Бланка". Программа разработана в среде MatLab и строит полиномы наилучшего равномерного приближения по заданному параметру функции Бланка и порядку аппроксимирующего многочлена, вычисляет максимальное отклонение полученного приближения и значение полинома в любой точке. В основе работы программы заложено нахождение чебышевского альтернанса.*

**Ключевые слова:** фрактальная функция, наилучшее равномерное приближение, двойной зигзаг.

### Введение

Многие экономические явления описываются с помощью фрактальных моделей [1], однако, изучение фрактальных функций затруднительно из-за инвариантности их масштаба и недифференцируемости, поэтому для прогнозирования и анализа экономических категорий используется полиномиальная линия тренда. Наиболее распространенным методом приближения функций полиномами является метод наименьших квадратов. Данный метод основан на минимизации среднеквадратичного отклонения аппроксимирующего полинома от аппроксимируемой функции, но он не гарантирует значительных локальных ошибок [2]. Для предотвращения подобной возможности используют полиномы наилучшего равномерного приближения, однако не известны ни общий вид многочленов наилучших равномерных приближений, ни способы их построения, поэтому среднеквадратическая мера близости применяется вместо более сложной чебышевской. Решение задачи чебышевского приближения всегда дает примерно ту же среднеквадратическую погрешность, что и решение задачи наилучшего среднеквадратического приближения, однако наилучшее среднеквадратическое приближение дает максимальную абсолютную погрешность, значительно превышающую погрешность чебышевского приближения. Чебышевское приближение определяет ошибку в каждой точке

интервала аппроксимации и ни в одной точке такого интервала ошибка не превышает максимальной чебышевской меры.

Термин «фракталы» впервые ввел Бенуа Мандельброт, математик, изучавший применение фракталов на финансовых рынках [3, 4], а Р.Н. Эллиотта создал волновую теорию, согласно которой поведение цены на рынке происходит волнообразно и имеет определенную фрактальную структуру [5]. Описание Эллиоттом движений финансового рынка, подчиняющегося обычным математическим законам прогрессии, позволяет путем изучения исторических данных поведения рыночных цен оценивать текущее состояние рынка и будущие экономические проявления. Одной из наиболее распространенных моделей финансового рынка является двойной зигзаг. В частности промышленный индекс Доу-Джонса представляет собой фрактальную модель – двойной зигзаг. С математической точки зрения двойной зигзаг представляет собой функцию Бланка.

Целью данной работы является построения полиномов наилучшего равномерного приближения функции двойного зигзага. Для построения полиномов наилучшего равномерного приближения графика двойного зигзага, а также нахождение максимального отклонения полученной аппроксимации применяется "Программа, реализующая метод построения полиномов наилучшего равномерного приближения фрактальной

функции Бланка". Данная программа строит полиномы наилучшего равномерного приближения по заданному параметру функции Бланка (графика двойного зигзага) и порядку аппроксимирующего многочлена. Построения полиномов наилучшего равномерного приближения показано на примере аппроксимации графика индекса Доу-Джонса на заданном отрезке.

### Построение функции Бланка

Функция Бланка определяется как предел последовательности ломаных [6]. Пусть точки  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  – последовательные вершины некоторой ломаной, где  $x_1 < x_2$  и  $y_1 \neq y_2$ . Пусть  $h = \frac{x_2 - x_1}{3}$  и пусть  $k = \lambda(y_2 - y_1)$ , где  $\lambda$  – положительная константа. Следующая ломаная заменяет отрезок, соединяющий точки  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ , зигзагообразной линией, содержащей последовательные вершины  $(x_1, y_1), (x_1 + h, y_2 - k), (x_2 - h, y_1 + k), (x_2, y_2)$ .

Разности ординат последовательных вершин будут равны

$$(1 - \lambda)(y_2 - y_1), (2\lambda - 1)(y_2 - y_1), (1 - \lambda)(y_2 - y_1).$$

Для построения функции Бланка с помощью последовательных приближений зафиксируем  $0 < \lambda < \frac{1}{3}$ . Начнём с отрезка

прямой  $y = x$ , где  $0 \leq x \leq 1$ . Первая аппроксимирующая функция  $f_1(x)$  представляет собой ломаную, строящуюся вышеупомянутым способом. Вторая аппроксимирующая функция  $f_2(x)$  получается из первой с помощью построения ломаной той же конструкции на каждом отрезке  $\frac{i}{3} \leq x \leq \frac{i+1}{3}$ ,  $(i = 0, 1, 2)$ .

Повторим схему применения зигзагообразных конструкций для каждого отрезка аппроксимирующей функции  $f_2(x)$ , чтобы получить следующую аппроксимацию. Рисунок 1 показывает картину аппроксимирующей функции  $f_3(x)$  для  $\lambda = \frac{1}{4}$ . Абсциссы последовательных вершин  $n$ -ой аппроксимирующей функции будут в точках  $x_{n,i} = \frac{i}{3^n}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, 3^n$ ), а так как эти вершины будут вершинами для всех последующих ломаных, то они принадлежат графику некоторой предельной функции Бланка  $f(x)$ . Тем самым функция Бланка  $f$  определена во всех тернарных точках  $x_{n,i}$ , затем эта функция определяется как непрерывное продолжение  $f$  на все точки отрезка  $[0, 1]$ .

Появляется модель, напоминающая ценовые колебания, отражающая последовательные изменения цен от времени 0 к более позднему времени 1 [7].

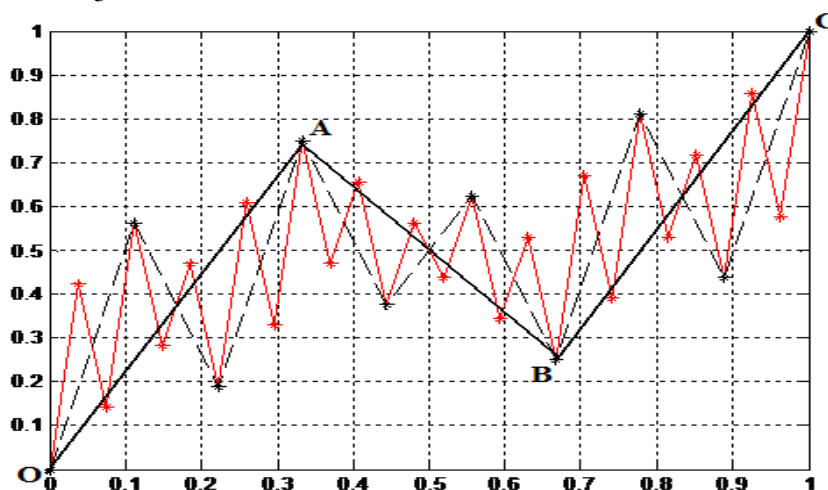


Рисунок 1 – Схема построения вспомогательных функций Бланка  $f_1(x)$  (жирная линия),  $f_2(x)$  (пунктирная линия) и  $f_3(x)$

Сами интервалы выбраны произвольно; они могут представлять секунду, час, день или год. Процесс начинается с цены, представленной прямой линией тренда (на рисунке 1 можно провести отрезок OC). Затем используется

ломаная линия – генератор – чтобы создать модель, которая соответствует колебаниям цены вверх и вниз. Генератор состоит из трех частей, которые интерполированы вдоль прямой линии тренда (генератор с меньшим количеством чем

три, не смоделировал бы цену, которая может двигаться вверх и вниз). После прорисовки начального генератора, его три части интерполированы тремя более короткими. Повторение этих шагов воспроизводит форму генератора, или ценовую кривую, но в сжатых масштабах. И горизонтальная ось (шкала времени) и вертикальная ось (цена) сжаты, чтобы приспособить к горизонтальным и вертикальным границам каждую часть генератора.

Таким образом, с точки зрения экономики рисунок 1 является фрактальной моделью финансового рынка – двойным зигзагом, где по вертикальной оси показано изменение цен, а по горизонтальной оси – время. Двойной зигзаг – это коррекционная волновая модель, состоящая из двух зигзагов OA и BC, разделенных коррекционной волной-связкой AB и удовлетворяющая следующим условиям:

- длина волны AB всегда меньше длины волны OA;
- длина волны BC может быть больше длины волны OA;
- волны OA и BC являются действующими и стремятся между собой к равенству по длине и/или длительности.

В том случае, когда волны OA и BC равны между собой получаем функцию Бланка.

### **Аппроксимация фрактальной модели с помощью наилучшего равномерного приближения**

Полиномы наилучшего равномерного приближения для функции Бланка находятся с помощью подбора чебышевского альтернанса [8].

Так как функция Бланка симметрична, чебышевский альтернанс образуют четное количество точек и поэтому многочлены наилучшего равномерного приближения будут нечетных степеней. Для построения многочленов наилучшего равномерного приближения данной функции получена закономерность нахождения чебышевского альтернанса в общем виде в зависимости от  $\lambda$  [9]. На основе полученной закономерности разработана "Программа, реализующая метод построения полиномов наилучшего равномерного приближения фрактальной функции Бланка» (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017660149, авторы: Козлова И.А., Степович М.А., Биленко А.А., Редько А.В.) по заданному параметру  $\lambda$  ( $0 < \lambda < \frac{1}{3}$ ) и порядку многочлена  $n$  ( $n \leq 19$ ). Программа разработана в среде MatLab, также с помощью неё можно находить и максимальное отклонение полученной аппроксимации.

Преимуществом применения многочленов наилучшего равномерного приближения является аппроксимация графика двойного зигзага сразу во всех ценовых масштабах и с минимальной погрешностью приближения.

На рисунке 2 представлены в сравнении графики аппроксимации функции Бланка (двойного зигзага) полиномами первого и третьего порядков с помощью среднеквадратического приближения и наилучшего равномерного приближения (Чебышевского).

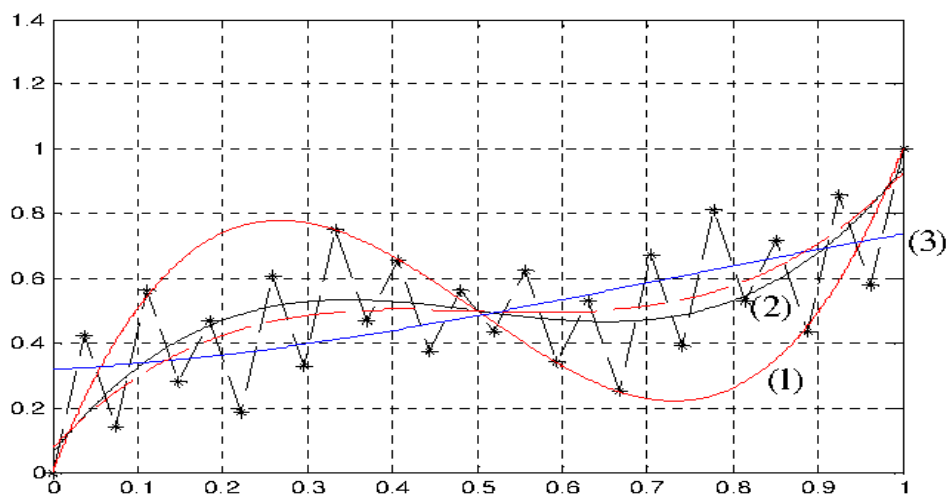


Рисунок 2 – Аппроксимация графика двойного зигзага полиномами третьего порядка: график наилучшего равномерного приближения – пунктирная линия; линия (1) – среднеквадратическое приближение, для построения которого использовались 3 точки; линия (2) – 10 точек; линия (3) – 27 точек



Рассмотрим пример построения полиномов наилучшего равномерного приближения для графика индекса Доу Джонса (рисунок 3). Для рассмотрения выберем ломаную с координатами (2; 100), (103; 190) и (204; 137) и являющийся моделью двойного зигзага.

Поставим в соответствие результаты исследования индекса Доу Джонса с функцией Бланка (двойного зигзага). Для этого отрезок [2; 305] (шкала недель) поставим в соответствие отрезку [0; 1] для функции Бланка. Данное соответствие будет находиться в прямой пропорциональной зависимости с коэффициентом  $\frac{1}{303}$ . По вертикальной оси

координат (шкала цены) отрезку [100; 227] соответствует отрезок [0; 1] функции Бланка с коэффициентом пропорциональности  $\frac{1}{127}$ .

Получаем формулу преобразования координат

$$y = 100 + 127f\left(\frac{1}{303}(x - 2)\right),$$

где  $f$  - функция, задающая полином наилучшего равномерного приближения на отрезке [0; 1],  $x \in [0; 1]$ , а  $y$  - функция полинома наилучшего равномерного приближения на заданном отрезке [100; 227].

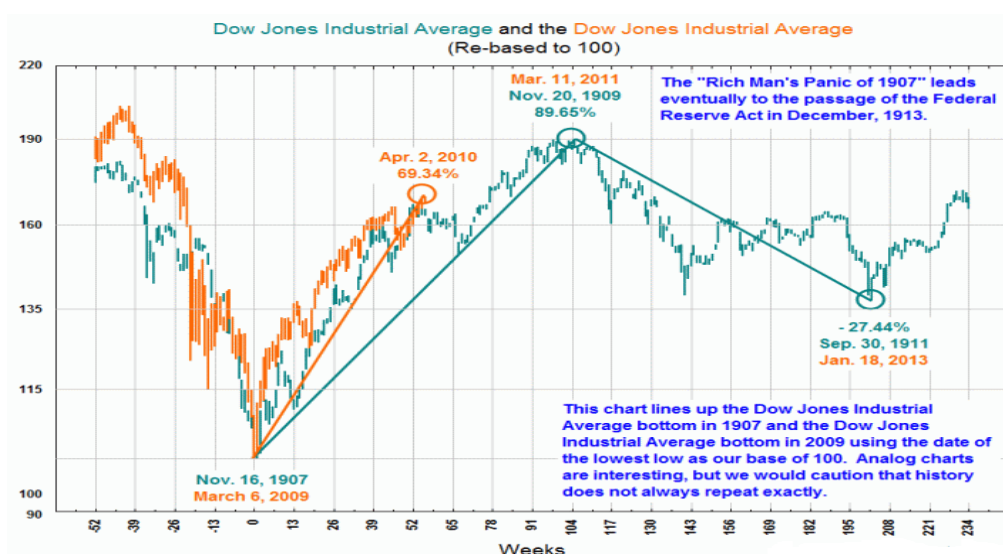


Рисунок 3 – График индекса Доу Джонса

Параметр  $\lambda$  находится из построения полученной модели и равен 37/127. С помощью программы, реализующей метод построения полиномов наилучшего равномерного приближения фрактальной функции Бланка

получим, например, график полинома наилучшего равномерного приближения третьего порядка (рисунок 4):

$$y = 0,00001751x^3 - 0,008063x^2 + 1,2076x + 104,7305.$$

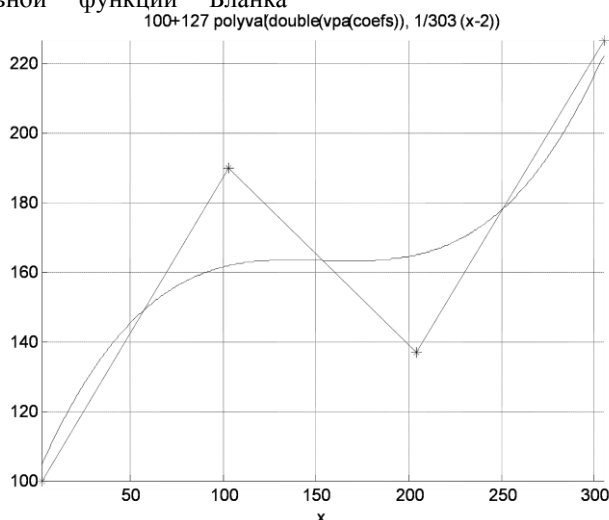


Рисунок 4 – Аппроксимация графика индекса Доу Джонса полиномом наилучшего равномерного приближения третьего порядка

Максимального отклонения полинома наилучшего равномерного приближения от графика индекса Доу Джонса составляет 27,2934.

С помощью разработанной "Программы, реализующей метод построения полиномов наилучшего равномерного приближения фрактальной функции Бланка" можно строить наилучшую равномерную аппроксимацию данной функции, получать коэффициенты построенного полинома в обыкновенных дробях или в десятичных с заданной степенью точности. Также данная программа показывает на графике точки чебышевского альтернанса, вычисляет максимальное отклонение полученного приближения, вычисляя значение полинома в любой точке. Осуществляя элементарные преобразования графика в программе можно строить аппроксимацию на любом заданном отрезке. В дальнейшем планируется разработать аналогичные программы для аппроксимации полиномами наилучшего равномерного приближения некоторых фрактальных моделей, применяемых в экономике и других областях (например, функция Больцано [10]).

### Литература

1. Айвазян С.А. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. Кн. 1: справочное издание / С.А. Айвазян., С.А. Енюков, Л.Д. Мешалкин - М.: Финансы и статистика, 1983. - 471с.

2. Основы цифровой обработки сигналов / А.И. Солонина, Д.А. Улахович, С.М. Арбузов, Е.Б. Соловьева.- Санкт-Петербург: БВХ-Петербург, 2005.- 753с.

3. Мандельброт Б., Хадсон Р. Л. (Не) послушные рынки: фрактальная революция в финансах.: пер. с англ. / Б. Мандельброт, Р.Л. Хадсон. — М: "Вильямс", 2006. — 400 с.

4. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы: пер. с англ. / Б. Мандельброт. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.

5. Пректер Р. Волновой принцип Элиота: Ключ к пониманию рынка. / Р. Пректер, А. Фрост. - М.: Ампина Паблишер, 2012. - 270с.

6. Blank A. A simple example of a Weierstrass function / A. Blank // Amer. Math. Monthly. - 1966. V 73, № 3. - P. 515-519.

7. Mandelbrot B. A Multifractal Walk down Wall Street / B. Mandelbrot // Scientific American. – 1999. - P. 70-73.

8. Привалов А. А. Теория интерполирования функций. Кн. 1 / А.А. Привалов. – Саратов: Саратов. ун-т, 1990. – 230 с.

9. Козлова И. А. Применение наилучшего равномерного приближения к анализу фрактальных моделей / И.А. Козлова // Современные наукоемкие технологии. Региональное приложение. -2015. - №1 (41). - С. 54–59

10. Козлова И.А. Моделирование Броуновского движения с помощью функции Больцано / И.А. Козлова // Прикладные задачи Математики: материалы XXV международной научно-технической конференции, 18 – 22 сентября 2017 года. Севастополь / - Севастополь: Севастоп. гос. ун-т, 2017. - С. 183-186

**Козлова И.А. Применение полиномов наилучшего равномерного приближения в оценке и анализе экономических явлений.** В настоящей работе представлено построение наилучшего равномерного приближения фрактальной функции Бланка, которую с экономической точки зрения можно рассматривать как модель финансового рынка - двойной зигзаг. Метод построения полиномов наилучшего равномерного приближения данной функции, а также нахождение максимального отклонения полученной аппроксимации осуществляется с помощью разработанной "Программы, реализующей метод построения полиномов наилучшего равномерного приближения фрактальной функции Бланка". Программа разработана в среде MatLab и строит полиномы наилучшего равномерного приближения по заданному параметру функции Бланка и порядку аппроксимирующего многочлена, вычисляет максимальное отклонение полученного приближения и значение полинома в любой точке. В основе работы программы заложено нахождение чебышевского альтернанса.

**Ключевые слова:** фрактальная функция, наилучшее равномерное приближение, двойной зигзаг.

**Kozlova I. A. Application of polynomials of best uniform approximation in the evaluation and analysis of economic phenomena.** This paper presents the construction of a best uniform approximation of fractal functions of the Blanca, which from an economic point of view can be regarded as a model of a financial market a double zigzag. A method of constructing polynomials of best uniform approximation to this function and finding the maximum deviation of the obtained approximation is carried out using the developed "Program that implements a method of constructing polynomials of best uniform approximation of fractal functions of the Blanca." The program was developed in MatLab and builds a polynomial best uniform approximation of a given function parameter of the form and order of the approximating polynomial, computes the maximum deviation of the obtained approximation and the value of the polynomial at any point. In the basis of the work program is based on the finding of chebyshev alternans.

**Keywords:** fractal function, the best uniform approximation of a double zigzag.

Статья поступила в редакцию 20.03.2018  
Рекомендована к публикации д-ром техн. наук В.Н. Павлышом

## Продолжение частичной операции в универсальных алгебрах

М.С. Коробов<sup>1</sup>, А.О. Петриков<sup>2</sup>  
ООО «АНКАД»<sup>1</sup>  
НИУ МИЭТ<sup>2</sup>  
korobovms94@gmail.com<sup>1</sup>, masterpetr@mail.ru<sup>2</sup>

**Коробов М.С., Петриков А.О. Продолжение частичной операции в универсальных алгебрах.** В данной статье рассматриваются продолжение частичных операций для полугрупп, полигонов и инъективных алгебр. Приведены некоторые необходимые и некоторые достаточные условия возможности продолжения частичных полигонов над полурешёткой.

**Ключевые слова:** частичная операция, частичный полигон, частичная универсальная алгебра, инъективная, полурешётка.

### Введение

Универсальные алгебры с заданными на них частичными операциями (частичные универсальные алгебры) встречаются во многих областях математики. Напомним, что частичная операция – это операция, определенная, возможно, не на всех наборах аргументов, например, операция вычитания на множестве натуральных чисел, операция деления на множестве действительных чисел (запрещено деление на нуль). Нам бы хотелось так продолжить операцию, чтобы в алгебре сохранялись определённые свойства, например, чтобы ассоциативность частичной полугруппы продолжала иметь место после того, как частичная операция станет полной. Продолжение операции на частичных полугруппах изучалось, в работах [1], [2].

### Основные определения

В данной статье мы в основном занимаемся продолжением операции в частичных полигонах над полугруппами.

Приведём основные определения, необходимые для дальнейшего исследования.

**Определение 1.**  $n$ -арной операцией на множестве  $S$  называется отображение  $S^n \rightarrow S$ .

**Определение 2.** Частичной  $n$ -арной операцией на множестве  $S$  называется отображение подмножества  $P \subseteq S^n$  в  $S$ . При этом будем считать, что для наборов элементов из множества  $S^n \setminus P$  не существует результата действия этой операции.

**Определение 3 ([3]).** Полугруппой называется множество с одной бинарной ассоциативной операцией, т.е.  $(ab)c = a(bc)$  для любых элементов  $a, b, c$ .

**Определение 4 ([4]).** Полурешётка – частично упорядоченное множество, в котором каждая пара элементов имеет точную нижнюю грань.

**Замечание 5.** Хорошо известно, что полурешётка – это в точности коммутативная полугруппа идемпотентов. Связь между порядком и операцией определяется соотношениями  $a \cdot b = \inf \{a, b\}$ ,  $a \leq b \Leftrightarrow ab = ba = a$ .

**Определение 6.** Полигон ([5]) над полугруппой  $S$  – это множество  $X$  вместе с отображением  $X \times S \rightarrow X$  таким, что  $x(st) = (xs)t$  для всех  $x \in X$ ,  $s, t \in S$ . Частичный полигон ([6]) – множество  $X$ , для которого задано частичное отображение  $X \times S \rightarrow X$ , причём для любых  $x \in X$ ,  $s, t \in S$  произведения  $x(st)$  и  $(xs)t$  либо оба не существуют, либо существуют и равны друг другу.

**Замечание 7 ([7]).** Полигон над полурешёткой (даже частичный) является частично упорядоченным множеством со следующим отношением порядка:  $x \leq y \Leftrightarrow x \in yS^1$ .

Напомним полученные ранее результаты по продолжению частичной операции в полугруппах.

**Теорема 8 ([2, теорема 10]).** Пусть  $S = (\square_n, \{0\}, \cdot)$  – частичная мультипликативная полугруппа ненулевых вычетов по модулю  $n$ . Частичная операция на  $S$  продолжается до полной ассоциативной операции в том и только том случае, если выполнено одно из следующих условий: 1)  $n$  чётно, 2)  $n = p^k$ , где  $k \in \square$ , а  $p$  – нечётное простое число.

**Теорема 9** ([2, теорема 11]). Частичная операция на полугруппе  $S$  всех ненулевых матриц размера  $2 \times 2$  над полем  $F$  продолжается до полной ассоциативной операции в том и только том случае, если  $|F| = 2$ .

В следующей теореме мы пользуемся символами  $R$ ,  $L$ ,  $H$  для обозначения отношений Грина на полугруппе [3].

**Теорема 10** ([2, теорема 5]). Пусть  $S = M^0(G, I, \Lambda, P)$  – вполне 0-простая полугруппа,  $M = S, \{0\}$  – частичная полугруппа ненулевых элементов из  $S$ . Если  $*$  – полная ассоциативная операция, продолжающая частичную операцию  $\cdot$  на  $M$ , то  $R$ -,  $L$ - и  $H$ -классы полугруппы  $(M, *)$  являются объединениями соответственно,  $R$ -,  $L$ -,  $H$ -классов полугруппы  $S$ , причём если  $\tilde{R}$  и  $\tilde{R}'$  –  $R$ -классы полугруппы  $(M, *)$ ,  $\tilde{R} = \bigcup_{i \in I_1} R_i$ ,  $\tilde{R}' = \bigcup_{i \in I'_1} R_i$ , где  $R_i$  –  $R$ -классы полугруппы  $S$ , то между множествами  $I_1$  и  $I'_1$  существует взаимно однозначное соответствие. Аналогичное утверждение имеет место для  $L$ -классов.

Далее мы получим некоторые условия продолжаемости частичных полигонов до полных. Достаточное условие даёт следующая теорема.

**Теорема 11.** Пусть  $X$  – частичный полигон над полурешёткой  $S$ . Если существует элемент  $x_0 \in X$  такой, что  $x_0 S \subseteq \{x_0\}$ , то полигон  $X$  продолжается до полного.

*Доказательство.* Продолжим операцию на частичном полигоне следующим образом: если  $xs$  существует, то полагаем  $x \cdot s = xs$ , иначе  $x \cdot s = x_0$ . Проверим аксиому полигона:  $(x \cdot s) \cdot t = x \cdot (st)$ . Если  $x(st)$  существует, то  $(xs)t$  также существует и они равны. В этом случае  $x \cdot (st) = x(st) = (xs)t = (x \cdot s) \cdot t$ . Пусть теперь  $(xs)t$  и  $x(st)$  не существуют. Рассмотрим два случая. Во-первых, если  $xs$  существует, то  $x \cdot (st) = x_0$  и  $(x \cdot s) \cdot t = xs \cdot t = x_0$ . Во-вторых, если  $xs$  не существует, то  $x \cdot (st) = x_0$  и  $(x \cdot s) \cdot t = x_0 t = x_0$ .

Из теоремы 11 можно сделать три следствия.

**Следствие 12.** Если в частично упорядоченном множестве  $(X, \leq)$  существует минимальный элемент, то частичный полигон  $X$  продолжается до полного.

**Следствие 13.** Если в  $(X, \leq)$  нет бесконечных убывающих цепей элементов, то частичный полигон  $X$  продолжается до полного.

**Следствие 14.** Если  $X$  – конечное множество, то частичный полигон  $X$  продолжается до полного.

**Теорема 15.** Если в полурешётке  $S$  нет бесконечных убывающих цепей элементов, то и в любом полигоне над  $S$  также нет бесконечных убывающих цепей элементов.

*Доказательство.* Пусть в  $S$ -полигоне  $X$  найдется убывающая цепь  $x_1 > x_2 > \dots$ . По определению порядка на полигоне  $X$  существуют такие элементы  $s_1, s_2, \dots \in S$ , что  $x_{i+1} = x_i s_i$  при всех  $i \in \mathbb{N}$ . Положим  $t_i = s_1 s_2 \dots s_i$  для каждого  $i \in \mathbb{N}$ . Докажем, что последовательность  $(t_n)$  убывающая. Так как  $t_{i+1} = t_i s_{i+1}$ , то  $t_{i+1} \leq t_i$ . Нетрудно проверить, что  $x_{i+1} = x_1 t_i$  и  $x_{i+2} = x_1 t_{i+1}$ . Поэтому, если  $t_{i+1} = t_i$ , то  $x_{i+1} = x_{i+2}$ , что невозможно. Таким образом,  $t_{i+1} < t_i$ . Мы получили бесконечную убывающую последовательность  $t_1 > t_2 > \dots$  элементов из  $S$ , а это противоречит условию теоремы.

Используя эту теорему, можно получить ещё одно достаточное условие продолжаемости частичного полигона над полурешёткой до полного.

**Теорема 16.** Если в полурешётке  $S$  нет бесконечная убывающих цепей элементов, то любой частичный полигон над  $S$  продолжается до полного.

*Доказательство.* Утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы 15 и следствия 13.

**Определение 17.** Для любого частично упорядоченного множества  $A$  и элемента  $a \in A$  введём обозначение  $a^\Delta = \{b \in A \mid b \geq a\}$  (верхний конус элемента  $a$ ).

В следующей теореме мы находим необходимое условие того, чтобы любой полигон над полурешёткой продолжался до полного.

**Теорема 18.** Если любой частичный полигон над полурешёткой  $S$  продолжается до полного, то в полурешётке  $S$  не существует бесконечных убывающих ограниченных снизу цепей элементов.

*Доказательство.* Предположим, что в полурешётке  $S$  существует бесконечная убывающая цепь  $s_1 > s_2 > \dots$ , ограниченная снизу элементом  $s_\infty \in S$  (то есть для любого натурального  $i$  выполняется неравенство  $s_i > s_\infty$ ). Надо доказать, что в этом случае существует частичный полигон над  $S$ , который не может быть продолжен до полного.

Пусть  $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n^{\Delta}$ . Очевидно,  $U$  – подполурешётка полурешётки  $S$ . Для элемента  $u \in U$  положим  $k(u) = \min\{i \mid u \geq s_i\}$ .

Возьмём какое-нибудь счётное множество  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$  (элементы  $x_i$  различны) и сделаем его частичным полигоном над полурешёткой  $S$  следующим образом. Произведение  $x_j * s$  определим для всех  $x_j \in X$  и элементов  $s \in U$ . А именно, положим

$$x_j * s = \begin{cases} x_{\max\{j, k(s)\}}, & \text{если } s \in U, \\ \text{не определено,} & \text{если } s \notin U. \end{cases}$$

Проверим, что произведения  $x_j * (st)$  и  $(x_j * s) * t$  существуют или не существуют одновременно. Для этого достаточно доказать, что  $st \in U \Leftrightarrow s, t \in U$  при любых  $s, t \in S$ . Действительно, если  $st \in U$ , то  $st \geq s_i$  при некотором  $i$ . В этом случае  $s, t \geq s_i$ , а значит,  $s, t \in U$ . Наоборот, если  $s, t \in U$ , то  $s \geq s_i, t \geq s_j$  при некоторых  $i, j$ . Но тогда  $st \geq s_i s_j = s_{\max\{i, j\}}$ , т.е.  $st \in U$ . Итак, произведения  $x_j * (st)$  и  $(x_j * s) * t$  либо оба существуют, либо не существуют. Докажем, что эти произведения совпадают, если оба существуют.

Докажем, что  $k(uv) = \max\{k(u), k(v)\}$  при  $u, v \in U$ . Действительно, пусть  $k(u) = p, k(v) = q, m = \max\{p, q\}$ . Имеем:  $u \geq s_p, v \geq s_q$ . Отсюда  $uv \geq s_p s_q = s_{\max\{p, q\}} = s_m$ , поэтому  $k(uv) \leq m$ . Если  $k(uv) < m$ , то  $k(uv) \leq m-1$ , откуда  $uv \geq s_{m-1}$ , поэтому  $u, v \geq s_{m-1}$ , а значит,  $k(u), k(v) \leq m-1$ , то есть  $p, q \leq m-1$ , и мы получаем, что  $m \leq m-1$ , а это явное противоречие. Итак,  $k(uv) = \max\{k(u), k(v)\}$ .

Пусть  $x_j \in X$  и  $s, t \in U$ . Пусть  $p = k(s), q = k(t), m = \max\{p, q\}$ . Тогда  $\max\{j, k(st)\} = \max\{j, \max\{k(s), k(t)\}\} = \max\{j, m\}$ , поэтому  $x_j * (st) = x_{\max\{j, k(st)\}} = x_{\max\{j, m\}}, (x_j * s) * t = x_{\max\{j, k(s)\}} * t = x_{\max\{j, k(s), k(t)\}} = x_{\max\{k, m\}}$ . Таким образом,  $x_j * (st) = (x_j * s) * t$ , т.е.  $X$  – частичный полигон. Осталось доказать, что он не продолжается до полного.

Предположим, что частичная операция на  $X$  может быть продолжена таким образом, что  $X$  станет полигоном над  $S$ . Тогда мы будем иметь  $x_1 * s_{\infty} = x_k$  при некотором  $k$ . Отсюда получаем:

$$x_{k+1} = x_k * s_{k+1} = (x_1 * s_{\infty}) * s_{k+1} = x_1 * (s_{\infty} s_{k+1}) = x_1 * s_{\infty} = x_k,$$

а это противоречит выбору множества  $X$ .

Понятие частичной полугруппы и частичного полигона над полугруппой могут быть существенно обобщены до понятия частичной универсальной алгебры, удовлетворяющей некоторому тождеству (или совокупности тождеств). В случае частичных полугрупп это было тождество ассоциативности, а в случае полигонов – совокупность тождеств  $x(st) = (xs)t$ .

**Определение 19.** Пусть  $A$  – частичная универсальная алгебра некоторой сигнатуры  $\Sigma$  (напомним, что сигнатура – это совокупность символов алгебраических операций; при этом для каждого символа должна быть указана арность операции, которую он будет представлять). Пусть  $u(x_1, \dots, x_n), v(x_1, \dots, x_n)$  – термы, записанные в сигнатуре  $\Sigma$ . Будем говорить, что в алгебре  $A$  выполняется тождество  $u(x_1, \dots, x_n) = v(x_1, \dots, x_n)$ , если для любых элементов  $a_1, \dots, a_n \in A$  либо  $u(a_1, \dots, a_n)$  и  $v(a_1, \dots, a_n)$  оба не существуют, либо оба существуют и  $u(a_1, \dots, a_n) = v(a_1, \dots, a_n)$ .

Понятие гомоморфизма в случае частичных алгебр выглядит следующим образом.

**Определение 20.** Пусть  $A$  и  $B$  – частичные алгебры одной сигнатуры. Отображение  $\varphi: A \rightarrow B$  (обычное, не частичное) называется гомоморфизмом частичных алгебр, если для любой частичной  $n$ -арной операции  $f$  из сигнатуры и любых элементов  $a_1, \dots, a_n \in A$  из существования  $f(a_1, \dots, a_n)$  следует существование  $\varphi(f(a_1, \dots, a_n))$  и равенство  $\varphi(f(a_1, \dots, a_n)) = f(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n))$ .

То есть, можно сказать, что гомоморфизм частичных алгебр сохраняет операции на тех наборах, на которых эти операции определены.

Инъективность частичной универсальной алгебры определяется так же, как в случае обычных алгебр. Приведём это определение. Ниже в теореме 22 мы установим связь между понятием инъективности и свойством продолжаемости частичной операции.

**Определение 21.** Частичная алгебра  $A$  называется инъективной, если для любых алгебр  $P$  и  $Q$ , гомоморфизма  $\alpha: P \rightarrow Q$  и гомоморфизма  $\varphi: P \rightarrow X$  существует гомоморфизм  $\psi: Q \rightarrow X$  такой, что следующая диаграмма (см. рис. 1) коммутативна:

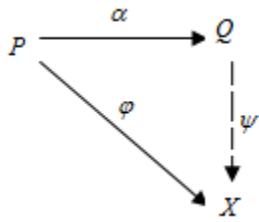


Рисунок 1 – Диаграмма инъективности

**Теорема 22.** Если частичная алгебра инъективна и удовлетворяет совокупности тождеств, то все частичные операции этой алгебры продолжаются до полных с сохранением этих тождеств.

$$\tilde{f}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{cases} f(a_1, a_2, \dots, a_n), & \text{если } a_1, a_2, \dots, a_n \in A \text{ и } f(a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ существует,} \\ \theta, & \text{если значение не существует или } a_k = \theta \text{ для некоторого } k. \end{cases} \quad (1)$$

Ясно, что  $\tilde{f}$  – продолжение операции  $f$ . Так как процедура продолжения проделана для каждого символа  $f \in \Sigma$ , то мы получаем полную алгебру сигнатуры  $\Sigma$ , построенную на множестве  $\tilde{A}$ . На множестве  $\tilde{A} = A \cup \{\theta\}$  можно определить также значения термов. Если  $u(x_1, \dots, x_n)$  – терм сигнатуры  $\Sigma$ , и  $a_1, \dots, a_n \in A$ , то  $\tilde{u}(a_1, \dots, a_n)$  будет обозначать значение термина  $u$  на наборе  $a_1, \dots, a_n$ , при вычислении которого вместо операций  $f$  берутся операции  $\tilde{f}$ . Операции алгебры  $\tilde{A}$  являются продолжениями соответствующих операций на  $A$ . Но это внешнее продолжение, а не внутреннее – здесь мы используем элемент  $\theta$ , не принадлежащий множеству  $A$ . Ниже мы построим внутреннее продолжение.

Рассмотрим естественное вложение алгебры  $A$  в  $A \cup \{\theta\}$ , а также тождественное отображение  $1_A : A \rightarrow A$ . Расположим их в виде диаграммы. Поскольку алгебра  $A$  инъективна, то существует гомоморфизм  $\varphi$ , для которого диаграмма коммутативна (см. рис. 2):

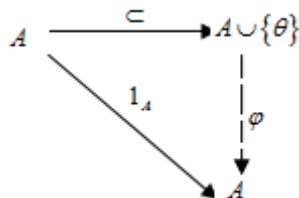


Рисунок 2 – Диаграмма инъективного продолжения

Положим  $a^* = \varphi(\theta)$ . Для  $f \in \Sigma$  и  $a_1, \dots, a_n \in A$  положим

*Доказательство.* Пусть  $A$  – частичная инъективная алгебра некоторой сигнатуры  $\Sigma$ . Возьмём элемент  $\theta \notin A$  и построим новую алгебру (полную) на множестве  $A \cup \{\theta\}$ . Продолжим операции алгебры  $A$  на множество  $A \cup \{\theta\}$  следующим образом. Пусть  $f : A^n \rightarrow A$  – частичная операция на  $A$ , где  $f \in \Sigma$ . Определим операцию  $\tilde{f} : \tilde{A}^n \rightarrow \tilde{A}$  (полную) по следующему правилу:

$f^*(a_1, \dots, a_n) = \varphi(\tilde{f}(a_1, \dots, a_n))$ . Нетрудно видеть, что  $f^*$  является продолжением операции  $f$ , причём это продолжение внутреннее, так как  $f^*(a_1, \dots, a_n) \in A$  при любых  $a_1, \dots, a_n \in A$ . Операция  $f^*$  всюду определённая (полная). Алгебру с операциями  $f^*$  обозначим через  $A^*$ . Осталось доказать, что тождества алгебры  $A$  выполняются в  $A^*$ .

Поскольку на множестве  $A$  теперь определены операции  $f^*$  (полные), соответствующие символам  $f \in \Sigma$ , то на  $A$  можно определить также значения термов. Если  $u(x_1, \dots, x_n)$  – терм и  $a_1, \dots, a_n \in A$ , то  $u^*(a_1, \dots, a_n)$  будет обозначать значение термина  $u$  на наборе  $a_1, \dots, a_n$ , при вычислении которого вместо операций  $f$  используются операции  $f^*$ .

Докажем, что для любого термина  $u(x_1, \dots, x_n)$  и любых элементов  $a_1, \dots, a_{i-1}, a^*, a_{i+1}, \dots, a_n \in A$  выполняется равенство

$$u^*(a_1, \dots, a_{i-1}, a^*, a_{i+1}, \dots, a_n) = a^*. \quad (2)$$

Ясно, что достаточно доказать данное утверждение в случае, когда  $u \in \Sigma$ . Выполним преобразования, учитывая, что  $\varphi$  – гомоморфизм,  $\varphi(a) = a$  при  $a \in A$  и  $\varphi(\theta) = a^*$ :  
 $u^*(a_1, \dots, a_{i-1}, a^*, a_{i+1}, \dots, a_n) = u^*(\varphi(a_1), \dots, \varphi(\theta), \dots, \varphi(a_n)) = \varphi(u^*(a_1, \dots, \theta, \dots, a_n)) = \varphi(\theta) = a^*$ .

Докажем, что если для некоторого термина  $u(x_1, \dots, x_n)$  значение  $u(a_1, \dots, a_n)$  не определено, то  $u^*(a_1, \dots, a_n) = a^*$ .

Действительно, если  $u(a_1, \dots, a_n)$  не определено, то при вычислении значения этого термина на

элементах из  $A \cup \{\theta\}$  мы получим  $\theta$ , поэтому

$\tilde{u}(a_1, \dots, a_n) = \theta$ , а так как  $u^* = \varphi(\tilde{u})$ , мы

получим, что  $u^*(a_1, \dots, a_n) = \varphi(\theta) = a^*$ .

Пусть  $u(x_1, \dots, x_n)$  и  $v(x_1, \dots, x_n)$  – термы сигнатуры  $\Sigma$  и в алгебре  $A$  выполняется тождество  $u = v$  в смысле определения 19. Пусть  $a_1, \dots, a_n$  – любые элементы из  $A$ . Если значение  $u(a_1, \dots, a_n)$  определено, то по определению 19  $v(a_1, \dots, a_n)$  также определено и  $u(a_1, \dots, a_n) = v(a_1, \dots, a_n)$ . Если  $u(a_1, \dots, a_n)$  не определено, то  $v(a_1, \dots, a_n)$  также не определено, поэтому по только что доказанному мы имеем  $u^*(a_1, \dots, a_n) = a^*$  и  $v^*(a_1, \dots, a_n) = a^*$ . Таким образом,  $u^*(a_1, \dots, a_n) = v^*(a_1, \dots, a_n)$ . Это означает, что в алгебре с носителем  $A$  и операциями  $f^*$  выполнено тождество  $u = v$ .

**Следствие 23.** Любой частичный инъективный полигон над полугруппой может быть продолжен до полного.

*Доказательство.* Полигон  $X$  над полугруппой  $S$  можно рассматривать как универсальную алгебру с носителем  $X$  и множеством унарных операций  $\{f_s \mid s \in S\}$  умножения на элемент из  $S$ :  $f_s : X \rightarrow X$ ,  $f_s : x \mapsto xs$ . При этом алгебра задается множеством тождеств  $f_i(f_s(x)) = f_{si}(x)$ . Остаётся применить теорему 22.

**Коробов М.С., Петриков А.О. Продолжение частичной операции в универсальных алгебрах.** В данной статье рассматриваются продолжение частичных операций для полугрупп, полигонов и инъективных алгебр. Приведены некоторые необходимые и некоторые достаточные условия возможности продолжения частичных полигонов над полурешёткой.

**Ключевые слова:** частичная операция, частичный полигон, частичная универсальная алгебра, инъективная, полурешётка.

**Korobov M.S., Petrikov A.O. Continued partial operations in universal algebras.** This paper analyzes the continuation of partial operations for semigroups, acts, and injective algebras. Some necessary and some sufficient conditions of the existence of continuation of partial acts over a semilattice are given.

**Keywords:** partial operation, partial act, partial universal algebra, injective algebra, semilattice.

## Вывод

В результате исследований приведены некоторые необходимые и достаточные условия возможности продолжения частичных полигонов над полурешёткой.

## Литература

1. Ляпин Е.С., Евсеев А.Е., Частичные алгебраические действия. Издательство «Образование», Санкт-Петербург, 1991.

2. Петриков А.О., Продолжение частичной полугрупповой операции, Математические заметки СВФУ, 2017 (в печати).

3. Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, Том 1, Издательство «Мир», Москва, 1972, 283 стр.

4. Гретцер Г., Общая теория решёток. Мир, Москва, 1982.

5. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V., Monoids, Acts and Categories Berlin: Walter de Gruyter, 2000, 529 p.

6. Апраксина Т.В., Максимовский М. Ю., Полигоны и частичные полигоны над полурешётками, Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Математика. Механика. Информатика, 12, 1 (2012), 3-7.

7. Кожухов И.Б., Максимовский М.Ю., Об автоматах над полурешётками, Системный анализ и информационно-управляющие системы: сборник научных трудов под редакцией проф. В.А. Браходкина. М.: МИЭТ, 2006. - С. 19-34.

Статья поступила в редакцию 22.02.2018

Рекомендована к публикации д-ром физ.-мат. наук А.С. Миненко



УДК 512.572

## Эндоморфизмы абелевых полуциклических $n$ -арных групп

В. М. Кусов, Н. А. Щучкин

Волгоградский государственный социально-педагогический университет  
kvm64@yandex.r, nikolaj\_shchuchkin@mail.ru

**Кусов В. М., Щучкин Н. А.** Эндоморфизмы абелевых полуциклических  $n$ -арных групп. Приведено полное описание строения  $(n, 2)$ -колец эндоморфизмов конечных и бесконечных абелевых полуциклических  $n$ -арных групп. Доказан  $n$ -арный аналог теоремы Бера-Капланского для конечных абелевых полуциклических  $n$ -арных групп. Найдены условия изоморфизма  $(n, 2)$ -колец эндоморфизмов для бесконечных абелевых полуциклических  $n$ -арных групп.

**Ключевые слова:** абелева  $n$ -арная группа, эндоморфизм, полуциклическая  $n$ -арная группа,  $(n, 2)$ -кольцо.

### Введение

$n$ -арный группоид  $\langle G, f \rangle$  с  $n$ -арной операцией  $f$  ( $n \geq 3$ ) называют  $n$ -арной квазигруппой, если в нем для всех  $j=1, \dots, n$  разрешимо и имеет единственное решение каждое из уравнений

$$f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n) = b$$

для любых  $a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n, b$  из  $G$ .  $n$ -Арной квазигруппой, в частности, является  $n$ -арная группа, которая служит обобщением понятия группы на  $n$ -арный случай. Именно,  $n$ -арная квазигруппа  $\langle G, f \rangle$  называется  $n$ -арной группой, если в ней выполняется обобщенный закон ассоциативности

$$f(f(a_1, \dots, a_n), a_{n+1}, \dots, a_{2n-1}) = f(a_1, \dots, a_i, f(a_{i+1}, \dots, a_{i+n}), a_{i+n+1}, \dots, a_{2n-1})$$

для всех  $i=1, \dots, n-1$  (см. стр. 52, [1]). Более раннее изучение  $n$ -арных групп встречается в работах [2], [3], [4]. Основы теории  $n$ -арных групп подробно изложены в работах [5], [6], [7].

В  $n$ -арной группе  $\langle G, f \rangle$  для любого элемента  $a \in G$  решение уравнения

$$f(\underbrace{a, \dots, a}_{n-1}, x) = a$$

обозначают  $\bar{a}$  и называют косым элементом для  $a$ . Получаем в  $n$ -арной группе  $\langle G, f \rangle$  унарную операцию  $\bar{\phantom{x}}$ . Отметим некоторые свойства этой операции, которые нам понадобятся дальше (см., например, [6]).

**Теорема 1.** В любой  $n$ -арной группе  $\langle G, f \rangle$  выполнены свойства:

1) для любых  $x, y \in G$  верны равенства

$$f(y, x, \dots, x, \bar{x}) = y, f(\bar{x}, x, \dots, x, y) = y;$$

2) любой гомоморфизм  $\varphi$   $n$ -арной группы  $\langle G, f \rangle$  сохраняет унарную операцию  $\bar{\phantom{x}}$ , т.е. для любого  $x \in G$  верно равенство

$$\varphi(\bar{x}) = \overline{\varphi(x)}.$$

Известно [8], что  $n$ -арный группоид  $\langle G, f \rangle$  является  $n$ -арной группой тогда и только тогда, когда в нем операция  $f$  удовлетворяет обобщенному закону ассоциативности и существует унарная операция  $h: x \rightarrow \bar{x}$ , для которой выполняются тождества

$$f(y, x, \dots, x, \bar{x}, x) = y, f(x, \bar{x}, x, \dots, x, y) = y. \quad (1)$$

Нас интересует отдельный класс  $n$ -арных групп, точнее, класс абелевых  $n$ -арных групп.  $n$ -Арная группа называется абелевой, если в ней верны тождества

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

для любой подстановки  $\sigma \in S_n$ . Если теория абелевых групп давно уже формально является частью теории групп, ее методы и результаты, как правило, не связаны с общей теорией групп (см. [9], [10], [11]), то теория абелевых  $n$ -арных групп находится в своем первоначальном развитии. Основой этой теории является работа [12]. Надеемся, настоящая работа внесет небольшой вклад в фундамент развития теории абелевых  $n$ -арных групп.

**Некоторые сведения из теории абелевых  $n$ -арных групп**

Имеется тесная связь между теориями групп и  $n$ -арных групп. Частным случаем основных результатов работ [13], [14] является

**Теорема 2.** (Предложение 3, [12]). На любой абелевой  $n$ -арной группе  $\langle G, f \rangle$  задается абелева группа  $\langle G, + \rangle$  с бинарной операцией  $+$ , заданной по правилу:

$$a + b = f(a, c, \dots, c, \bar{c}, b),$$

где  $c$  — фиксированный элемент из  $G$ . Тогда

$$f(a_1, \dots, a_n) = a_1 + \dots + a_n + d, \quad (2)$$

где  $d = f(c, \dots, c)$ . Элемент  $c$  является нулем в группе  $\langle G, + \rangle$ . Верно и обратно: в любой абелевой группе  $\langle G, + \rangle$  для выбранного элемента  $d$  задается абелева  $n$ -арная группа  $\langle G, f \rangle$ , где  $n$ -арная операция  $f$  действует по правилу (2).

В первом случае теоремы 2 группу  $\langle G, + \rangle$  называют редуктом абелевой  $n$ -арной группы  $\langle G, f \rangle$  и обозначают  $red_c \langle G, f \rangle$ . Любые два редукта одной и той же абелевой  $n$ -арной группы изоморфны. Во втором случае теоремы 2  $n$ -арную группу  $\langle G, f \rangle$  называют  $d$ -производной от абелевой группы  $\langle G, + \rangle$  и обозначают  $der_d \langle G, + \rangle$  (см. [12]). В [12] также приводятся равенства

$$\langle G, f \rangle = der_d red_c \langle G, f \rangle; \quad (3)$$

$$\langle G, + \rangle = red_c der_d \langle G, + \rangle. \quad (4)$$

Имеется критерий изоморфизма абелевых  $n$ -арных групп.

**Теорема 3.** (Следствие 17, [15]).  $n$ -Арные группы  $\langle G, f \rangle = der_d \langle G, + \rangle$  и  $\langle G', f' \rangle = der_{d'} \langle G', + \rangle$  изоморфны тогда и только тогда, когда найдутся изоморфизм  $\sigma$  из группы  $\langle G, + \rangle$  в группу  $\langle G', + \rangle$  и элемент  $u \in G'$  такие, что

$$\sigma(d) = (n-1)u + d'. \quad (5)$$

Используя идеи из работы [15], доказывается

**Теорема 4.** Пусть  $\langle G, f \rangle = der_d \langle G, + \rangle$  — абелева  $n$ -арная группа. Каждое отображение  $\psi: G \rightarrow G$  является эндоморфизмом  $n$ -арной

группы  $\langle G, f \rangle$  тогда и только тогда, когда найдутся эндоморфизм  $\sigma$  группы  $\langle G, + \rangle$  и элемент  $u \in G$  такие, что  $\psi$  действует по правилу  $\psi(x) = \sigma(x) + u$  и выполнено условие

$$\sigma(d) = (n-1)u + d. \quad (6)$$

**Доказательство. Необходимость.** Пусть  $\psi$  — эндоморфизм  $n$ -арной группы  $\langle G, f \rangle$  и  $c$  — нуль в группе  $\langle G, + \rangle$ . Заметим, что, согласно теореме 2 и равенству (4),

$$a + b = f(a, c, \dots, c, \bar{c}, b).$$

Пусть  $u = \psi(c)$ . Определим отображение  $\sigma: G \rightarrow G$  по правилу  $\sigma(x) = \psi(x) - u$ . Покажем, что  $\sigma$  — эндоморфизм группы  $\langle G, + \rangle$ . Для любых  $a, b \in G$ , используя теоремы 1, 2, получим

$$\begin{aligned} \sigma(a + b) &= \psi(f(a, c, \dots, c, \bar{c}, b)) - \psi(c) = \\ &= f(\underbrace{\psi(a), \psi(c), \dots, \psi(c)}_{n-3}, \psi(\bar{c}), \psi(b)) - \psi(c) = \\ &= \psi(a) + \underbrace{\psi(c) + \dots + \psi(c)}_{n-3} + \psi(\bar{c}) + \psi(b) + d - \psi(c) = \\ &= \psi(a) - \psi(c) + \psi(b) - \psi(c) + \underbrace{\psi(c) + \dots + \psi(c)}_{n-2} + \overline{\psi(c)} + d = \\ &= f(\psi(a) - \psi(c) + \psi(b) - \psi(c) + \underbrace{\psi(c) + \dots + \psi(c)}_{n-2}, \overline{\psi(c)}) + d = \sigma(a) + \sigma(b). \end{aligned}$$

Итак,  $\sigma$  — эндоморфизм группы  $\langle G, + \rangle$  и заданный эндоморфизм  $\psi$   $n$ -арной группы  $\langle G, f \rangle$  действует по правилу  $\psi(x) = \sigma(x) + u$ . Покажем выполнимость условия (6), используя (2):

$$\begin{aligned} \sigma(d) &= \psi(f(c, \dots, c)) - u = f(\underbrace{\psi(c), \dots, \psi(c)}_n) - u = \\ &= f(\underbrace{u, \dots, u}_n) - u = \\ &= \underbrace{u + \dots + u}_n + d - u = (n-1)u + d. \end{aligned}$$

Необходимость доказана.

**Достаточность.** Пусть имеются эндоморфизм  $\sigma$  группы  $\langle G, + \rangle$  и элемент  $u \in G$  такие, что выполнено условие (6). Заддим отображение  $\psi$

из  $G$  в  $G$  по правилу: для любого  $x \in G$ ,  $\psi(x) = \sigma(x) + u$ . Покажем, что  $\psi$  является эндоморфизмом  $n$ -арной группы  $\langle G, f \rangle$ . Пусть  $x_1, \dots, x_n \in G$ . Используя (2), (6), получим

$$\begin{aligned} \psi(f(x_1, \dots, x_n)) &= \sigma(f(x_1, \dots, x_n)) + u = \\ &= \sigma(x_1 + \dots + x_n + d) + u = \\ &= \sigma(x_1) + \dots + \sigma(x_n) + \sigma(d) + u = \\ &= \sigma(x_1) + \dots + \sigma(x_n) + (n-1)u + d + u = \\ &= \psi(x_1) + \dots + \psi(x_n) + d = f(\psi(x_1), \dots, \psi(x_n)). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

### Циклические $n$ -арные группы

$n$ -Арным аналогом кратности элемента в группе является  $n$ -арная кратность элемента в  $n$ -арной группе. Результат применения  $k$  раз ( $k > 0$ ) операции  $f$  к  $k(n-1)+1$  одинаковым элементам, которые равны элементу  $a$ , называется положительной  $k$ -той  $n$ -арной кратностью элемента  $a$  и обозначается  $k \cdot_n a$ . Полагают  $0 \cdot_n a = a$ . Отрицательную  $k$ -тую  $n$ -арную кратность элемента  $a$  определяют как решение уравнения  $f(\underbrace{a, \dots, a}_{-k(n-1)}, x) = a$ . Таким

образом, при  $k \geq 0$  верно равенство  $k \cdot_n a = f(\underbrace{a, \dots, a}_{k(n-1)+1})$ , а при  $k < 0$  верно равенство

$$f(\underbrace{a, \dots, a}_{-k(n-1)}, k \cdot_n a) = a. \text{ Отметим основные свойства}$$

$n$ -арной кратности (их можно найти в работах [3], [5], [6]).

**Теорема 5.** В  $n$ -арной группе  $\langle G, f \rangle$  (не обязательно абелевой) для любого элемента  $a$  из  $G$  и любых целых чисел  $k_1, \dots, k_n, k$  верны равенства

- 1)  $f(k_1 \cdot_n a, \dots, k_n \cdot_n a) = (k_1 + \dots + k_n + 1) \cdot_n a$ ;
- 2)  $k_1 \cdot_n (k_2 \cdot_n a) = (k_1 k_2 (n-1) + k_1 + k_2) \cdot_n a$ ;
- 3)  $\bar{a} = (-1) \cdot_n a$ ;
- 4)  $k \cdot_n \bar{a} = (-k(n-2) - 1) \cdot_n a = \overline{k \cdot_n a}$ .

Не сложно показать (см. [3], [5], [6]), что в  $n$ -арной группе  $\langle G, f \rangle$  для фиксированного элемента  $a$  множество  $\langle a \rangle$  всех  $n$ -арных кратностей элемента  $a$  является  $n$ -арной подгруппой, которую называют циклической  $n$ -арной подгруппой.  $n$ -Арная группа  $\langle G, f \rangle$  называется циклической с порождающим элементом  $a$ , если она совпадает с одной из

своих циклических  $n$ -арных подгрупп  $\langle \langle a \rangle, f \rangle$ .

Очевидно, любая циклическая  $n$ -арная группа является абелевой.

Примером бесконечной циклической  $n$ -арной группы служит  $n$ -арная группа

$$\langle Z, f \rangle = \text{der}_1 \langle Z, + \rangle,$$

1-производная от аддитивной группы целых чисел. Операция  $f$  действует по правилу  $f(z_1, \dots, z_n) = z_1 + \dots + z_n + 1$ . Всякое целое число  $k$  является  $k$ -ой  $n$ -арной кратностью числа 0, т.е. 0 служит порождающим элементом бесконечной циклической  $n$ -арной группы  $\langle Z, f \rangle$ .

Примером конечной циклической  $n$ -арной группы порядка  $k$  служит  $n$ -арная группа

$$\langle Z_k, f \rangle = \text{der}_1 \langle Z_k, + \rangle,$$

1-производная от аддитивной группы классов вычетов по модулю  $k$ . Операция  $f$  действует так же, как в предыдущем примере, только складываются числа по модулю  $k$ . Всякое число  $s$  из  $Z_k$  является  $s$ -той  $n$ -арной кратностью числа 0, т.е. 0 служит порождающим элементом конечной циклической  $n$ -арной группы  $\langle Z_k, f \rangle$ .

Следующая теорема показывает, что этими примерами исчерпываются, по существу, все циклические  $n$ -арные группы.

**Теорема 6.** [3], [5]. Любые две циклические  $n$ -арные группы, бесконечные или конечные одного и того же порядка, изоморфны.

Как и в группах, гомоморфный образ циклической  $n$ -арной группы с порождающим элементом  $a$  является циклической  $n$ -арной группой, которая порождается образом элемента  $a$  (проверяется непосредственно).

### Абелевы полуциклические $n$ -арные группы

В теории абелевых групп при построении конечно-порожденных групп основными объектами являются циклические группы. Однако в теории абелевых  $n$ -арных групп такими объектами являются не циклические, а абелевы полуциклические  $n$ -арные группы (см. предложение 5 на стр. 31 в [12]).

Абелеву  $n$ -арную группу называют полуциклической [6], если ее редукт является циклической группой. Очевидно, любая циклическая  $n$ -арная группа является полуциклической. Заметим, что аналогично можно построить циклическую группу на  $n$ -арной группе, не обязательно абелевой (см., например, [16]), такие  $n$ -арные группы также

называют полуциклическими. Нас интересуют только абелевы полуциклические  $n$ -арные группы.

$n$ -Арная группа  $\langle Z, f \rangle = \text{der}_l \langle Z, + \rangle$ ,  $l$ -производная от аддитивной группы целых чисел, является примером бесконечной абелевой полуциклической  $n$ -арной группы. Операция  $f$  действует по правилу:  $f(z_1, \dots, z_n) = z_1 + \dots + z_n + l$ .

**Теорема 7.** [16]. Любая бесконечная абелева полуциклическая  $n$ -арная группа изоморфна  $n$ -арной группе  $\langle Z_k, f \rangle = \text{der}_l \langle Z_k, + \rangle$ , где  $l | \text{НОД}(n-1, k)$ .

Две  $n$ -арные группы  $\langle Z, f_1 \rangle = \text{der}_{l_1} \langle Z, + \rangle$  и  $\langle Z, f_2 \rangle = \text{der}_{l_2} \langle Z, + \rangle$ , где  $l_1 \neq l_2$  и

$0 \leq l_1, l_2 \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ , не изоморфны, а поэтому

количество различных бесконечных абелевых полуциклических  $n$ -арных групп с точностью до изоморфизма равно  $1 + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$  (см. [17]). Будем

говорить, что абелева полуциклическая  $n$ -арная группа имеет тип  $(\infty, l)$ , если она при фиксированном  $l$ , где  $0 \leq l \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ , изоморфна

$n$ -арной группе  $\langle Z, f \rangle = \text{der}_l \langle Z, + \rangle$  по теореме 7. Абелева полуциклическая  $n$ -арная группа типа  $(\infty, l)$  будет циклической.

Примером конечной абелевой полуциклической  $n$ -арной группы порядка  $k$  служит  $n$ -арная группа  $\langle Z_k, f \rangle = \text{der}_l \langle Z_k, + \rangle$ ,  $l$ -производная от аддитивной группы кольца классов вычетов по модулю  $k$ . Операция  $f$  действует так же, как в предыдущем примере, только складываются числа по модулю  $k$ .

**Теорема 8.** [16]. Любая конечная абелева полуциклическая  $n$ -арная группа порядка  $k$  изоморфна  $n$ -арной группе  $\langle Z_k, f \rangle = \text{der}_l \langle Z_k, + \rangle$ , где  $l | \text{НОД}(n-1, k)$ .

$n$ -Арные группы  $\langle Z_k, f_1 \rangle = \text{der}_{l_1} \langle Z_k, + \rangle$  и  $\langle Z_k, f_2 \rangle = \text{der}_{l_2} \langle Z_k, + \rangle$ , где  $l_1 \neq l_2$  и

$l_1, l_2 | \text{НОД}(n-1, k)$ , не изоморфны, а поэтому количество различных конечных абелевых полуциклических  $n$ -арных групп одного и того же порядка  $k$  с точностью до изоморфизма равно количеству натуральных делителей  $\tau(\text{НОД}(n-1, k))$  числа  $\text{НОД}(n-1, k)$  [17]. Будем говорить, что абелева полуциклическая  $n$ -арная

группа имеет тип  $(k, l)$ , если она при фиксированном  $l$ , где  $l | \text{НОД}(n-1, k)$ , изоморфна  $n$ -арной группе  $\langle Z_k, f \rangle = \text{der}_l \langle Z_k, + \rangle$ , по теореме 8. Абелева полуциклическая  $n$ -арная группа типа  $(k, l)$  будет циклической.

### **(n,2)-Кольцо эндоморфизмов абелевой $n$ -арной группы**

В [18] алгебру  $\langle A, f, g \rangle$  с  $n$ -арной операцией  $f$  и  $m$ -арной операцией  $g$  называют  $(n, m)$ -кольцом, если  $\langle A, f \rangle$  является абелевой  $n$ -арной группой,  $\langle A, g \rangle$  является  $m$ -арной полугруппой ( $m$ -арным группоидом с обобщенным законом ассоциативности) и для  $i = 1, \dots, m$  выполнены следующие законы дистрибутивности

$$g(y_1, \dots, y_{i-1}, f(x_1, \dots, x_n), y_{i+1}, \dots, y_m) = f(g(y_1, \dots, y_{i-1}, x, y_{i+1}, \dots, y_m), g(y_1, \dots, y_{i-1}, x, y_{i+1}, \dots, y_m)). \quad (7)$$

В работе [19] доказана

**Теорема 9.** (W.A.Dudek). Множество  $\text{End} \langle A, f_1 \rangle$  всех эндоморфизмов абелевой  $n$ -арной группы  $\langle A, f_1 \rangle$  с  $n$ -арной операцией  $f$ , действующей по правилу

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)(x) = f_1(\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)) \quad (x \in A), \quad (8)$$

и бинарной операцией  $\circ$  – композицией эндоморфизмов, является  $(n, 2)$ -кольцом с единицей.

Очевидно, унарная операция  $h: x \rightarrow \bar{x}$  является эндоморфизмом в абелевой  $n$ -арной группе  $\langle A, f_1 \rangle$ .

**Теорема 10.** Унарная операция  $h: x \rightarrow \bar{x}$  является косым элементом для тождественного отображения  $1_A$  в  $(n, 2)$ -кольце  $\langle \text{End} \langle A, f_1 \rangle, f, \circ \rangle$ , т.е.  $\overline{1_A} = h$ .

**Доказательство.** Пусть  $x \in A$ . Тогда

$$f(\underbrace{1_A, \dots, 1_A}_{n-1}, h)(x) = f_1(\underbrace{1_A(x), \dots, 1_A(x)}_{n-1}, h(x)) = f_1(x, \dots, x, \bar{x}) = x.$$

Значит,  $f(1_A, \dots, 1_A, h) = 1_A$ , т.е.  $\overline{1_A} = h$ . Теорема доказана.

Далее рассмотрим примеры  $(n, 2)$ -колец эндоморфизмов абелевых  $n$ -арных групп.

**Пример 1.** Пусть  $\langle Z, f_1 \rangle$  – бесконечная циклическая  $n$ -арная группа, где  $Z$  – целые

числа,  $f_1(z_1, \dots, z_n) = z_1 + \dots + z_n + 1$ , где  $+$  – сложение целых чисел (см. выше). На  $Z$  определим бинарную операцию  $*$  по правилу  $y * z = y \cdot z \cdot (n-1) + y + z$ , где  $\cdot$  – обычное умножение целых чисел. Ассоциативность операции  $*$  проверяется непосредственно. Кроме того,

$$\begin{aligned} y * f_1(z_1, \dots, z_n) &= y \cdot (z_1 + \dots + z_n + 1) \cdot \\ &\quad \cdot (n-1) + y + z_1 + \dots + z_n + 1 = \\ &= y \cdot z_1 \cdot (n-1) + \dots + y \cdot z_n \cdot (n-1) + \\ &\quad + y \cdot (n-1) + y + z_1 + \dots + z_n + 1 = \\ &= y \cdot z_1 \cdot (n-1) + y + z_1 + \dots + y \cdot z_n \cdot (n-1) + y + z_n + 1 = \\ &= f_1(y * z_1, \dots, y * z_n). \end{aligned}$$

Аналогично  $f_1(z_1, \dots, z_n) * y = f_1(z_1 * y, \dots, z_n * y)$ . Мы получили  $(n, 2)$ -кольцо  $\langle Z, f_1, * \rangle$ , которое назовем  $(n, 2)$ -кольцом целых чисел. Согласно замечанию в конце пункта 3, любой эндоморфизм  $\alpha$  абелевой  $n$ -арной группы  $\langle Z, f_1 \rangle$  вполне определяется числом  $\alpha(0) = b \in Z$ , причем, очевидно, для каждого целого числа  $b$  существует такой эндоморфизм  $\alpha$ , что  $\alpha(0) = b$ . Установим соответствие  $\tau: \alpha \rightarrow b$  между  $End \langle Z, f_1 \rangle$  и  $Z$  такое, что  $\alpha(0) = b$ . Из выше сказанного следует биективность  $\tau$ . Далее, если  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in End \langle Z, f_1 \rangle$  и  $\alpha_i(0) = b_i, i = 1, \dots, n$ , то, согласно (8), получим

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)(0) = f_1(\alpha_1(0), \dots, \alpha_n(0)) = f_1(b_1, \dots, b_n),$$

а значит,  $\tau(f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = f_1(b_1, \dots, b_n) = f_1(\tau(\alpha_1), \dots, \tau(\alpha_n))$ . Кроме того, для любых  $\alpha, \beta \in End \langle Z, f_1 \rangle$  полагаем  $\alpha(0) = b_1, \beta(0) = b_2$ . Тогда для любого целого числа  $z$  получим  $\alpha(z) = \alpha(z \cdot_n 0) = z \cdot_n \alpha(0) = z \cdot_n b_1$ , аналогично  $\beta(z) = z \cdot_n b_2$ . Тогда, используя свойство 2 из теоремы 5, получим

$$\begin{aligned} \alpha \circ \beta(0) &= \alpha(\beta(0)) = \alpha(b_2) = b_2 \cdot_n b_1 = b_2 \cdot_n (b_1 \cdot_n 0) = \\ &= (b_1 \cdot b_2 \cdot (n-1) + b_1 + b_2) \cdot_n 0 = b_1 \cdot b_2 \cdot (n-1) + b_1 + b_2 + b_2. \end{aligned}$$

Значит,  $\tau(\alpha \circ \beta) = b_1 \cdot b_2 \cdot (n-1) + b_1 + b_2 = b_1 * b_2 = \tau(\alpha) + \tau(\beta)$ .

Таким образом,  $\tau$  — изоморфизм из  $(n, 2)$ -кольца эндоморфизмов  $\langle End \langle Z, f_1 \rangle, f, \circ \rangle$  в  $(n, 2)$ -кольцо целых чисел  $\langle Z, f_1, * \rangle$ , т.е.

$$\langle End \langle Z, f_1 \rangle, f, \circ \rangle \cong \langle Z, f_1, * \rangle.$$

**Пример 2.** Пусть  $\langle Z_k, f_k \rangle = der_1 \langle Z_k, + \rangle$  — конечная циклическая  $n$ -арная группа порядка  $k$ , где  $Z_k$  — аддитивная группа кольца классов вычетов по модулю  $k$ . Эта циклическая  $n$ -арная группа порождается нулем, т.е. всякое число  $s$  из  $Z_k$  является  $s$ -той  $n$ -арной кратностью числа 0, т.е.  $s = s \cdot_n 0$ . Кроме того,  $n$ -арная операция  $f_1$  по правилу  $f_1(s_1, \dots, s_n) = s_1 + \dots + s_n + 1$ , где  $+$  — сложение по модулю  $k$  (см. выше).

На  $Z_k$  определим бинарную операцию  $*$  по правилу  $y * z = y \cdot z \cdot (n-1) + y + z$ , где  $\cdot$  — умножение в кольце классов вычетов по модулю  $k$ . Тогда, как и в примере 1, операция  $*$  ассоциативна, кроме того,

$$\begin{aligned} y * f_1(z_1, \dots, z_n) &= f_1(y * z_1, \dots, y * z_n) \text{ и} \\ f_1(z_1, \dots, z_n) * y &= f_1(z_1 * y, \dots, z_n * y). \end{aligned}$$

Мы получили  $(n, 2)$ -кольцо  $\langle Z, f_1, * \rangle$ , которое назовем  $(n, 2)$ -кольцом классов вычетов по модулю  $k$ .

Согласно замечанию в конце пункта 3, любой эндоморфизм  $\alpha$  абелевой  $n$ -арной группы  $\langle Z_k, f_1 \rangle$  вполне определяется числом  $\alpha(0) = s \in Z_k$ , причем, очевидно, для каждого целого числа  $s$  из  $Z_k$  существует такой эндоморфизм  $\alpha$ , что  $\alpha(0) = s$ . Установим соответствие  $\tau: \alpha \rightarrow s$  между  $End \langle Z_k, f_1 \rangle$  и  $Z_k$  такое, что  $\alpha(0) = s$ . Из выше сказанного следует биективность  $\tau$ . Далее, если  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in End \langle Z_k, f_1 \rangle$  и  $\alpha_i(0) = s_i, i = 1, \dots, n$ , то, согласно (6), получим

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)(0) = f_1(\alpha_1(0), \dots, \alpha_n(0)) = f_1(s_1, \dots, s_n),$$

а значит,  $\tau(f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = f_1(s_1, \dots, s_n) = f_1(\tau(\alpha_1), \dots, \tau(\alpha_n))$ .

Далее, для любых  $\alpha, \beta \in End \langle Z_k, f_1 \rangle$  имеем  $\tau(\alpha \circ \beta) = \tau(\alpha) * \tau(\beta)$  (как в примере 1).

Итак,  $\tau$  — изоморфизм между  $(n, 2)$ -кольцом эндоморфизмов  $\langle End \langle Z_k, f_1 \rangle, f, \circ \rangle$  и  $(n, 2)$ -кольцом классов вычетов  $\langle Z_k, f_1, * \rangle$ , т.е.

$$\langle End \langle Z_k, f_1 \rangle, f, \circ \rangle \cong \langle Z_k, f_1, * \rangle.$$

**Пример 3.** На аддитивной группе целых чисел  $Z$  строим абелеву полуциклическую  $n$ -арную группу  $\langle Z, f_1 \rangle = \text{der}_l Z$ , где  $0 \leq l \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$  и  $n$ -арная операция  $f_1$  действует по правилу  $f_1(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n + l$ . Каждый эндоморфизм  $\psi$   $n$ -арной группы  $\langle Z, f_1 \rangle$  определяется (см. теорему 4) некоторыми эндоморфизмом  $\sigma$  аддитивной группы  $Z$  и целым числом  $u$  такими, что

$$\sigma(l) = (n-1)u + l. \quad (9)$$

Причем,  $\psi$  действует по правилу  $\psi(x) = \sigma(x) + u$ . Эндоморфизм  $\sigma$  определяется однозначно образом единицы  $\sigma(1) = m$ . Тогда из (9) имеем

$$lm = (n-1)u + l \text{ или } (n-1)u = l(m-1).$$

Таким образом, эндоморфизм  $\psi$  определяется однозначно некоторым числом  $m$  таким, что  $l(m-1)$  делится на  $n-1$ , и действует по правилу

$$\psi(x) = mx + \frac{l(m-1)}{n-1}.$$

В  $Z$  рассмотрим множество  $M = \{m \in Z \mid l(m-1) \text{ делится на } n-1\}$ . На  $M$  определим  $n$ -арную операцию  $f_2$  по правилу: если  $m_1, \dots, m_n \in M$ , то

$$f_2(m_1, \dots, m_n) = m_1 + \dots + m_n.$$

Множество  $M$  замкнуто относительно действия  $f_2$ . Действительно, число

$$l(m_1 + \dots + m_n - 1) = l(m_1 - 1 + \dots + m_n - 1 + n - 1)$$

делится на  $n-1$ . Если  $m \in M$ , то  $\bar{m}$  удовлетворяет равенству  $(n-1)m + \bar{m} = m$  (определение косога элемента), откуда  $\bar{m} = -(n-2)m$ . Тогда число

$$l(\bar{m} - 1) = l(-(n-2)m - 1) = l(m - 1 - (n-1)m)$$

делится на  $n-1$ . Значит, множество  $M$  замкнуто относительно действия операции  $\bar{\phantom{x}}$ . Выполнимость тождеств (1) для этой операции очевидна. Итак,  $\langle M, f_2 \rangle$  —  $n$ -арная группа (см. введение), очевидно, она будет абелевой. Множество  $M$  замкнуто относительно обычного умножения целых чисел. Действительно, если даны два сравнения  $lm_1 \equiv l \pmod{n-1}$  и  $lm_2 \equiv l \pmod{n-1}$ , то из первого сравнения имеем  $lm_1 m_2 \equiv lm_2 \pmod{n-1}$ , а из второго и последнего

сравнений имеем  $lm_1 m_2 \equiv l \pmod{n-1}$ . Таким образом,  $\langle M, f_2, \cdot \rangle$  —  $(n, 2)$ -кольцо.

Каждому эндоморфизму  $\psi$   $n$ -арной группы  $\langle Z, f_1 \rangle$  ставим в соответствие  $\tau$  целое число  $m$  из  $M$  по правилу:

$$\tau : \psi \rightarrow m \Leftrightarrow \text{для любого } x \in Z,$$

$$\psi(x) = mx + \frac{l(m-1)}{n-1}.$$

Имеем биективность  $\tau$  (согласно теореме 4).

Пусть  $\psi_1, \dots, \psi_n \in \text{End} \langle Z, f_1 \rangle$ , тогда

$$\psi_i(x) = m_i x + \frac{l(m_i - 1)}{n-1}, \quad i = 1, \dots, n. \quad \text{Откуда,}$$

согласно (8), получим

$$\begin{aligned} f(\psi_1, \dots, \psi_n)(x) &= f_1(\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)) = \\ &= m_1 x + \frac{l(m_1 - 1)}{n-1} + \dots + m_n x + \frac{l(m_n - 1)}{n-1} + l = \\ &= (m_1 + \dots + m_n)x + \frac{l(m_1 + \dots + m_n - 1)}{n-1}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\tau(f(\psi_1, \dots, \psi_n)) = m_1 + \dots + m_n = f_2(\tau(\psi_1), \dots, \tau(\psi_n)).$$

Для  $\psi_1, \psi_2 \in \text{End} \langle Z, f_1 \rangle$ , где

$$\psi_i(x) = m_i x + \frac{l(m_i - 1)}{n-1}, \quad i = 1, 2, \text{ имеем}$$

$$\begin{aligned} \psi_1 \circ \psi_2(x) &= \psi_1(\psi_2(x)) = \psi_1\left(m_2 x + \frac{l(m_2 - 1)}{n-1}\right) = \\ &= m_1 \left(m_2 x + \frac{l(m_2 - 1)}{n-1}\right) + \frac{l(m_1 - 1)}{n-1} = m_1 m_2 x + \frac{l(m_1 m_2 - 1)}{n-1}. \end{aligned}$$

Тогда  $\tau(\psi_1 \circ \psi_2) = m_1 \cdot m_2 = \tau(\psi_1) \cdot \tau(\psi_2)$ . Итак, получили изоморфизм  $(n, 2)$ -колец

$$\langle \text{End} \langle Z, f_1 \rangle, f, \circ \rangle \cong \langle M, f_2, \cdot \rangle.$$

Покажем, что абелева  $n$ -арная группа  $\langle M, f_2 \rangle$  является полуциклической типа  $(\infty, \nu)$ , где  $\nu = \text{НОД}(m-1, l)$ . На  $n$ -арной группе  $\langle M, f_2 \rangle$  для выбранного  $1 \in M$  определяем сложение  $\oplus$  (как в теореме 2) по правилу

$$m_1 \oplus m_2 = f_2(m_1, 1, \dots, 1, \bar{1}, m_2).$$

Непосредственная проверка показывает, что  $\bar{1} = -(n-2)$ , тогда, согласно правилу действия операции  $f_2$ , получим

$$m_1 \oplus m_2 = m_1 + (n-3) + (-(n-2)) + m_2 = m_1 + m_2 - 1.$$

Получили абелеву группу  $\langle M, \oplus \rangle$  (согласно теореме 2). Отметим, что 1 является нулем в  $\langle M, \oplus \rangle$ . Непосредственная проверка показывает, что кратность в группе  $\langle M, \oplus \rangle$  определяется по правилу: если  $s \in Z$ ,  $m \in M$ , то

$$s \square m = sm - s + 1.$$

Теперь покажем, что  $\langle M, \oplus \rangle$  является циклической группой с порождающим элементом  $t+1$ , где  $t = \frac{n-1}{v}$ . Действительно,

если  $m$  — любой элемент из  $M$ , то из делимости  $l(m-1)$  на  $n-1$  следует делимость  $m-1$  на  $t$ , пусть  $m-1 = tq$ , откуда  $m = tq + 1 = q(t-1) - q + 1 = q \square (t+1)$ . Итак,

$\langle M, \oplus \rangle$  — циклическая группа с порождающим элементом  $t+1$ . Отметим, что  $n = n-1+1 = vt+1 = v \square (t+1)$  и, кроме того,  $n = f_2(1, \dots, 1)$ . Тогда, согласно теореме 7, абелева

$n$ -арная группа  $\langle M, f_2 \rangle$  является полуциклической типа  $(\infty, v)$ .

На аддитивной группе целых чисел  $Z$  строим еще одну абелеву полуциклическую  $n$ -арную группу  $\langle Z, f_3 \rangle = \text{der}_v Z$ , где  $v = \text{НОД}(n-1, l)$ , причем  $v$ , также как и  $l$ , удовлетворяет условию

$$0 \leq v \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, \text{ и } n\text{-арная операция } f_3 \text{ действует}$$

по правилу  $f_3(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n + v$ . На  $Z$  определим еще бинарную операцию  $*$  по правилу  $z_1 * z_2 = z_1 z_2 t + z_1 + z_2$ , где  $t = \frac{n-1}{v}$ .

Непосредственная проверка показывает ассоциативность операции  $*$ . Если  $z_1, \dots, z_n, z_{n+1} \in Z$ , то

$$\begin{aligned} f_1(z_1, \dots, z_n) * z_{n+1} &= (x_1 + \dots + x_n + v)z_{n+1}t + \\ &+ x_1 + \dots + x_n + v + z_{n+1} = \\ &= x_1 z_{n+1}t + \dots + x_n z_{n+1}t + v z_{n+1}t + x_1 + \dots + x_n + v + z_{n+1} = \\ &= x_1 z_{n+1}t + \dots + x_n z_{n+1}t + \\ &+ (n-1)z_{n+1} + x_1 + \dots + x_n + v + z_{n+1} = \\ &= x_1 z_{n+1}t + x_1 + z_{n+1} + \dots + x_n z_{n+1}t + x_n + z_{n+1} + v = \\ &= f_3(x_1 * z_{n+1}, \dots, x_n * z_{n+1}). \end{aligned}$$

Правая дистрибутивность для операций  $f_3$  и  $*$  доказана. Аналогично доказывается левая

дистрибутивность. Итак,  $\langle Z, f_3, * \rangle$  —  $(n, 2)$ -кольцо. Покажем изоморфизм этого  $(n, 2)$ -кольца и  $\langle M, f_2, \cdot \rangle$ . Каждому целому числу  $z$  ставим в соответствие  $\tau$  число  $z \square (t+1)$ . Так как 1 и  $t+1$  порождают соответственно циклические группы  $Z$  и  $\langle M, \oplus \rangle$ , то  $\tau$  — изоморфизм этих групп. Кроме того,

$$\begin{aligned} \tau(f_3(z_1, \dots, z_n)) &= (z_1 + \dots + z_n + v) \square (t+1) = \\ &= (z_1 + \dots + z_n + v)t + 1 = \\ &= z_1 t + \dots + z_n t + vt + 1 = z_1 t + \dots + z_n t + n = \\ &= f_2(z_1 \square (t+1), \dots, z_n \square (t+1)), \\ \tau(z_1 * z_2) &= (z_1 z_2 t + z_1 + z_2) \square (t+1) = \\ &= (z_1 z_2 t + z_1 + z_2)t + 1 = \\ &= z_1 z_2 t^2 + z_1 t + z_2 t + 1 = (z_1 t + 1)(z_2 t + 1) = \\ &= \tau(z_1) \cdot \tau(z_2). \end{aligned}$$

Итак,  $\langle Z, f_3, * \rangle \cong \langle M, f_2, \cdot \rangle$ . Тогда  $\langle \text{End} \langle Z, f_1 \rangle, f, \circ \rangle \cong \langle Z, f_3, * \rangle$ .

Заметим, что если  $l=1$ , то  $v=1$  и операция  $f_3$  совпадает с  $f_1$ . Это показывает согласованность полученных результатов примера 1 и примера 3 для  $l=1$ .

**Пример 4.** На аддитивной группе кольца классов вычетов  $Z_k$  строим абелеву полуциклическую  $n$ -арную группу  $\langle Z_k, f_1 \rangle = \text{der}_l Z_k$ , где  $0 \leq l < k$  и  $l | \text{НОД}(n-1, k)$ . Согласно правилу (2),  $n$ -арная операция  $f_1$  действует по правилу  $f_1(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n + l$ , где  $+$  — сложение по модулю  $k$ . Каждый эндо-морфизм  $\psi$   $n$ -арной группы  $\langle Z_k, f_1 \rangle$  определяется (см. теорему 4) некоторыми эндоморфизмом  $\varphi$  и элементом  $u$  группы  $\langle Z_k, + \rangle$  такими, что

$$\varphi(l) \equiv (n-1)u + l \pmod{k}, \quad (10)$$

причем  $\psi$  действует по правилу

$$\psi(x) = \varphi(x) + u. \quad (11)$$

Эндоморфизм  $\varphi$  задается однозначно образом  $\varphi(l) = m$  единицы группы  $\langle Z_k, + \rangle$ . Тогда из (10) имеем  $lm \equiv (n-1)u + l \pmod{k}$  или  $(n-1)u \equiv l(m-1) \pmod{k}$ . Таким образом, элемент  $u$  является решением сравнения

$$(n-1)x \equiv l(m-1) \pmod{k}. \quad (12)$$

Это решение существует тогда и только тогда, когда  $l(m-1)$  делится на  $\text{НОД}(n-1, k)$  или, что тоже самое,  $lm \equiv l \pmod{\text{НОД}(n-1, k)}$ . Но  $l$  делит  $\text{НОД}(n-1, k)$ , значит, из последнего сравнения имеем  $m \equiv 1 \pmod{d_1}$ , где  $\text{НОД}(n-1, k) = d_1 l$ .

Таким образом, если образ единицы  $\varphi(1) = m$  эндоморфизма  $\varphi$  группы  $\langle Z_k, + \rangle$  сравним с единицей по модулю  $d_1$ , то этот эндоморфизм вместе с каждым решением  $u$  сравнения (12) (таких решений  $\text{НОД}(n-1, k)$ ) определяет эндоморфизм  $\psi$   $n$ -арной группы  $\langle Z_k, f_1 \rangle$  по правилу (11).

В декартовом квадрате  $Z_k \times Z_k$  выделим подмножество

$$P = \{(m, u) \mid m \equiv 1 \pmod{d_1} \text{ и } (n-1)u \equiv l(m-1) \pmod{k}\}.$$

На  $P$  определим  $n$ -арную операцию  $f_2$  по правилу

$$f_2((m_1, u_1), \dots, (m_n, u_n)) = (m_1 + \dots + m_n, u_1 + \dots + u_n + l)$$

где  $+$  — сложение по модулю  $k$ . Непосредственная проверка показывает, что  $\langle P, f_2 \rangle$  — абелева  $n$ -арная группа.

На  $P$  определим еще одну бинарную операцию  $\square$  по правилу

$$(m_1, u_1) \square (m_2, u_2) = (m_1 \cdot m_2, m_1 \cdot m_2 + u),$$

где  $(n-1)u_i \equiv l(m_i - 1) \pmod{k}$  для  $m_i \equiv 1 \pmod{d_1}$ ,  $i = 1, 2$  и операции  $\cdot$ ,  $+$  выполнены в кольце классов вычетов  $Z_k$ . Непосредственная проверка показывает, что  $\langle P, f_2, \Omega \rangle$  —  $(n, 2)$ -кольцо. Так же проверяется непосредственно изоморфизм  $(n, 2)$ -колец

$$\langle \text{End} \langle Z_k, f_1 \rangle, f, \circ \rangle \cong \langle P, f_2, \Omega \rangle.$$

Покажем теперь, что в построенном нами  $(n, 2)$ -кольце  $\langle P, f_2, \Omega \rangle$  абелева  $n$ -арная группа  $\langle P, f_2 \rangle$  изоморфна прямому произведению  $n$ -арных групп  $\langle Z_k, f_1 \rangle$  и  $\langle Z_k, f_3 \rangle$ , где операция  $f_3$  действует по правилу:  $f_3(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$ .

Зададим отображение  $\tau: P \rightarrow Z_k \times Z_l$  по правилу  $\tau((m, u)) = (u, v)$ , где  $v$  — остаток от деления  $\frac{l(m-1) - u(n-1)}{k}$  на  $l$ .

Покажем сюръективность  $\tau$ . Пусть  $(u, v) \in Z_k \times Z_l$ . Находим  $m$  из  $Z_k$  такое, что верно сравнение  $(n-1)u \equiv l(m-1) \pmod{k}$  (таких

$m$  может быть несколько), и после этого требуем выполнимость сравнения

$$\frac{l(m-1) - u(n-1)}{k} \equiv v \pmod{l}. \quad \text{Сравнение}$$

$lx \equiv (n-1)u \pmod{k}$  с неизвестным  $x$  разрешимо и имеет  $l$  решений (т.к.  $l \mid \text{НОД}(n-1, k)$ , а значит,  $\text{НОД}(l, k) = l \mid u(n-1)$ ).

Укажем эти решения:  $x_i \equiv \frac{(n-1)u}{l} + j \frac{k}{l} \pmod{k}$ ,

где  $j = 0, 1, \dots, l-1$ . Выбираем

$$m-1 \equiv \frac{(n-1)u}{l} + v \frac{k}{l} \pmod{k} \text{ и } m \in Z_k. \text{ Обе части}$$

последнего сравнения и модуль умножаем на  $l$ , получим  $l(m-1) \equiv (n-1)u + vk \pmod{kl}$  или

$$l(m-1) - (n-1)u \equiv vk \pmod{kl}. \text{ Обе части}$$

последнего сравнения и модуль делим на  $k$ , получим  $\frac{l(m-1) - (n-1)u}{k} \equiv v \pmod{l}$ . Итак,

сюръективность  $\tau$  доказана.

Покажем инъективность  $\tau$ . Пусть  $\tau((m_1, u_1)) = \tau((m_2, u_2))$ , т.е.

$$(u_1, v_1) = (u_2, v_2), \quad (13)$$

где  $\frac{l(m_1-1) - (n-1)u_1}{k} = q_1 l + v_1$  и

$$\frac{l(m_2-1) - (n-1)u_2}{k} = q_2 l + v_2 \text{ для некоторых}$$

целых чисел  $q_1, q_2$  и  $0 \leq v_1, v_2 \leq l-1$ . Из (13) имеем  $u_1 = u_2$  и  $v_1 = v_2$ . Тогда

$$\frac{l(m_1-1) - l(m_2-1)}{k} = (q_1 - q_2)l \text{ или}$$

$m_1 - m_2 = k(q_1 - q_2)$ , откуда  $m_1 \equiv m_2 \pmod{k}$ . Но  $0 \leq m_1, m_2 \leq k-1$ , значит,  $m_1 = m_2$ .

Инъективность  $\tau$  доказана.

Итак,  $\tau$  — биекция. Покажем сохранение  $n$ -арной операции при действии  $\tau$ . Пусть  $(m_i, u_i) \in P$  и  $\tau((m_i, u_i)) = (u_i, v_i)$ , где

$$\frac{l(m_i-1) - (n-1)u_i}{k} \equiv v_i \pmod{l}, \quad 0 \leq v_i \leq l-1 \text{ для}$$

$i = 1, \dots, n$ . Тогда

$$\begin{aligned} \tau(f_2((m_1, u_1), \dots, (m_n, u_n))) &= \\ = \tau((m_1 + \dots + m_n, u_1 + \dots + u_n + l)) &= \\ = (u_1 + \dots + u_n + l, v) \end{aligned}$$

где

$$\frac{l(m_1 + \dots + m_n - 1) - (n-1)(u_1 + \dots + u_n + l)}{k} \equiv v \pmod{l},$$

$$(f_1(u_1, \dots, u_n), f_3(v_1, \dots, v_n)) = (u_1 + \dots + u_n + l, v_1 + \dots + v_n).$$



Кроме того,

$$v_1 + \dots + v_n \equiv \frac{l(m_1 - 1) - (n - 1)u_1}{k} + \dots + \frac{l(m_n - 1) - (n - 1)u_n}{k} \pmod{l}$$

или

$$v_1 + \dots + v_n \equiv \frac{l(m_1 + \dots + m_n - n) - (n - 1)(u_1 + \dots + u_n)}{k} \pmod{l}.$$

Тогда  $v_1 + \dots + v_n \equiv v \pmod{l}$ , значит,  $\tau$   $n$ -арную операцию. Итак, имеем изоморфизм  $n$ -арных групп:  $\langle P, f_2 \rangle \cong \langle Z_k, f_1 \rangle \times \langle Z_l, f_3 \rangle$ .

На  $n$ -арной группе  $\langle Z_k, f_1 \rangle \times \langle Z_l, f_3 \rangle$  построим  $(n, 2)$ -кольцо, введя на множестве  $Z_k \times Z_l$  бинарную операцию  $\bullet$  по правилу: если  $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in Z_k \times Z_l$ , то, как при доказательстве сюръективности  $\tau$  (см. выше), имеем  $m_1, m_2 \in Z_k \times Z_l$ , для которых

$$\tau((m_1, u_1)) = (u_1, v_1), \quad \tau((m_2, u_2)) = (u_2, v_2)$$

и верны сравнения

$$m_1 - 1 \equiv \frac{n-1}{l}u_1 + v_1 \frac{k}{l} \pmod{k} \text{ и} \\ m_2 - 1 \equiv \frac{n-1}{l}u_2 + v_2 \frac{k}{l} \pmod{k}, \quad (14)$$

тогда полагаем

$$(u_1, v_1) \bullet (u_2, v_2) = (u_3, v_3),$$

где  $u_3 \equiv u_2 m_1 + u_1 \pmod{k}$ ,  $v_3 \equiv v_2 m_1 + v_1 \pmod{l}$ ,  $0 \leq u_3 \leq k - 1$ ,  $0 \leq v_3 \leq l - 1$ . Кроме того, имеем  $m_3 \in Z_k$  такое, что  $\tau((m_3, u_3)) = (u_3, v_3)$  и  $m_3 - 1 \equiv \frac{n-1}{l}u_3 + v_3 \frac{k}{l} \pmod{k}$ . Заметим, что если второе сравнение из (14) умножить на  $m_1$  и сложить с первым сравнением из (14), то получим

$$m_1 m_2 - 1 \equiv \frac{n-1}{l}(u_2 m_1 + u_1) + (v_2 m_1 + v_1) \frac{k}{l} \pmod{k} \text{ и}$$

$$\tau((m_1, u_1) \Omega(m_2, u_2)) = \tau((m_1, u_1)) \bullet \tau((m_2, u_2)). \quad (15)$$

Тогда с помощью (15) доказываются ассоциативность  $\bullet$  и оба закона дистрибутивности операции  $\bullet$  относительно операции из  $n$ -арной группы  $\langle Z_k, f_1 \rangle \times \langle Z_l, f_3 \rangle$ . Значит,  $\langle \langle Z_k, f_1 \rangle \times \langle Z_l, f_3 \rangle, \bullet \rangle$  —  $(n, 2)$ -кольцо, а  $\tau$  — изоморфизм из  $(n, 2)$ -кольца  $\langle P, f_2, \Omega \rangle$  в это  $(n, 2)$ -кольцо. Тогда имеем изоморфизм  $(n, 2)$ -колец

$$\langle \text{End} \langle Z_k, f_1 \rangle, f, \circ \rangle \cong \langle \langle Z_k, f_1 \rangle \times \langle Z_l, f_3 \rangle, \bullet \rangle.$$

Заметим, что если  $l = 1$ , то  $n$ -арная группа  $\langle Z_l, f_3 \rangle$  будет одноэлементной, тогда  $\langle Z_k, f_1 \rangle \times \langle Z_l, f_3 \rangle \cong \langle Z_k, f_1 \rangle$ , а операция  $\bullet$   $Z_k \times Z_l$  соответствует при этом изоморфизме операции  $*$  на  $Z_k$  из примера 2. Это показывает согласованность полученных результатов примера 2 и примера 4 для  $l = 1$ .

### Теоремы об изоморфизмах для абелевых полуциклических $n$ -арных групп

Как и в группах, у изоморфных абелевых  $n$ -арных групп  $(n, 2)$ -кольца эндоморфизмов изоморфны, более того, верна

**Теорема 11.** *Изоморфизм  $\varphi$  абелевых  $n$ -арных групп  $\langle A, f_1 \rangle$  и  $\langle B, f_2 \rangle$  индуцирует изоморфизм  $\tau$   $(n, 2)$ -колец эндоморфизмов  $\langle \text{End} \langle A, f_1 \rangle, f, \circ \rangle$  и  $\langle \text{End} \langle B, f_2 \rangle, f, \circ \rangle$ , который определяется по формуле  $\tau: \alpha \rightarrow \varphi^{-1} \circ \alpha \circ \varphi$ .*

**Доказательство.** Проверяется непосредственно. Обратное утверждение неверно, т.е. из изоморфизма  $(n, 2)$ -колец эндоморфизмов абелевых  $n$ -арных групп в общем случае не следует изоморфизм  $n$ -арных групп. Однако для конечных абелевых полуциклических  $n$ -арных групп это верно (см. ниже теорему 13). В следующей теореме найдены условия изоморфизма  $(n, 2)$ -колец эндоморфизмов для бесконечных абелевых полуциклических  $n$ -арных групп, т.е. верна

**Теорема 12.** *Две бесконечные абелевы полуциклические  $n$ -арные группы типов  $(\infty, l_1)$  и  $(\infty, l_2)$ , где  $0 \leq l_1, l_2 \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ , имеют изоморфные  $(n, 2)$ -кольца эндоморфизмов тогда и только тогда, когда  $\text{НОД}(n-1, l_1) = \text{НОД}(n-1, l_2)$ .*

**Доказательство.** Абелева полуциклическая  $n$ -арная группа типа  $(\infty, l_1)$  изоморфна  $n$ -арной группе  $\langle Z, f_1 \rangle = \text{der}_{l_1} Z$ , построенной на аддитивной группе целых чисел  $Z$  (см. теорему 7). Согласно теореме 11  $(n, 2)$ -кольца эндоморфизмов этих  $n$ -арных групп изоморфны и, согласно примеру 3, изоморфны  $(n, 2)$ -кольцу  $\langle Z, f_3, * \rangle$ , где  $n$ -арная операция  $f_3$  действует по правилу  $f_3(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n + d_1$ , где  $d_1 = \text{НОД}(n-1, l_1)$ , причем  $d_1$ , также как и  $l_1$ ,

удовлетворяет условию  $0 \leq d_1 \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ , и

бинарная операция  $*$  действует по правилу  $z_1 * z_2 = z_1 z_2 t_1 + z_1 + z_2$ , где  $t_1 = \frac{n-1}{d_1}$ .

Аналогично вторая абелева полуциклическая  $n$ -арная группа типа  $(\infty, l_2)$  изоморфна  $n$ -арной группе  $\langle Z, f_1' \rangle = \text{der}_{l_2} Z$ , построенной на аддитивной группе целых чисел  $Z$ , и их  $(n, 2)$ -кольца эндоморфизмов изоморфны  $(n, 2)$ -кольцу  $\langle Z, f_3', *' \rangle$ , где  $n$ -арная операция  $f_3'$  действует по правилу  $f_3'(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n + d_2$ , где

$d_2 = \text{НОД}(n-1, l_2)$ , причем  $0 \leq d_2 \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ , и

бинарная операция  $*'$  действует по правилу  $z_1 *' z_2 = z_1 z_2 t_2 + z_1 + z_2$ , где  $t_2 = \frac{n-1}{d_2}$ .

Если имеем изоморфизм  $(n, 2)$ -колец  $\langle Z, f_3, * \rangle$  и  $\langle Z, f_3', *' \rangle$ , то их абелевы  $n$ -арные группы также изоморфны, т.е.  $\langle Z, f_3 \rangle \cong \langle Z, f_3' \rangle$ , откуда, в силу их полуциклическости и согласно теореме 7, получим  $d_1 = d_2$ .

Обратно, если  $d_1 = d_2$ , то действия операций  $f_3$  и  $f_3'$  совпадают, кроме того, совпадают и действия операций  $*$  и  $*'$ , так как  $t_1 = t_2$ . Тогда имеем равенство  $(n, 2)$ -колец  $\langle Z, f_3, * \rangle$  и  $\langle Z, f_3', *' \rangle$ , а значит, две бесконечные абелевы полуциклические  $n$ -арные группы типов  $(\infty, l_1)$  и  $(\infty, l_2)$  имеют изоморфные  $(n, 2)$ -кольца эндоморфизмов. Теорема доказана.

**Следствие 1.** Бесконечная циклическая  $n$ -арная группа имеет  $(n, 2)$ -кольцо эндоморфизмов, изоморфное  $(n, 2)$ -кольцу эндоморфизмов абелевой полуциклической  $n$ -арной группы типа

$(\infty, l)$ , где  $0 \leq l \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ , тогда и только тогда,

когда  $l$  и  $n-1$  взаимно просты.

**Теорема 13.** Две конечные абелевы полуциклические  $n$ -арные группы, имеющие изоморфные  $(n, 2)$ -кольца эндоморфизмов, изоморфны.

**Доказательство.** Любая конечная абелева полуциклическая  $n$ -арная группа порядка  $k$  изоморфна  $n$ -арной группе  $\langle Z_k, f_1 \rangle = \text{der}_{l_1} Z_k$ , построенной на аддитивной группе кольца классов вычетов  $Z_k$ , где  $l_1 | \text{НОД}(n-1, k)$  (см. теорему 8).

Пусть заданные две конечные абелевы полуциклические  $n$ -арные группы изоморфны  $n$ -

арным группам  $\langle Z_{k_1}, f_1 \rangle = \text{der}_{l_1} Z_{k_1}$  и

$\langle Z_{k_2}, f_1' \rangle = \text{der}_{l_2} Z_{k_2}$  соответственно, где

$l_1 | \text{НОД}(n-1, k_1)$ ,  $l_2 | \text{НОД}(n-1, k_2)$ . Согласно

теореме 11,  $n$ -арные группы  $\langle Z_{k_1}, f_1 \rangle$  и  $\langle Z_{k_2}, f_1' \rangle$  имеют изоморфные  $(n, 2)$ -кольца эндоморфизмов, т.е.

$$\langle \text{End} \langle Z_{k_1}, f_1 \rangle, f, \circ \rangle \cong \langle \text{End} \langle Z_{k_2}, f_1' \rangle, f, \circ \rangle.$$

Тогда, согласно примеру 4, имеем изоморфизм  $\langle Z_{k_1}, f_1 \rangle \times \langle Z_{l_1}, f_3 \rangle \cong \langle Z_{k_2}, f_1' \rangle \times \langle Z_{l_2}, f_3' \rangle$ .

У  $n$ -арной группы  $\langle Z_{k_1}, f_1 \rangle \times \langle Z_{l_1}, f_3 \rangle$  редутом будет прямая сумма  $Z_{k_1} + Z_{l_1}$  (проверяется непосредственно по теореме 2 для  $c = (0, 0)$ , тогда, по равенству (3), имеем  $\langle Z_{k_1}, f_1 \rangle \times \langle Z_{l_1}, f_3 \rangle = \text{der}_{l_1}(Z_{k_1} + Z_{l_1})$ . Аналогично  $\langle Z_{k_2}, f_1' \rangle \times \langle Z_{l_2}, f_3' \rangle = \text{der}_{l_2}(Z_{k_2} + Z_{l_2})$ . По теореме 3 имеем изоморфизм конечных абелевых групп

$$Z_{k_1} + Z_{l_1} \cong Z_{k_2} + Z_{l_2}.$$

Согласно условию,  $l_1 | k_1$  и  $l_2 | k_2$ , тогда, в силу однозначной разложимости конечной абелевой группы в прямую сумму примарных циклических групп, получим  $Z_{k_1} \cong Z_{k_2}$  и  $Z_{l_1} \cong Z_{l_2}$ , т.е.  $k_1 = k_2$  и  $l_1 = l_2$ . Откуда следует изоморфизм  $n$ -арных групп  $\langle Z_{k_1}, f_1 \rangle$  и  $\langle Z_{k_2}, f_1' \rangle$ .

Значит, рассматриваемые в теореме конечные абелевы полуциклические  $n$ -арные группы изоморфны. Теорема доказана.

**Следствие 2.** Две конечные циклические  $n$ -арные группы, имеющие изоморфные  $(n, 2)$ -кольца эндоморфизмов, изоморфны.

## Литература

1. Курош А.Г. Общая алгебра. Лекции 1969-1970 уч. года. М. Наука. 1974.
2. Dornste W. Untersuchungen uber ainen verallgemeinerten Gruppenbegrief. Math. Z. 29. 1928 P. 1-19.
3. E. L. Post Poluadic groups. Trans. Amer. Math. Soc. vol. 48. 1940. P. 208-350.
4. Сушкевич А.К. Теория обобщенных групп. Харьков - Киев. Хозтехиздат. 1937.
5. Русаков С.А. Алгебраические  $n$ -арные системы. Минск. Навука і техника. 1992.
6. Гальмак А.М.  $n$ -Арные группы. Часть 1. Гомель. Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины. 2003.

7. Гальмак А.М.  $n$ -Арные группы. Часть 2. Минск. Издательский центр БГУ. 2007.
8. W. Dudek, K. Glazek, B. Gleichgewicht. A note on the axioms of  $n$ -groups. Coll. Math. Soc. J. Bolyai. vol. 29. 1977. P. 195–202.
9. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т 1. М. Мир. 1974.
10. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т 2. М. Мир. 1977.
11. Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М. ФАКТОРИАЛ ПРЕСС. 2006.
12. J. Timm. Kommutative  $n$ -Gruppen. Hamburg. Diss. 1967.
13. Глускин Л. М. Позиционные оперативы. Мат. сборник. vol 68(110), с3. 1965. P. 444–472.
14. M. Hosszu. On the explicit form of  $n$ -group operations. Publ.Math. vol. 10. с1-4. 1963. P. 88–92.
15. W. A. Dudek, J. Michalski. On retracts of polyadic groups. Demonstratio Math. vol. 17. 1984 P. 281–301.
16. Щучкин Н.А. Полуциклические  $n$ -арные группы. Известия ГГУ им. Ф. Скорины. 3 (54). 2009. С. 186–194.
17. K. Glazek, J. Michalski, I. Sierocki A. On evaluation of some polyadic groups. Variag Holder-Pichier-Tempsky. 1985. P. 159–171.
18. G. Crombez. On  $(n,m)$ -rings. Abh. Math, Sem.Univ. Hamburg. vol. 37. 1972. P. 180–199.
19. K. Glazek, B. Gleichgewicht. Abelian  $n$ -groups. Proc. Congr. Math. Soc. J.Bolyai Esztergom (Hungary). vol. 29. 1977. P. 321–329.

**Кусов В. М., Щучкин Н. А. Эндоморфизмы абелевых полуциклических  $n$ -арных групп. Приведено полное описание строения  $(n,2)$ -колец эндоморфизмов конечных и бесконечных абелевых полуциклических  $n$ -арных групп. Доказан  $n$ -арный аналог теоремы Бера–Капланского для конечных абелевых полуциклических  $n$ -арных групп. Найдены условия изоморфизма  $(n,2)$ -колец эндоморфизмов для бесконечных абелевых полуциклических  $n$ -арных групп.**

**Ключевые слова:** абелева  $n$ -арная группа, эндоморфизм, полуциклическая  $n$ -арная группа,  $(n,2)$ -кольцо.

**Kusov V. M., Shchuchkin N. A. Endomorphisms of abelian semicyclic  $n$ -ary groups. A complete description of the structure of endomorphism  $(n,2)$ -rings of finite and infinite Abelian semicyclic  $n$ -groups is given. An analogue of the Beer-Kaplansky theorem for finite Abelian semicyclic  $n$ -groups is proved. Conditions for the isomorphism of endomorphism  $(n,2)$ -rings for infinite abelian semicyclic  $n$ -ary groups are found.**

**Keywords:** abelian  $n$ -ar group, endomorphism, semicyclic  $n$ -ar group,  $(n,2)$ -ring.

Статья поступила в редакцию 22.02.2018  
Рекомендована к публикации д-ром физ.-мат. наук А.С. Миненко

## Продольная схема метода прямых для численной аппроксимации краевых задач с негладкими данными для дифференциального уравнения второго порядка параболического типа

И.И. Маглеванный, Т.И. Карякина

Волгоградский государственный социально-педагогический университет

### Введение

К параболическим уравнениям приводит математическое описание многих сложных явлений в современном естествознании, экономике и технике. Кроме классических задач теплопроводности и диффузии, параболические уравнения встречаются, например, в теории тепло- и массопереноса при описании процессов сушки и охлаждения, в теории ядерных цепных реакций при изучении процесса замедления нейтронов, в теории сигналов при макроскопическом описании случайного процесса на выходе радиотехнического устройства, при изучении многих процессов в химической и биологической кинетике и в других задачах. Общая классическая постановка смешанной начально-краевой задачи для уравнения указанного типа имеет следующий вид. Пусть в полосе  $x \in [a, b]$ ,  $t \in [t_0, t_1]$  поставлена граничная задача для неизвестной функции  $u = u(x, t)$

$$K(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ A(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + B(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - G(x, t)u + F(x, t),$$

$$x \in [a, b] \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(x, t)|_{t=t_0} = u_0(x), \quad x \in [a, b]. \quad (2)$$

В граничных точках задаются либо линейные краевые условия третьего рода

$$C^-(t)u(a, t) - D^-(t) \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = E^-(t),$$

$$C^+(t)u(b, t) - D^+(t) \frac{\partial u}{\partial x}(b, t) = E^+(t), \quad (3)$$

либо краевые условия первого рода

$$C^-(t)u(a, t) = E^-(t),$$

$$C^+(t)u(b, t) = E^+(t), \quad (4)$$

либо какое-то из этих условий на каждой границе. При определенных предположениях об условиях гладкости функциональных коэффициентов задача (1) – (3) имеет

единственное классическое решение  $u(x, t) \in C^2([a, b] \times [t_0, +\infty))$  [1,2].

Стандартным подходом к численному решению задачи (1) – (3) является конечно-разностная дискретизация по пространственной переменной  $x$  и по временной переменной  $t$ , что реализуется обычно в виде чисто неявной схемы или схемы Кранка-Николсона [3,4,5].

Однако число классический подход к аппроксимации решения во многих случаях оказывается неадекватным. Так, при оценке производных финансовых инструментов в математической теории опционов одной из моделей является модель Блэка-Шоулза-Мертонна [6,7], представляющая собой параболическое уравнение в частных производных относительно стоимости опциона. Для некоторых типов опционов начальные данные являются разрывными по переменной  $x$ . Во многих случаях флуктуационная модель пространственно – однородной системы описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ланжевена [8], которое математически эквивалентно уравнению Фоккера – Планка для эволюции плотности вероятности перехода из начального состояния в текущее [9]. Уравнение Фоккера–Планка формально является частным случаем уравнения (1) – (3), однако в общей постановке источник является сингулярным:  $f(x, t) \sim \delta(x - x_0)$ .

Некоторые задачи электронного транспорта в многослойных мишенях могут быть сведены к уравнению (1) с мгновенным сингулярным источником  $f(x, t) \sim \delta(t)\delta(x - x_0)$ , при этом функциональные коэффициенты  $K(x, t)$ ,  $A(x, t)$ ,  $G(x, t)$  претерпевают разрыв на границах слоев [15]. Приведенные примеры свидетельствуют о том, что, если коэффициенты задачи не удовлетворяют необходимым условиям гладкости, то задачу и ее решение следует трактовать в обобщенном смысле, считая коэффициенты и решение элементами обобщенных функциональных классов с соответствующим обобщенным толкованием производных.

**Обобщенная постановка задачи**

При разработке алгоритма аппроксимации решения мы используем идеи усреднения, рассмотренные в [11]. Умножим уравнение (1) на произвольную (пробную) весовую функцию  $\varphi(x)$  и проинтегрируем по промежутку  $[a, b]$ . Используя формулу интегрирования по частям, получим интегральное тождество, эквивалентное исходному уравнению (1)

$$\int_a^b \varphi(x) \left[ K(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx = \int_a^b \varphi(x) \left[ F(x, t) - G(x, t)u + B(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx - \int_a^b A(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \varphi(x) A(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a}^{x=b}. \quad (5)$$

Тождество (5) имеет смысл и тогда, когда функциональные коэффициенты уравнения (1) являются только кусочно-непрерывными функциями, что позволяет сформулировать обобщенную постановку исходной задачи. Обобщенным решением задачи (1) – (2) будем называть функцию  $u(x, t)$ , удовлетворяющую интегральному тождеству (5) для всех  $\varphi(x)$ , а краевые и начальные условия выполняются почти всюду.

**Пространственная дискретизация обобщенной задачи Коши**

Введем в области  $x \in [a, b]$  (неравномерную) пространственную сетку

$$a = x_0 < x_1 \dots < x_n = b. \quad (6)$$

Для каждого  $x_i$  определим частичные промежутки

$$\Delta_i^- = [x_{i-1}, x_i], \quad \Delta_i^+ = [x_i, x_{i+1}], \quad \Delta_0^- = 0, \quad \Delta_n^+ = 0 \quad (7)$$

и шаги сетки по переменной  $x$

$$h_i^- = x_i - x_{i-1}, \quad h_{i0}^- = 0, \quad h_i^+ = x_{i+1} - x_i, \quad h_n^+ = 0, \quad \bar{h}_i = \frac{1}{2}[h_i^- + h_i^+], \quad i = 1, \dots, n. \quad (8)$$

По определению  $\Delta_i^- = \Delta_i^+$ ,  $h_i^- = h_{i-1}^+$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

В окрестности узлов  $x_i$  определим функции

$$\varphi_i^-(x) = \frac{2}{(h_i^-)^2} (x - x_{i-1}) \chi(\Delta_i^-), \quad \varphi_i^+(x) = \frac{2}{(h_i^+)^2} (x_{i+1} - x) \chi(\Delta_i^+), \quad (9)$$

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{2\bar{h}_i} (h_i^- \varphi_i^-(x) + h_i^+ \varphi_i^+(x)). \quad (10)$$

Здесь  $\chi(A)$  – характеристическая функция множества  $A$

$$\chi(A) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \quad (11)$$

Функции (9), (10) являются непрерывными функциями аргумента  $x$  с компактным носителем в  $R$  и имеют кусочно-гладкие производные первого порядка. Кроме того, эти функции нормированы на 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i^\pm(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(x) dx = 1.$$

Определим усредняющие интегральные операторы Стеклова. Пусть  $F(x, t)$  – произвольная кусочно-непрерывная функция. Тогда по определению

$$\hat{T}_i^- \{F(x, t)\} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} F(x, t) \varphi_i^-(x) dx = \frac{2}{(h_i^-)^2} \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) F(x, t) dx, \quad \hat{T}_0^- \{F(x, t)\} = 0, \quad (13)$$

$$\hat{T}_i^+ \{F(x, t)\} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} F(x, t) \varphi_i^+(x) dx = \frac{2}{(h_i^+)^2} \cdot \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x) F(x, t) dx, \quad \hat{T}_n^+ \{F(x, t)\} = 0, \quad (14)$$

$$\hat{T}_i \{F(x, t)\} = \frac{1}{2\bar{h}_i} \left( h_i^- \hat{T}_i^- \{F(x, t)\} + h_i^+ \hat{T}_i^+ \{F(x, t)\} \right), \quad (15)$$

$$\hat{S}_i^- \{F(x, t)\} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} F(x, t) \frac{\partial \varphi_i^-(x)}{\partial x} dx = \frac{2}{(h_i^-)^2} \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} F(x, t) dx, \quad \hat{S}_0^- \{F(x, t)\} = 0, \quad (16)$$

$$\hat{S}_i^+ \{F(x, t)\} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} F(x, t) \frac{\partial \varphi_i^+(x)}{\partial x} dx = -\frac{2}{(h_i^+)^2} \cdot \int_{x_i}^{x_{i+1}} F(x, t) dx, \quad \hat{S}_n^+ \{F(x, t)\} = 0, \quad (17)$$

$$\hat{S}_i \{F(x,t)\} = \frac{1}{2h_i} \left( h_i^- \hat{S}_i^- \{F(x,t)\} + h_i^+ \hat{S}_i^+ \{F(x,t)\} \right) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_i^- \{F(x,t)\} &= \hat{T}_i^- \{(x-x_i)F(x,t)\} = \\ &= \frac{2}{(h_i^-)^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-x_i)(x-x_{i-1})F(x,t)dx, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_i^+ \{F(x,t)\} &= \hat{T}_i^+ \{(x-x_i)F(x,t)\} = \\ &= \frac{2}{(h_i^+)^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x-x_i)(x_{i+1}-x)F(x,t)dx, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\hat{Q}\{F(x,t)\} = \frac{1}{2h_i} \left( h_i^- \hat{Q}_i^- \{F(x,t)\} + h_i^+ \hat{Q}_i^+ \{F(x,t)\} \right) \quad (21)$$

Все эти операторы линейны. Т.к. носители их интегральных ядер локализованы в элементарной окрестности узла  $i$ , т.е. в множестве  $x \in [x_i - h_i^-, x_i + h_i^+]$ , то каждый оператор можно трактовать как оператор усреднения функции  $F(x,t)$  по элементарной окрестности с соответствующим ядром усреднения [11]. Нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} \hat{T}_i^\pm \{1\} &= \hat{T}_i \{1\} = 1, \quad \hat{S}_i^\pm \{1\} = \mp \frac{2}{h_i^\pm}, \\ \hat{Q}_i^\pm \{1\} &= \pm \frac{h_i^\pm}{3}, \end{aligned} \quad (22)$$

и что справедливы правила сдвига

$$\begin{aligned} \hat{S}_i^- \{F(x,t)\} &= -\hat{S}_{i-1}^+ \{F(x,t)\}, \\ \hat{Q}_i^- \{F(x,t)\} &= -\hat{Q}_{i-1}^+ \{F(x,t)\} \end{aligned} \quad (23)$$

### Обобщенное уравнение баланса

В интегральном соотношении (5) положим  $\varphi(x) = \varphi_i(x)$ ,  $i = 0, \dots, n$  и запишем его в операторной форме

$$\begin{aligned} \hat{T}_i \left\{ K(x,t) \frac{\partial u}{\partial t} \right\} &= \hat{T}_i \left\{ F(x,t) - G(x,t)u + B(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} \right\} - \\ &\quad - \hat{S}_i \left\{ A(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + \\ &\quad + \frac{\delta_{i,n}}{h_i} A(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=b} - \frac{\delta_{i,0}}{h_i} A(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=a}. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь  $\delta_{i,j}$  – символ Кронекера

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (25)$$

Уравнение (24) получено в результате усреднения исходного уравнения по

элементарной окрестности узла  $x_i$  и, таким образом, имеет смысл обобщенного уравнения баланса для элементарной ячейки [11], [2]. Последние два члена характеризуют влияние краевых условий.

### Разностная аппроксимация

Пусть  $\bar{y}(t) = \{y_i(t)\}_{i=0}^n$  – сеточная функция, аппроксимирующая значение  $u(x,t)$  в узлах  $x_i$ .

В окрестности узла  $x_i$  используем аппроксимации

$$\begin{aligned} u(x,t) &\approx y_i(t) + (x-x_i) \cdot \\ &\cdot \left[ \frac{y_i(t) - y_{i-1}(t)}{h_i^-} \chi(\Delta_i^-) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{y_{i+1}(t) - y_i(t)}{h_i^+} \chi(\Delta_i^+) \right] \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &\approx \left[ \frac{y_i(t) - y_{i-1}(t)}{h_i^-} \chi(\Delta_i^-) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{y_{i+1}(t) - y_i(t)}{h_i^+} \chi(\Delta_i^+) \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Определим разностный оператор с ядром  $F(x,t)$

$$\begin{aligned} \hat{P}_i \{F(x,t), \bar{y}\} &= y_i \hat{T}_i \{F(x,t)\} + \frac{1}{2h_i} \cdot \\ &\cdot \left[ (y_i - y_{i-1}) \hat{Q}_i^- \{F(x,t)\} + (y_{i+1} - y_i) \hat{Q}_i^+ \{F(x,t)\} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \hat{P}_i \{1, \bar{y}\} &= \frac{2}{3} y_i + \frac{1}{6h_i} (h_i^- y_{i-1} + h_i^+ y_{i+1}) \end{aligned} \quad (29)$$

В частн  
ости,

Так как оператор  $\hat{P}_i$  представляется трех-диагональной матрицей, он может быть эффективно обращен методом прогонки. Определим разностный граничный оператор  $\hat{\Gamma}_i \{\bar{y}\}$ . Для краевых условий вида (3) положим

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_i \{\bar{y}\} &= \frac{A(x_i,t)}{h_i} \cdot \\ &\cdot \left[ \frac{E^-(t) - C^-(t)y_i(t)}{D^-(t)} \delta_{i,0} + \frac{E^+(t) - C^+(t)y_i(t)}{D^+(t)} \delta_{i,n} \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

Для краевых условий вида (4) положим

$$\hat{\Gamma}_i \{\bar{y}\} = \frac{A(x_i, t)}{\hat{h}_i} \cdot \left[ \frac{E^-(t) - C^-(t)y_{i+1}(t)}{\hat{h}_i^+ C^-(t)} \delta_{i,0} + \frac{E^+(t) - C^+(t)y_{i-1}(t)}{\hat{h}_i^- C^+(t)} \delta_{i,n} \right]. \quad (31)$$

Используем аппроксимации (26) и запишем уравнение баланса (24) в виде

$$\hat{P}_i \left\{ K(x, t), \frac{\partial \bar{y}(t)}{\partial t} \right\} = \hat{L}_i \{\bar{y}(t)\} + \hat{\Gamma}_i \{\bar{y}(t)\}. \quad (32)$$

Здесь разностный оператор  $\hat{L}_i \{\bar{y}\}$  определяется выражением

$$\begin{aligned} \hat{L}_i \{\bar{y}\} = & \hat{T}_i \{F(x, t)\} - \hat{P}_i \{G(x, t), \bar{y}\} + \\ & + \frac{1}{2\hat{h}_i} (y_i - y_{i-1}) \left[ \hat{T}_i^- \{B(x, t)\} - \hat{S}_i^- \{A(x, t)\} \right] + \\ & + \frac{1}{2\hat{h}_i} (y_{i+1} - y_i) \left[ \hat{T}_i^+ \{B(x, t)\} - \hat{S}_i^+ \{A(x, t)\} \right]. \quad (33) \end{aligned}$$

### Решение эволюционной задачи

Чтобы свести решение задачи (32) к задаче эволюционного типа, определим квадратную трех-диагональную  $(n+1) \times (n+1)$  - матрицу  $\hat{M}(t)$

$$\hat{M}_{ij}(t) = a_i \delta_{i,j} + b_i \delta_{i,j-1} + c_i \delta_{i,j+1}, \quad i, j = 0, \dots, n, \quad (34)$$

где

$$a_i(t) = \hat{T}_i \{K(x, t)\} + \frac{1}{2\hat{h}_i} \left[ \hat{Q}_i^- \{K(x, t)\} - \hat{Q}_i^+ \{K(x, t)\} \right], \quad i = 0, \dots, n, \quad (35)$$

$$b_i(t) = \frac{1}{2\hat{h}_i} \hat{Q}_i^+ \{K(x, t)\},$$

$$c_i(t) = -\frac{1}{2\hat{h}_i} \hat{Q}_i^- \{K(x, t)\}, \quad i = 0, \dots, n. \quad (36)$$

Тогда соотношение (32) можно представить в виде эволюционного уравнения

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = \left( \hat{M} \right)^{-1} \cdot \left( \hat{L}_i \{\bar{y}(t)\} + \hat{\Gamma}_i \{\bar{y}(t)\} \right), \quad t \in \{t_0, t_1\} \quad (37)$$

с начальным условием

$$y_i(t_0) = \hat{T}_i \{u_0(x, t)\}, \quad i = 0, \dots, n, \quad (38)$$

Решение начальной задачи (37), (38) производится вложенным методом Рунге-Кутты, основанным на формулах Дормана и Принса с автоматическим управлением длиной шага и контролируемой точностью [12]. Обращение

матрицы  $\hat{M}(t)$  осуществляется методом прогонки [1] по следующему алгоритму.

Вычисление вектора  $\bar{x} = \left( \hat{M} \right)^{-1} \bar{z}$  сводится к решению линейной системы

$$\bar{x} = \left( \hat{M} \right)^{-1} \bar{z} \Leftrightarrow \hat{M}\bar{x} = \bar{z}. \quad (39)$$

Для решения систем линейных уравнений с трех-диагональной матрицей разработана модификация метода Гаусса, использующая нули в матрице системы. Эта процедура, называемая прогонкой и предложенная Томасом в 1949 г., состоит в следующем. Первый шаг (прямая прогонка) – исключение неизвестных  $x_0, \dots, x_{n-1}$  из второго и последующих уравнений. В результате чего приходим к системе

$$x_i = v_i x_{i+1} + u_i, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad x_n = u_n, \quad (40)$$

где

$$v_i = -\frac{b_i}{a_i + c_i v_{i-1}}, \quad u_i = \frac{g_i - c_i u_{i-1}}{a_i + c_i v_{i-1}}, \quad i = 0, \dots, n. \quad (41)$$

Второй шаг – обратная прогонка. Здесь  $x_n = u_n$ . Остальные неизвестные находятся по формулам (40). Для реализации алгоритма требуется  $8n$  арифметических операций.

### Особенности программной реализации

Описанный алгоритм был реализован на языке C++. Отметим особенности программы, позволяющие достаточно гибко реализовать различные сценарии расчетов.

1. Функции, осуществляющие расчет функциональных коэффициентов задачи, являются входными параметрами программы.

2. Пространственная сетка  $\{x_i\}_{i=0}^n$  не обязана быть эквидистантной и должна быть явно задана пользователем. При этом те точки, в которых имеются особенности, желательно включать в множество  $\{x_i\}_{i=0}^n$ , что повысит точность аппроксимации.

3. Для осуществления операций усреднения в формулах (13)-(21) использовались квадратурные формулы Гаусса [13, 14]. Данный подход исключает из квадратурной формулы концевые точки промежутка интегрирования, в которых интегрируемая функция может быть разрывна.

4. Решение задачи Коши (37,38) осуществляется с помощью вложенного явного метода Рунге-Кутты пятого порядка, основанного на формулах Дормана и Принса с автоматическим управлением длиной шага и контролируемой точностью, задаваемой пользователем. Текст программы на C++ основан

на фортранной версии данной программы – программы Dorgi5 [12].

5. Выходными данным  $u(x_i, t_j)$  и программы являются массивы узловых значений функции  $u(x_i, t_j)$  и временной производной  $u_t(x_i, t_j)$ .

6. Приводятся интегральные характеристики решения задачи с целью проверка точности аппроксимации решения. Проинтегрируем соотношение (1) по переменным  $x \in [a, b]$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , Определим функции параметра  $t$

$$u^{ab}(t) = \int_{t_0}^t d\tau \int_a^b dx K(x, \tau) \frac{\partial u}{\partial t}(x, \tau),$$

$$u^{bs}(t) = \int_{t_0}^t d\tau A(a, \tau) \frac{\partial u}{\partial x}(a, \tau), \quad (42)$$

$$u^{tr}(t) = - \int_{t_0}^t d\tau A(b, \tau) \frac{\partial u}{\partial x}(b, \tau),$$

$$u^s(t) = \int_{t_0}^t d\tau \int_a^b dx F(x, \tau), \quad (43)$$

$$u^{ad}(t) = \int_{t_0}^t d\tau \int_a^b dx \left[ B(x, \tau) \frac{\partial u}{\partial t}(x, \tau) - G(x, \tau) u(x, \tau) \right]. \quad (44)$$

В результате исходная задача (1)-(4) эквивалентна тождеству

$$\delta u(t) = u^{ab}(t) + u^{bs}(t) + u^{tr}(t) - u^{ad}(t) - u^s(t) = 0. \quad (45)$$

Величина невязки  $\delta u(t)$  является выходным параметром и может использоваться в качестве индикатора удачного выбора пространственной и временной сетки. Массивы  $u^{ab}(t_j)$ ,  $u^{bs}(t_j)$ ,  $u^{tr}(t_j)$ ,  $u^{ad}(t_j)$ ,  $u^s(t_j)$ ,  $\delta u(t_j)$  также являются выходными параметрами программы.

### Тестирование программы

Сначала рассмотрим задачу с гладкими данными. Для тестирования рассмотрим уравнение (1) с функциональными коэффициентами

$$K(x, t) = t^2 + x^2, \quad A(x, t) = t^2 x^2, \\ B(x, t) = 2xt(t+1), \quad G(x, t) = xt^2 + x^2, \\ F(x, t) = t^5 x^3(x-18) - 3t^4 x^3 + t^3 x(x^4 + x - 4) + t^2 x(3x^4 - 1) + 7tx^3 + x^3.$$

Сформулируем граничную задачу в полосе  $x \in [1, 2]$ ,  $t \geq 1$  с линейными краевыми условиями третьего рода

$$\left\{ u - \frac{\partial u}{\partial x} \right\} \Big|_{x=1} = -2t^3, \quad \left\{ u + \frac{\partial u}{\partial x} \right\} \Big|_{x=2} = 20t^3 + 3t$$

и начальным условием

$$u(x, t) \Big|_{t=1} = x^3 + x, \quad x \in [1, 2].$$

Точным решением этой задачи является функция  $u(x, t) = x^3 t^3 + xt$ . При решении начальной задачи (37), (38) методом Рунге-Кутты число обращений к функции для вычисления правой части уравнения 37 равно 1817. Поточечные оценки погрешности аппроксимации в узловых точках по пространству дается выражениями

$$\delta_i(x_i, t) = \left| 1 - \frac{\tilde{u}_i}{u_i} \right|, \quad \delta_i'(x_i, t) = \left| 1 - \frac{\partial \tilde{u}_i / \partial t}{\partial u_i / \partial t} \right|,$$

где  $u_i = u(x_i, t)$ ,  $\tilde{u}_i(x_i, t)$  – результаты численной аппроксимации решения исходной задачи в точке  $(x_i, t)$ . Результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1. Поточечные оценки погрешности аппроксимации

$x_i$	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
$t = 1.1 \quad \delta u(t) = -0.09954 \quad \left  \delta u(t) / u^s(t) \right  = 2.3\%$											
$u_i$	2.431	2.982	3.62	4.354	5.192	6.142	7.212	8.409	9.742	11.22	12.85
$\tilde{u}_i$	2.43	2.979	3.617	4.351	5.188	6.138	7.207	8.404	9.736	11.21	12.84
$\delta_i$ (%)	0.0435	0.0702	0.0769	0.0764	0.0736	0.0703	0.0671	0.0641	0.0611	0.0581	0.0548
$t = 1.3 \quad \delta u(t) = -0.4061 \quad \left  \delta u(t) / u^s(t) \right  = 1.5\%$											
$u_i$	3.497	4.354	5.356	6.517	7.849	9.365	11.08	13	15.15	17.54	20.18
$\tilde{u}_i$	3.488	4.343	5.344	6.503	7.834	9.35	11.06	12.99	15.14	17.52	20.16
$\delta_i$ (%)	0.253	0.251	0.231	0.206	0.182	0.16	0.14	0.123	0.108	0.094	0.082



Продолжение табл. 1

$t = 1.5 \quad \delta u(t) = -0.9008 \quad \left  \frac{\delta u(t)}{u^s(t)} \right  = 1\%$											
$u_i$	4.875	6.142	7.632	9.365	11.36	13.64	16.22	19.13	22.38	26	30
$\tilde{u}_i$	4.857	6.121	7.609	9.341	11.34	13.61	16.2	19.11	22.36	25.97	29.97
$\delta_i$ (%)	0.361	0.338	0.298	0.257	0.22	0.188	0.161	0.137	0.118	0.101	0.087

Рассмотрим теперь задачу с негладкими данными, которая является вычислительно сложной. Распределение плотности энерговыделения электронов  $(F(x,t))$  средних энергий при нормальном падении точечного пучка на многослойную мишень определяется уравнением [15]

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\lambda(x,t)}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{F}{\varepsilon(x,t)} \right) \right] + 2\delta(t)\delta(x-x_d),$$

$$x \in [0, x_{\max}], \quad t \in [0, t_{\max}] \quad (46)$$

с мгновенным точечным источником единичной мощности, начальным условием  $F(x,0) = 0$  и граничными условиями

$$F(0,t) = \frac{2\lambda(t)}{3} \frac{\partial F}{\partial x}(0,t),$$

$$F(x_{\max},t) = -\frac{2\lambda(t)}{3} \frac{\partial F}{\partial x}(x_{\max},t) \quad (47)$$

Параметр  $t$  имеет смысл относительной остаточной энергии электронов.

Определим функцию  $u(x,t) = F(x,t)/\varepsilon(t)$ , для нее получим каноническую задачу типа (1)

$$\varepsilon(x,t) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\lambda(x,t)}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \left( \frac{\partial \varepsilon(x,t)}{\partial t} \right) +$$

$$+ 2\delta(t)\delta(x-x_d) \quad (48)$$

с начальным условием  $u(x,0) = 0$  и граничными условиями

$$\left( u - \frac{2\lambda}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad \left( u + \frac{2\lambda}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_{\max}} = 0$$

$$\cdot \quad (49)$$

Здесь

$$\varepsilon(x,t) = \frac{(1-t)^{1-\alpha(x)}}{\alpha(x)},$$

$$\frac{\partial \varepsilon(x,t)}{\partial t} = \frac{(\alpha(x)-1)(1-t)^{-\alpha(x)}}{\alpha(x)},$$

$$\lambda(x,t) = \frac{(1-t)^{\alpha(x)}}{d(x)}. \quad (50)$$

Функции  $\alpha$  и  $d$  являются кусочно-постоянными

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha_1, & x \in [0, x^{(1)}) \\ \alpha_2, & x \in [x^{(1)}, x^{(2)}) \\ \alpha_3, & x \in [x^{(2)}, x_{\max}] \end{cases},$$

$$d(x) = \begin{cases} d_1, & x \in [0, x^{(1)}) \\ d_2, & x \in [x^{(1)}, x^{(2)}) \\ d_3, & x \in [x^{(2)}, x_{\max}] \end{cases} \quad (51)$$

Таким образом, имеем задачу в гетерогенной среде, точки  $x^{(1)}$  и  $x^{(2)}$  являются границами слоев и должны быть включены в множество узлов  $\{x_i\}_{i=0}^n$ , так же, как и точка  $x_d$ . Параметры задачи

$$t_{\max} = 0.99, \quad x_{\max} = 0.3, \quad x_d = 0.1,$$

$$x^{(1)} = 0.15, \quad x^{(2)} = 0.2, \quad (52)$$

$$\alpha_1 = 1.68533, \quad \alpha_2 = 0.8, \quad \alpha_3 = 3,$$

$$d_1 = 15.5343, \quad d_2 = 20, \quad d_3 = 10. \quad (53)$$

При численном решении используем аппроксимацию  $\delta$ -функции гауссианом

$$\delta(t) = \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma_t^2}\right), \quad \sigma_t = 0.01 \quad (54)$$

и разностную аппроксимацию  $\delta$ -функции [13]

$$\delta(x-x_i) \approx \phi_i(x) = \frac{2}{x_{i+1} - x_{i-1}} \cdot$$

$$\begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases} \quad x_i = x_d. \quad (55)$$

В табл. 2 представлены результаты проверки условия баланса (45), которое в данном случае имеет вид

$$u^{ab}(t) + u^{bs}(t) + u^{tr}(t) - u^{ad}(t) = u^s(t) = 1. \quad (56)$$

Таблица 2. Проверка условия баланса

$t$	0.0009	0.0031	0.0065	0.0101	0.0163	0.023	0.03	0.0379	0.0469	0.057	0.07
$u^s$	0.072	0.245	0.484	0.724	0.896	0.976	1	1	1	1	1
$ \delta u $	0.0004	0.0007	0.0024	0.003	0.0005	0.008	0.013	0.0142	0.0143	0.014	0.014

На рис. 1 представлены линии уровня функции  $u(x,t)$ , которые демонстрируют распространение начального возмущения в плоскости  $(x,t)$ .

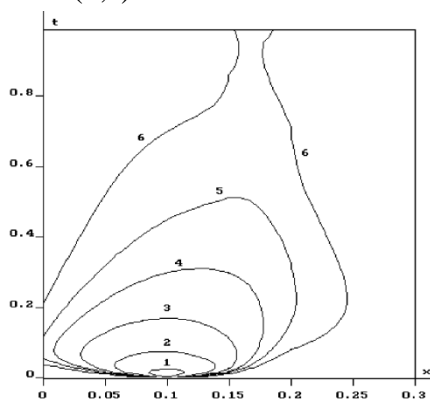


Рисунок 1 – Линии уровня 1)  $u = 19.45$ ;  
2)  $u = 9.3$ ; 3)  $u = 5.7$ ; 4)  $u = 3.85$ ;  
5)  $u = 2.77$ ; 6)  $u = 1.67$

На рис. 2 представлены профили функции  $F(x,t) = \varepsilon(x,t)u(x,t)$  при различных значениях параметров, которые демонстрируют скачки плотности энерговыделения на границах слоев. Как видим, предложенный алгоритм позволяет получить качественную аппроксимацию решения даже при наличии сингулярных данных.

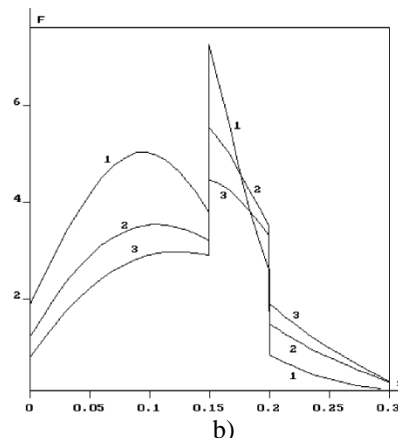
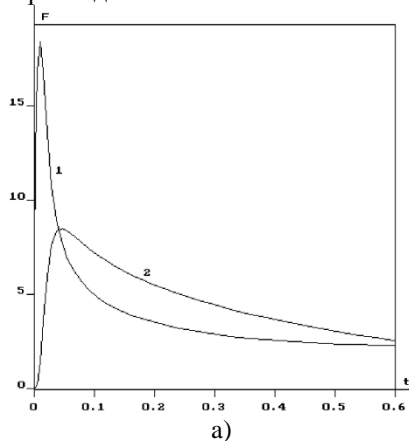


Рисунок 2 – а) Профили функции  $F(x,t)$  в зависимости от переменной  $t$ . Кривые соответствуют значениям: 1)  $x=0.1$ ; 2)  $x=0.15$ ;  
б) Профили функции  $F(x,t)$  в зависимости от переменной  $x$ . Кривые соответствуют значениям: 1)  $t=0.1$ ; 2)  $t=0.2$ ; 3)  $t=0.3$ .

### Выводы

Описанная в работе схема является численно устойчивой и не требует согласования шагов по пространственной и временной переменным. Предложенный подход, очевидно, может быть достаточно легко реализован для аппроксимации обобщенных уравнений эллиптического или гиперболического типа [3, 4].

### Литература

1. Крылов, В. И. Вычислительные методы. Том II. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырский. // М., Наука, 1977-400 с.: ил.
2. Самарский, А. Вычислительные методы. Том II. А. Теория разностных схем. / Самарский А. // М., Наука, 1983-616 с.: ил.
3. Флетчер, К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Том I / К. Флетчер // М., Мир, 1991-504 с.: ил.
4. Андерсон, Д. Вычислительная гидромеханика и гидрообмен. Том I / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер // М., Мир, 1990-322с.: ил.
5. Марчук, Г.И. Методы вычислительной математики / Марчук Г.И. // М.: Наука, 1977, 456 с.
6. Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. - Journal of Political Economics 72, 1973, pp. 637-654.
7. Merton R.C. Theory of rational option pricing, J. Bell Econom. and Management Sci., 4, 1973, pp. 141-183.
8. Ван Кампен, Н. Г. Стохастические процессы в физике и химии / Н. Г. Ван Кампен - М.: Высшая школа, 1990.

9. Хорстхемке, В. Индуцированные шумом переходы / Хорстхемке В., Лефевр Р. // М.: Мир, 1987.

10. I Maglevanny and V Smolar. The constructive procedure for solving the problems of electron transport in the multi-layer specimens for the normally incident electron beam. 1. Solutions of the model transport equations for a point beam: energy and charge deposition. Vacuum, 46, No. 11, 1261-1269, 1995.

11. Самарский, А. А. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. / Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. // М.: Высш. шк., 1987, 296с.

12. Хайрер, Э., Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие

задачи Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. // М.: Vbh. -1990.- 512 с., ил.

13. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн // М.: Наука, 1984.

14. Абрамовиц, М. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган – // М.: Наука, 1979.

15. Маглеванный И. И., Смоляр В. А. Распределение плотности энерговыделения электронов средних энергий при нормальном падении пучка на многослойную мишень. Радиотехника и электроника. Электродинамика и распространение радиоволн, вып. 10, 1579-1589, 1995.

*Маглеванный И.И., Карякина Т.И. Продольная схема метода прямых для численной аппроксимации краевых задач с негладкими данными для дифференциального уравнения второго порядка параболического типа. Изучение краевых задач для параболических уравнений является одной из классических проблем теории дифференциальных уравнений с частными производными и вызывает постоянный интерес математиков. Причиной этому является исключительная практическая важность параболических уравнений, находящихся приложение в различных прикладных областях естествознания. Краевые задачи с негладкими данными для дифференциального уравнения второго порядка параболического типа являются трудным объектом исследования как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения разработки численных методов аппроксимации решения таких задач. Настоящая работа посвящена построению и программной реализации численного метода прямых с использованием обобщенной постановки задачи и применением усредняющих операторов Стеклова.*

**Ключевые слова:** уравнение в частных производных параболического типа, смешанная начальнo-краевая задача, метод прямых, метод Рунге-Кутты, усредняющие операторы Стеклова.

*Malevanny I.I., Karjakin T.I. The longitudinal scheme of the method of lines for the numerical approximation of boundary value problems with nonsmooth data for a differential equation of second order of parabolic type. The study of boundary value problems for parabolic equations is one of the classic problems of the theory of differential equations with partial derivatives and causes continuing interest of mathematicians. The reason for this is the exceptional practical importance of parabolic equations, which finds application in various applied areas of science. Boundary value problems with nonsmooth data for a differential equation of second order of parabolic type are a difficult object of study both from the theoretical point of view, and from the point of view of developing numerical methods for approximating the solution of such problems. The present work describes the construction and software implementation of the numerical method of lines using the generalized formulation and application of Steklov averaging operators.*

**Keywords:** partial differential equation of parabolic type, mixed initial-boundary value problem, direct method, Runge-Kutta method, averaging Steklov operators.

Статья поступила в редакцию 22.02.2018  
Рекомендована к публикации д-ром физ.-мат. наук А.С. Миненко

УДК 517.9

## Приближенный анализ моделирования процесса кристаллизации при электрошлаковом переплаве

А.С. Миненко, Е.В. Радевич  
Донецкий национальный технический университет  
[radevich\\_katerina@mail.ru](mailto:radevich_katerina@mail.ru)

*Миненко А.С., Радевич Е.В. Приближенный анализ моделирования процесса кристаллизации при электрошлаковом переплаве. Осуществляется анализ проблемы существования гладких решений конвективной задачи Стефана с учетом условий изотермичности. Также наряду со стационарной задачей Стефана, учитывающей конвективные движения в жидкой фазе, изучается задача Стефана без учета конвекции:*

**Ключевые слова:** функционал, кристаллизация, тепловой поток, управление, краевая задача, моделирование.

### Введение

Распространения тепла в различных средах оказывает большое влияние на характер протекания многих важных для практики процессов. Среди задач, связанных с распространением тепла, выделяется класс задач, в которых исследуемое вещество переходит из одной фазы в другую с выделением или поглощением тепла.

### Цель и задачи статьи

Целью данной работы является моделирование процесса кристаллизации металла, изучение процесса завершения получения слитка в кристаллизаторе путем его вытягивания.

Рассматривается задача управления информационными процессами при автоматизации технологий тепловой обработки металла, на основе математического моделирования, анализа статистических данных и теплофизических экспериментальных измерений. В качестве источника информации исследуется математическая модель, основанная на пространственной задаче Стефана, с учетом конвективного движения и примесей в жидкой фазе.

### Постановка задачи

Пусть  $D = (-1 < x < 1, y < 0)$  полуполоса, заполненная твердым металлом. Обозначим через  $u(x, y)$  температуру этого металла. Требуется определить температуру  $u(x, y)$  по следующим условиям:

$$u_{xx} + u_{yy} + \omega u_y = 0, (x, y) \in D, \quad (1)$$

$$u_x \pm \omega_0 u = 0, x = \pm 1, -\omega < y < 0, \quad (2)$$

$$u(x, -\infty) = 0, \quad (3)$$

$$u_y(x, 0) = v(x), -1 \leq x \leq 1, \quad (4)$$

здесь  $\omega$  и  $\omega_0$  – постоянные, соответственно, число Пекле и Нуссельта.

Решение задачи (1)-(4) имеет вид

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\omega} \frac{\cos \lambda_n x^{\mu_n y}}{\mu(1 + \omega_0 \frac{\cos^2 \lambda_n}{\lambda_n^2})^{-1}} \int_0^1 v(\zeta) \cos \lambda_n \zeta d\zeta, \quad (5)$$

где  $\mu = -\frac{\omega}{2} + \sqrt{\frac{\omega^2}{4} + \lambda_n^2}$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots, \lambda_n$  –

положительные корни уравнения  $\lambda = \omega_0 \operatorname{ctg} \lambda$ .

Отождествим теперь температуру  $u(x, y)$  с температурой твердого слитка находящегося в кристаллизаторе при электрошлаковом переплаве. Для вытягивания слитка из кристаллизатора поверхность слитка предварительно обогревается тремя электронными лучами  $W_1, W_2$  и  $W_3$ , причем мощность  $W_3$  одного из них равномерно распределена в центральной зоне  $\{-1 \leq x \leq 1, y = 0\}$ , а два других сконцентрированы по краям  $x = \pm 1$  [1]. Независимо от того, в каком отношении находится температура поверхности слитка с критической температурой  $T^k$ , при которой поверхность слитка отделяется от стенок кристаллизатора, теплообмен слитка с кристаллизатором осуществляется по формуле (2). Для получения температуры слитка достаточно положить в формуле (5)  $v(x) = (W_1, W_2, W_3)$ .

Далее введем в рассмотрение функционал:

$$I(v) = \int_n^0 (u(1, y) = T^k)^2 dy. \quad (6)$$

**Рассматривается задача.** Требуется определить поток  $v(x)$  из допустимого множества  $U$ , доставляющий наименьшее значение

функционалу  $I(v)$ . Минимизирующая последовательность  $v_n$  строится по формуле  $v_{n+1} = v_n + e_n(v_{n-1} - v_n)$ , параметр  $e_n$  выбирается из условия  $\min I(v_n + e_n(v_{n-1} - v_n))$ ,  $0 \leq e_n \leq 1$  (2). В качестве области определения функции  $U$  берется множество кусочно-постоянных ступенчатых функций:  $v = v_k, x_k \leq x \leq x_{k+1}, v_k = const, k = 0, 1, 2, \dots, m$ .

При этом формула (5) имеет вид:

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\omega} \frac{\cos \lambda_n x e^{\mu_n y}}{\mu_n (1 + \omega_0 \frac{\cos^2 \lambda_n}{\lambda_n^2})} \sum_{k=0}^m v_k \frac{\sin \lambda_n x_{k+1} - \sin \lambda_n x_k}{\lambda_n},$$

$$aI(v) = I(v_0, v_1, v_2, \dots, v_m).$$

При численной реализации задачи необходимо учесть ограничение  $2500 \leq v(x) \leq 5000$ , здесь  $v(x)$  – мощность потока в единицах МВт/м<sup>2</sup>, а также  $\omega = 2,66, \omega = 3,05$ .

### 1. Решение задачи методом нулевого приближение.

Найдем минимум функционала (6), в случае когда  $u_0(x, y) = f_0(x, y) \vartheta$ , где

$$f_0(x, y) = 2 \frac{\cos \lambda_0 x \sin \lambda_0}{\lambda_0 \mu_0 (1 + \omega_0 \frac{\cos^2 \lambda_0}{\lambda_0^2})} e^{\mu_0 y}.$$

Минимум функционала (6) находим из условия

$$\frac{\partial I}{\partial v} = 0.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$v_0 = 4T^* \frac{\mu_0 \lambda_0 (1 + \omega_0 \frac{\cos^2 \lambda_0}{\lambda_0^2})}{\sin 2\lambda_0},$$

$$I(v_0) = v_0^2 \frac{\sin 2\lambda_0 (1 - e^{2\mu_0 H})}{2\lambda_0^3 \mu_0^3 (1 + \omega_0 \frac{\cos^2 \lambda_0}{\lambda_0^2})} - (T^*)^2 H - 2T^* v_0 \frac{\sin 2\lambda_0 (1 - e^{\mu_0 H})}{\lambda_0 \mu_0^2 (1 + \omega_0 \frac{\cos^2 \lambda_0}{\lambda_0^2})}$$

Первое приближение. Найдем теперь минимум функционала (6), в случае когда

$$u_1(x, y) = (f_0(x, y))v, \text{ где}$$

$$f_1(x, y) = 2 \frac{\cos \lambda_1 x e^{\mu_1 y}}{\mu_1 (1 + \omega_0 \frac{\cos^2 \lambda_1}{\lambda_1^2})} \frac{\sin \lambda_1}{\lambda_1}.$$

Поступая, аналогично тому, как это было сделано в случае нулевого приближения, получим:

$$v_1 = 2T^* \left[ \frac{\sin 2\lambda_0 (1 - e^{\mu_0 H})}{\lambda_0 \mu_0^2 (1 + \omega_0 \frac{\cos^2 \lambda_0}{\lambda_0^2})} + \frac{\sin 2\lambda_2 (1 - e^{\mu_2 H})}{\lambda_2 \mu_2^2 (1 + \omega_0 \frac{\cos^2 \lambda_2}{\lambda_2^2})} \right] A,$$

$$A = \frac{\sin^2 \lambda_0 (1 - e^{\mu_2 H})}{\lambda_0 \mu_1^2 (1 + \omega_0 \frac{\cos^2 \lambda_0}{\lambda_0^2})^2} + \frac{\sin^2 2\lambda_1 (1 - e^{2\mu_1 H})}{2\mu_1^2 (1 + \omega_1 \frac{\cos^2 \lambda_1}{\lambda_1^2})^2} +$$

$$+ 2 \frac{\sin 2\lambda_0 \sin 2\lambda_1 (1 - e^{\mu_0 H})(1 - e^{\mu_1 H})}{\mu_0 \lambda_0 (1 + \omega_0 \frac{\cos^2 \lambda_0}{\lambda_0^2}) \mu_1 \lambda_1 (1 + \omega_1 \frac{\cos^2 \lambda_1}{\lambda_1^2})}.$$

Далее, имеет место следующая формула:

$$I(v_1) = v_2^1 \frac{\sin^2 2\lambda_0 (1 - e^{2\mu_0 H})}{2\mu_0^3 \lambda_0^2 (1 + \omega_0 \frac{\cos^2 \lambda_0}{\lambda_0^2})^2} + v_1^2 \frac{\sin^2 2\lambda_1 (1 - e^{2\mu_1 H})}{2\mu_1^3 \lambda_1^2 (1 + \omega_1 \frac{\cos^2 \lambda_1}{\lambda_1^2})^2} +$$

$$+ 2v_1^2 \frac{\sin 2\lambda_0 \sin 2\lambda_1 (1 - e^{\mu_0 H})(1 - e^{\mu_1 H})}{\mu_1 \lambda_1 (1 + \omega_1 \frac{\cos^2 \lambda_1}{\lambda_1^2}) \mu_0 \lambda_0 (1 + \omega_0 \frac{\cos^2 \lambda_0}{\lambda_0^2})} -$$

$$- 2T^* v_1 \left[ \frac{\sin 2\lambda_1 (1 - e^{\mu_1 H})}{\lambda_1 \mu_1^2 (1 + \omega_1 \frac{\cos^2 \lambda_1}{\lambda_1^2})} + \frac{\sin 2\lambda_0 (1 - e^{\mu_0 H})}{\lambda_0 \mu_0^2 (1 + \omega_0 \frac{\cos^2 \lambda_0}{\lambda_0^2})} \right] - H(T^*)^2.$$

Приближение любого порядка. Аналогичным образом можно исследовать минимум функционала  $I(v_n)$ , когда

$$u_n(x, y) = 2 \frac{v_n \sin \lambda_0 \cos \lambda_0 x (1 - e^{\lambda_0 H})}{\lambda_0 \mu_0 [1 + \omega_0 \frac{\cos^2 \lambda_0}{\lambda_0^2}]} e^{\mu_0 y} +$$

$$+ 2\omega_0 v_n \sum_{k=1}^n \frac{\cos \lambda_k x \cos \lambda_k (1 - e^{\mu_k H})}{\lambda_k^2 \mu_k [1 + \omega_0 \frac{\cos^2 \lambda_k}{\lambda_k^2}]} e^{\mu_k y}$$

Оценить погрешность предлагаемого метода вычисления минимума функционала (6) можно, используя следующее утверждение.

При достаточно малых значениях  $\omega$  и при  $(x, y) \in \bar{D}$  справедлива оценка:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_k x \cos \lambda_k (1 - e^{\omega_k H})}{\lambda_k^2 \mu_k [1 + \omega_0 \frac{\cos^2 \lambda_k}{\lambda_k^2}]} e^{\mu_k y} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k\pi)^2} e^{\mu_k y}$$

При доказательстве этого утверждения воспользоваться соотношением:

$$\lambda_k = n\pi + \varepsilon_n, \text{ где } \varepsilon_n \rightarrow 0 \text{ для всех } n[2].$$

Справедливо также утверждение. Пусть выполнены условия  $\omega_0 \geq \omega \sqrt{2} \operatorname{tg} \omega \sqrt{2}$ ,

$$0 < \omega \leq A, \quad 0 < \omega \leq \frac{\pi^2}{16}, \quad 0 < v_0 \leq v(x) < v_1,$$

при  $x \in [-1, 1]$ , где  $v_0$  и  $v_1$  – некоторые постоянные. Тогда решение краевой задачи (1)-(5) удовлетворяет следующим условиям при  $(x, y) \in \bar{D}$ :

$$u_y(x, y) \leq C_1 \omega \exp(\mu_0 y) \leq C_1 \omega \exp(\omega y) \\ C_0 = \exp(\mu_0 y) \leq u(x, y) \leq C_1 \exp(\mu_0 y) C_1 \exp(\omega y),$$

$$\text{где } C_1 = \frac{6 + A(1 + \cos \sqrt{A})}{3(1 + \cos \sqrt{A})}, \quad C_0 = \frac{3(1 - A)(1 + \cos^2 \sqrt{A}) \cos^2 \sqrt{A}}{6 + A(1 + \cos^2 \sqrt{A})}.$$

Для утверждения необходимо сравнить с помощью принципа максимума функции  $u_y(x, y)$  и  $v_y(x, y)$ , где  $v(x, y)$  – решение задачи (1)-(5) в предположении, что  $v_y(x, 0) = v_1$  при  $x \in [-1, 1]$ .

Далее, рассматривается функция  $f(x, y) = v_y(x, y) - u_y(x, y)$ ,  $(x, y) \in \bar{D}$  и доказывается, что  $f(x, y)$  в  $\bar{D}$ .

Действительно, функция  $f(x, y)$  не может принимать наименьшее отрицательное значение внутри  $D$  в силу принципа максимума. На вертикальных частях границы  $x = \pm 1$  функция  $f_x(x, y)$  также не может принимать отрицательный минимум. В такой точке имели бы  $f_x(x, y) < 0$ , между тем  $f_x(x, y) = -\omega_0 f(x, y) > 0$ ,  $x = \pm 1$ , так как  $f(x, y) < 0$ , по предложению. На бесконечности функция  $f(x, y)$  исчезает, т.е.  $f(x, -\infty) = 0$ . На границе  $y = 0$ ,  $-1 \leq x \leq 1$  имеет  $f(x, 0) = v_y(x, 0) - u_y(x, 0) = v_1 - v(x) \geq 0$

Следовательно, всюду в  $\bar{D}$  справедливо неравенство  $u_y(x, y) \leq v_y(x, y)$  при  $(x, y) \in \bar{D}$ .

Отсюда с помощью интегрирования по переменной  $y$  следует оценка для функции  $u(x, y)$  сверху. Аналогичным образом, можно получить оценку на производную  $u_2(x, y)$  сверху при  $(x, y) \in \bar{D}$ . Полученные оценки позволяют оценить температуру  $u(x, y)$  и тепловой поток внутри области  $D$  не прибегая к решению задачи (1)-(4) [3-4].

## 2. Минимизация $I(\vartheta)$ при ступенчатой функции $\vartheta(x)$ .

Имеем 
$$u(x, y) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n x e^{\mu_n y}}{\mu_n \left(1 + \omega_0 \frac{\cos^2 \lambda_n}{\lambda_n^2}\right)} \int_0^1 \vartheta(\zeta) \cos \lambda_n \zeta d\zeta,$$

Здесь  $\vartheta(x) = \vartheta_1$  при  $0 \leq x \leq x_1$ ,  $\vartheta(x) = \vartheta_2$  при  $x_1 \leq x \leq 1$ ,  $N_1 \leq \vartheta(x) \leq N_2$ .

В дальнейшем положим

$$\vartheta_2 = N_2 \text{ и } f_0(x, y) = 2 \frac{\cos \lambda_0 x e^{\mu_0 y}}{\mu_0 \left(1 + \omega_0 \frac{\cos^2 \lambda_0}{\lambda_0^2}\right)} (a \vartheta_1 + b N_2).$$

Требуется найти  $\min I$  и  $\vartheta_1$ , где  $I(\vartheta_1, N_2) = \int_H (f_0(1, y)(a \vartheta_1 + b N_2) - T^*) dy$ , т.е.  $\frac{\partial I}{\partial \vartheta_1} = 0$ .

Имеем:

$$\vartheta_1 = \left[ 2T^* \frac{\cos \lambda_0 (1 - e^{\mu_0 H})}{\mu_0^2 \left(1 + \omega_0 \frac{\cos^2 \lambda_0}{\lambda_0^2}\right)} - 2bN_2 \frac{\cos^2 \lambda_0 (1 - e^{2\mu_0 H})}{\mu_0^3 \left(1 + \omega_0 \frac{\cos^2 \lambda_0}{\lambda_0^2}\right)^3} \right] \left[ 2a \frac{\cos^2 \lambda_0 (1 - e^{2\mu_0 H})}{\mu_0^3 \left(1 + \omega_0 \frac{\cos^2 \lambda_0}{\lambda_0^2}\right)^3} \right]^{-1}.$$

$$\text{Здесь } a = \frac{\sin \lambda_0 x_1}{\lambda_0}, \quad b = \frac{\sin \lambda_0 - \sin \lambda_0 x_1}{\lambda_0}.$$

$$I(\vartheta_1, N_2) = \int_H (f_0(1, y)(a \vartheta_1 + b N_2) - T^*)^2 dy =$$

$$\left[ 2(a \vartheta_1 + b N_2) \frac{2 \cos^2 \lambda_0}{\mu_0^2 \left(1 + \omega_0 \frac{\cos^2 \lambda_0}{\lambda_0^2}\right)^3} \right]^2 \frac{1 - e^{2\mu_0 H}}{\mu_0} - 2T^*(a \vartheta_1 + b N_2) \frac{\cos \lambda_0 (1 - e^{\mu_0 H})}{\mu_0^2 \left(1 + \omega_0 \frac{\cos^2 \lambda_0}{\lambda_0^2}\right)} + T^{*2}.$$

Далее имеем:

$$u_1(x, y) = 2 \frac{\cos \lambda_0 x e^{\mu_0 y}}{\mu_0 \left(1 + \omega_0 \frac{\cos^2 \lambda_0}{\lambda_0^2}\right)} \int_0^1 \vartheta(\zeta) \cos \lambda_0 \zeta d\zeta +$$

$$2 \frac{\cos \lambda_1 x e^{\mu_1 y}}{\mu_1 \left(1 + \omega_0 \frac{\cos^2 \lambda_1}{\lambda_1^2}\right)} \int_0^1 \vartheta(\zeta) \cos \lambda_0 \zeta d\zeta =$$

$$2 \frac{\cos \lambda_0 x e^{\mu_0 y}}{\mu_0^2 \left(1 + \omega_0 \frac{\cos^2 \lambda_0}{\lambda_0^2}\right)} (a_0 \vartheta_1 + b_0 N_2) + (a_0 \vartheta_1 +$$

$$b_0 N_2) + 2 \frac{\cos \lambda_1 x e^{\mu_0 y}}{\mu_1^2 \left(1 + \omega_0 \frac{\cos^2 \lambda_1}{\lambda_1^2}\right)} (a_1 \vartheta_1 + b_1 N_2),$$

$$\text{где } a_0 = \frac{\sin \lambda_0 x_1}{\lambda_0}, \quad b_0 = \frac{\sin \lambda_0 - \sin \lambda_0 x_1}{\lambda_0}$$

$$a_1 = \frac{\sin \lambda_1 x_1}{\lambda_1}, \quad b_1 = \frac{\sin \lambda_1 - \sin \lambda_1 x_1}{\lambda_1}.$$

$$f_0(x, y) = 2 \frac{\cos \lambda_0 x e^{\mu_0 y}}{\mu_0 \left(1 + \omega_0 \frac{\cos^2 \lambda_0}{\lambda_0^2}\right)},$$

$$f_1(x, y) = 2 \frac{\cos \lambda_1 x e^{\mu_0 y}}{\mu_1 \left(1 + \omega_0 \frac{\cos^2 \lambda_1}{\lambda_1^2}\right)}.$$

Были проделаны численные эксперименты при определенных параметрах. Анализ численных результатов показывает убывание значения функционала на первом и втором приближениях, что соответствует смыслу

теплофизических процессов происходящих при электрошлаковом переплаве (ЭШП).

### 3. Математическое моделирование процессов кристаллизации металла с учетом конвекции и примесей.

Пусть  $\Gamma_0$  – гладкая замкнутая поверхность, лежащая внутри заданной области  $\Omega_0$  и  $R^3$ , граница которой состоит из двух замкнутых, связанных, гладких поверхностей  $\Gamma_0^+$  и  $\Gamma_0^-$ , не имеющих самопересечений при этом  $\Gamma_0^-$  лежит внутри ограниченной области, границей которой является  $\Gamma_0$ . Поверхность  $\Gamma_0$  разбивает  $\Omega_0$  на две подобласти  $\Omega_0^+$  и  $\Omega_0^-$ , которые заняты жидкой и твердой фазами соответственно в момент  $t=0$ . Требуется определить области  $\Omega_t^+$  и  $\Omega_t^-$ , занимаемые твердой и жидкой фазами соответственно в момент времени  $t \in [0, T]$ , вектор скорости  $\vec{V}(x, t)$ , давление  $p(x, t)$ , концентрацию примесей  $c(x, t)$ , концентрацию примеси  $s(x, t)$ , температуру жидкой  $u^+(x, t)$  и твердой  $u^-(x, t)$  фазы по следующим условиям:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \vec{V}(x, t)}{\partial t} + (\vec{\nabla} \vec{V}) \vec{V}(x, t) + \nabla p(x, t) = \\ & = \vartheta \nabla^2 \vec{V}(x, t) + \vec{f}(u^+, c), \\ & \nabla \vec{V} \cdot \vec{n}(x, t) = 0, (x, t) \in D_T^+; \\ & \frac{\partial u^+(x, t)}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) u^+(x, t) - \\ & - a_+^2 \nabla^2 u^+(x, t) = 0, (x, t) \in D_T^+; \\ & \frac{\partial u^-(x, t)}{\partial t} - a_-^2 \nabla^2 u^-(x, t) = 0, (x, t) \in D_T^+; \\ & \vec{V}(x, 0) = \vec{C}(x); T(\vec{V}, p) \vec{n} = -q(x, t) \vec{n}, (x, t) \in \Gamma_t^+; \\ & V_n = -(1 - \frac{p^-}{p^+}) W_n, V_t = 0, (x, t) \in \Gamma_t; \quad u^\pm(x, t) = \\ & B^\pm(x, t), (x, t) \in \Gamma_t^+ \cup \Gamma_0^-; u^\pm(x, 0) = A^\pm(x); \\ & u^+ = u^- = T^* - \varepsilon c, k_- \frac{\partial u^-}{\partial n} - k_+ \frac{\partial u^+}{\partial n} = \\ & x p^+ W_n, (x, t) \in \Gamma_t; \\ & \frac{\partial c(x, t)}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) c(x, t) - \gamma \nabla^2 c(x, t) = \\ & = 0, (x, t) \in D_T^+, \\ & c(x, 0) = g_0(x); c(x, t) = g(x, t), (x, t) \in \\ & \Gamma_t^+; -\alpha \frac{\partial c}{\partial n} = \beta c W_n, (x, t) \in \Gamma_t, \end{aligned} \quad (7)$$

здесь  $D_T^\pm = \{(x, t): x \in \Omega_t^\pm, t \in (0, T)\}$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\partial \Omega^+ = \Gamma_t^+ \cup \Gamma_0^+$ ,  $\partial \Omega^- = \Gamma_t^- \cup \Gamma_0^-$ ,  $\vec{n}$  – нормаль к  $\Gamma_t$ , направленная в сторону  $\Omega_t^+$ ,  $T(\vec{V}, p)$  – тензор

напряжений с элементами  $T_{ij} = -\delta_{ij} p + v(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$ ,  $V_n$  и  $V_t$  – нормальная и тангенциальная составляющие,  $W_n$  – скорость движения фронта кристаллизации в направлении нормалей  $\vec{n}$ ;  $T^*, \vartheta, \varepsilon, x, p^+, p^-, \alpha, \beta, \gamma, k_+, k_-$  – известные положительные постоянные. Если  $\Phi(x, t) = u^\pm(x, t) + \varepsilon c(x, t) - T^* = 0$  – уравнение поверхности  $\Gamma_t$ , тогда  $W_n = -\Phi_t / |\nabla \Phi|$  [2].

При некоторых предположениях на функции  $A(x), \vec{C}(x), B^\pm(x, t), \vec{f}(u^+, c), g(x, t)$  и  $g_0(x)$  задача разрешима при малых значениях  $t$  в классе функций  $u^\pm \in H^{2+a, \frac{2+a}{2}}(\overline{D_+^\pm})$ ,  $\vec{V} \in H^{2+a, \frac{2+a}{2}}(\overline{D_+^\pm})$ ,  $c \in H^{2+a, \frac{2+a}{2}}(\overline{D_+^\pm})$ ,  $\forall p \in H^{a, \frac{a}{2}}(\overline{D_+^\pm})$  а границы  $\Gamma_t^+$  и  $\Gamma_t^-$  описываются функциями класса  $H^{2+a, \frac{2+a}{2}}$ . Далее, пусть  $Q_T^\pm = \Omega_0^\pm \times [0, T]$ ,  $\Gamma_{OT}^- = \Gamma_0^- \times [0, T]$ ,  $\Gamma_{OT}^+ = \Gamma_0^+ \times [0, T]$ ,  $\Gamma_{OT} = \Gamma_0 \times [0, T]$ . Отметим также, что решение задачи моделирует процесс кристаллизации вещества с учетом конвективного теплообмена и переноса примеси в жидкой фазе [2]. Свободные границы  $\Gamma_t^+$  и  $\Gamma_t^-$  можно представить в следующем виде  $\Gamma_t = \{x = x(\omega) + \vec{n}(\omega) * p(\omega, t)\}$ ,  $\Gamma_t^+ = \{x = x(\theta) + \eta(\omega, t) * \vec{n}(\theta)\}$ . При достаточно малых значениях чисел  $\varepsilon$ . Предложен метод решения задачи, состоящий из разложения решения в ряд по степеням чисел  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} u^\pm(x, t, \varepsilon) &= u_0^\pm(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k u_k^\pm(x, t) \\ p(x, t, \varepsilon) &= p_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k p_k(x, t) \\ V_i(x, t, \varepsilon) &= V_{i_0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k V_{ik}, \quad i = 1, 2, 3; \\ p(\omega, t, \varepsilon) &= \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k p_k(\omega, t), \quad c(x, t) = \\ &= c_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k c_k(x, t) \end{aligned}$$

В работе изучено нулевое  $u_0^\pm(x), \vec{V}_0(x) = (V_{10}, V_{20}, V_{30}), \Gamma_0, c_0(x)$  и первое приближение  $(\vec{V}_1, u_1^\pm, p_1, \rho_1, c_1)$  для малых чисел  $\varepsilon$ . При этом установлено, что  $u_0^\pm(x) = A^\pm(x), \vec{V}_0(x) = \vec{C}(x), C_0(x) = g_0(x), \rho_1(\omega, t) \in H^{2+a, \frac{2+a}{2}}(\Gamma_{OT})$ ,  $u_1^\pm(x, t; p) \in H^{2+a, \frac{2+a}{2}}(Q_T^\pm)$ ,  $c_1(x, t; \rho) \in H^{2+a, \frac{2+a}{2}}(Q_T^\pm)$ , причем  $\rho_1(\omega, t)$  находим как неподвижную точку сжимающегося оператора  $M_1$ :

$$M_1 \rho_1 =$$

$$= \frac{1}{x\rho^+} \int_0^1 (k_- \frac{\partial u_1^-}{\partial n} - k_+ \frac{\partial u_1^+}{\partial n} + f_1(x, t)) dt,$$

$$x(\omega) \in \Gamma_{OT}.$$

Из условия Стефана для малых чисел  $\varepsilon$  следует разложение:

$$L(u^+, u^-, \Gamma_t, \varepsilon) = [k_-^2 |\nabla u_0^-|^2 - k_+^2 |\nabla u_0^+|^2 + \varepsilon [2k_-^2 (\nabla u_0^-, \nabla u_1^-) - 2k_+^2 (\nabla u_0^+, \nabla u_1^+) + f_1 + x\rho^+ (k_- u_{1t}^- + k_+ u_{1t}^+)] + \varepsilon^2 [2k_-^2 (\nabla u_0^-, \nabla u_1^-) - 2k_+^2 (\nabla u_0^+, \nabla u_1^+) + f_2 + x\rho^+ (k_- u_{2t}^- + k_+ u_{2t}^+)] + O(\varepsilon^2) = 0, (x, t) \in \Gamma_{OT}.$$

Откуда следует, что

$$k_-^2 |\nabla u_0^-|^2 - k_+^2 |\nabla u_0^+|^2 = 0, x \in \Gamma_0;$$

$$k_- \frac{\partial u_1^-}{\partial n} - k_+ \frac{\partial u_1^+}{\partial n} + f_1 = x\rho^+ \frac{\partial p_1}{\partial t}, (x, t) \in \Gamma_{OT};$$

$$k_- \frac{\partial u_2^-}{\partial n} - k_+ \frac{\partial u_2^+}{\partial n} + f_2 = x\rho^+ \frac{\partial p_2}{\partial t}, (x, t) \in \Gamma_{OT};$$

Здесь  $f_1(x, t)$  и  $f_2(x, t)$  известные гладкие функции [2].

Рассмотрим второе приближение  $(\vec{V}_2, u_2^\pm, p_2, \rho_2, c_2, \eta_2)$  задачи для малых чисел  $\varepsilon$ . Имеем:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{V}_2}{\partial t} + (\vec{V}_0 \nabla) \vec{V}_2 + (\vec{V}_1 \nabla) \vec{V}_1 + (\vec{V}_2 \nabla) \vec{V}_0 + \nabla p_2 = \\ \vartheta \nabla^2 \vec{V}_2 + [\vec{f}'_{uu} u_2 + \vec{f}'_c c_2 + \frac{1}{2} \vec{f}''_{uu} u_1^2 + \frac{1}{2} \vec{f}''_{cc} c_1^2], \\ (x, t) \in Q_T^+, \nabla \vec{V}_2 = 0, (x, t) \in Q_T^+, T(\vec{V}_0, p_2) \vec{n} + \\ T(\vec{V}_1, p_1) \vec{n} + T(\vec{V}_2, p_0) \vec{n} = 0, x \in \Gamma_0^+ \\ \vec{V}_2(x, 0) = 0, V_{2n} = \\ (1 - \frac{\rho_-}{\rho^+}) [\frac{u_{2t}}{\nabla u_0} + f_3(x, t)], V_{2\tau} = 0, x \in \Gamma_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_2^\pm}{\partial t} + (\vec{V}_0 \nabla) u_2^\pm + (\vec{V}_2 \nabla) u_0^\pm + (\vec{V}_1 \nabla) u_1^\pm = \\ = a_\mp^2 \nabla^2 u_2^\pm, (x, t) \in Q_T^+, \frac{\partial u_2^-}{\partial t} + a_-^2 \nabla^2 u_2^- = 0, \\ (x, t) \in Q_T^-, u_2^\pm(x, 0) = 0, u_2^\pm(x, t) = \\ = 0, (x, t) \in \Gamma_{OT}^- \cup \Gamma_{OT}^+, u_2^\pm = u_2^-, \\ |\nabla u_0^\pm(x(\omega))| p_2(\omega, t) + u_2(x(\omega, t)) + f(x(\omega, t)) = \\ 0, (x, t) \in \Gamma_{OT} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial c_2}{\partial t} + (\vec{V}_0 \nabla) c_2^+ + (\vec{V}_2 \nabla) c_0^+ + (\vec{V}_1 \nabla) c_1^+ - \\ - \gamma \nabla^2 c_2 = 0, (x, t) \in Q_T^+, c_2(x, 0) = \\ 0; c_2(x, t) = 0, \\ (x, t) \in \Gamma_{OT}^+, -\alpha \frac{\partial c_2}{\partial n} = \frac{u_{2t}^+}{|\nabla u_0^+|} + f_4(x, t), (x, t) \in \Gamma_{OT}, \\ \frac{\partial c_0}{\partial n} \eta(\omega, t) + c_2(x, t) + f_5(x, t) = 0, (x, t) \in \Gamma_{OT} \end{cases}$$

где  $f_3(x, t), f_4(x, t)$  и  $f_5(x, t)$  - известные функции.

При заданных  $\rho_2(\omega, t)$  и  $\vec{p}_2(\omega, t)$  из  $H^{2+a, \frac{2+a}{2}}(\Gamma_{OT})$  найдем функции  $u_2^\pm(x, t, \rho_2)$  и  $u_2^\pm(x, t, \vec{p}_2)$  как единственные решения задачи. Затем рассмотрим оператор, действующий из  $H^{2+a, \frac{2+a}{2}}(\Gamma_{OT})$  в  $H^{2+a, \frac{2+a}{2}}(\Gamma_{OT})$ , следующим образом  $M_2 \rho_2 = \frac{1}{x\rho^+} \int_0^1 (k_- \frac{\partial u_2^-}{\partial n} - k_+ \frac{\partial u_2^+}{\partial n} + f_2(x, t)) dt, x(\omega) \in \Gamma_0$ . Справедливые оценки:  $|u_2^\pm|_{QT^\pm}^{(a+2)} \leq C (|F_2^\pm|_{QT^\pm}^{(a+2)} + |\rho_2|_{\Gamma_{OT}^\pm}^{(a+2)})$ , где  $C$  - некоторая постоянная, а  $F_2^\pm = -(\vec{V}_2 \nabla) u_0^\pm - (\vec{V}_1 \nabla) u_1^\pm$  при  $(x, t) \in Q_T^+$  и  $F_2(x, t) = 0$  при  $(x, t) \in Q_T^-$ . Отсюда следует, что  $|M_2 \rho_2 - M_2 \vec{p}_2|_{\Gamma_{OT}}^{(a+2)} \leq \tilde{C} |\rho_1 - \rho_2|_{\Gamma_{OT}}^{(a+2)}$  где  $\tilde{C} = C(k_+ + k_-)/x\rho^+$ . Следовательно, оператор  $M_2$  - сжимающий, если выполняется условие

$$C(k_+ + k_-)/x\rho^+ < 1 \quad (8)$$

Имеют место следующие утверждение:

**Лемма 1.** Пусть выполнено условие (8). Тогда оператор  $M_2$ , действующий из  $H^{2+a, \frac{2+a}{2}}(\Gamma_{OT})$  в  $H^{2+a, \frac{2+a}{2}}(\Gamma_{OT})$ , имеет там неподвижную точку.

**Лемма 2.** В качестве второго приближения задачи можно взять решение  $u_2^\pm(x, t), c_2(x, t), \vec{V}_2(x, t), p_2(x, t), \rho_2(x, t), \eta_2(x, t)$ .

## Выводы

В статье приведен обзор теории по данной тематике и смоделирован процесс кристаллизации металла.

## Литература

1. Миненко А.С. Исследование одной конвективной задачи Стефана методом Ритца // Укр. мат. журнал. 2007. - 59, № 11. - С. 1546 - 1556.
2. Миненко А.С., Шевченко А.И. Об одной проблеме Стефана // Доповіді НАН України. - 2008. - № 1 - С. 26 - 30.
3. Миненко А.С. Проблема минимума со свободной границей // Искусственный интеллект. - 1998. - №2. - С. 101 - 109.
4. Данилюк И.И., Миненко А.С. Об одном подходе к анализу стационарной задачи Стефана при наличии конвекции в жидкой фазе. - В кн.: Мат. физика и Нелин.механика.- Киев, Наукова думка, 1985.- Вып. 65. - С. 39-48.
5. Миненко А.С., Шевченко А.И. Приближенный анализ стационарной конвективной задачи Стефана // Доповіді НАН України.-2010.-№5.-С.36-40.
6. Миненко А.С., Шевченко А.И. Приближенный анализ одной пространственной конвективной задачи теплопроводности //



Доповіді НАН України. – 2007. – № 7. – С. 22 – 27.

7. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973, С. 407

8. Миненко А.С., Шевченко А.И. Исследование конвективного теплопереноса в

одной пространственной задаче теплопроводности // Доповіді НАН України. – 2007. – № 9. – С. 25 – 29.

9. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с

*Миненко А.С., Радевич Е.В. Приближенный анализ моделирования процесса кристаллизации при электрошлаковом переплаве. Осуществляется анализ проблемы существования гладких решений конвективной задачи Стефана с учетом условий изотермичности. Также наряду со стационарной задачей Стефана, учитывающей конвективные движения в жидкой фазе, изучается задача Стефана без учета конвекции.*

**Ключевые слова:** функционал, кристаллизация, тепловой поток, управление, краевая задача, моделирование.

*Minenko A.S., Radevich E.V. Approximate analysis of modeling the process of solidification during electroslag remelting. Carried out analysis of the problem of existence of smooth solutions to the convective Stefan problem taking into account the conditions of isothermal. Also along with the stationary Stefan problem taking into account convective motion of the liquid phase, studied Stefan problem without convection.*

**Keywords:** functionality, crystallization, heat flow, control, boundary value problem, modeling.

Статья поступила в редакцию 20.03.2018  
Рекомендована к публикации д-ром техн. наук В.Н. Павлышом

## Логико-структурная модель влияния инновационной составляющей на обеспечение региональной конкурентоспособности

Э.В. Павлыш

Полоцкий государственный университет (Республика Беларусь)

[e.pavlysh@psu.by](mailto:e.pavlysh@psu.by)

*Павлыш Э.В. Логико-структурная модель влияния инновационной составляющей на обеспечение региональной конкурентоспособности. В статье рассмотрена сущность и структура межрегиональной конкуренции и конкурентоспособности региона. Исследованы факторы конкурентоспособности региона. Очерчена роль инновационной составляющей в обеспечении конкурентоспособности региона.*

**Ключевые слова:** система, инновация, регион, конкурентоспособность, фактор.

### Постановка проблемы

Практика последних десятилетий показывает, что процессы глобализации, сопровождавшиеся снижением тарифных и нетарифных ограничений, развитием информационных сетей и транспортной инфраструктуры, приводили к тому, что экономические субъекты развитых стран получали все более свободный доступ к любым национальным рынкам. При этом менее развитые государства теряли большинство инструментов прямого влияния на экономику, с помощью которых ранее могли обеспечить относительно стабильные доли рынка для национальных производителей.

Возникший впоследствии мировой экономический кризис и обострение геополитических конфликтов обусловили усиление конкурентной борьбы на международных и внутренних рынках, в связи с чем существование целых отраслей национальной экономики для стран с переходной моделью развития оказались под угрозой со стороны экспортеров товаров, капитала, технологий. При этом возобновление режима ограничений во внешней торговле приводит к возникновению дефицита многих видов товаров на внутреннем рынке, снижению доходов отдельных категорий населения и формированию прочих дополнительных предпосылок ухудшения экономической ситуации. Потому сегодня в основе развития национальной экономики в первую очередь лежит способность к эффективному преодолению кризисных явлений, которые перманентно возникают вследствие усиления конкурентной борьбы на всех уровнях экономического пространства.

Таким образом, актуализируется вопрос выявления системных факторов обеспечения экономической безопасности в контексте

формирования соответствующей общенациональной и региональной экономической политики, направленной на придание экономической системе свойств дополнительной устойчивости к дестабилизирующему воздействию мировой экономики и геополитических процессов.

### Цель статьи

Исходя из вышеизложенного, целью данной статьи является исследование предпосылок формирования конкурентоспособности региона в разрезе инновационной составляющей экономической безопасности в условиях кризиса.

### Изложение основного материала

В опубликованной еще в 1922 году “Тектологии” А. Богданова была впервые разработана общая теория кризисов (как часть общей теории систем) и акцентировалась их универсальная природа. Согласно ключевому в анализируемом отношении тезису этой работы, “всякое изменение (системы) должно рассматриваться как особый кризис. Всякая непрерывность может быть разбита анализом на бесконечную цепь кризисов”. При этом автор, во-первых, подчеркивал, что “равновесие является частным случаем кризиса. В каждом конкретном случае оно представляет собой определенный кризис движения и знаменует синтез тектологической формы этого движения... понятие кризиса для тектологии универсально”. Во-вторых, – обращал внимание на двойственную сущность кризисов: “Кризис является нарушением равновесия и в то же время процессом перехода к некоторому новому равновесию. Это последнее может рассматриваться как граница изменений, которые происходят при кризисе, или как

граница его тенденций. Если нам известны тенденции кризиса и те условия, в которых они разворачиваются, то есть возможность заранее предусматривать конечный результат кризиса - то определенное равновесие, к которому он тяготеет". В-третьих, - выделял в связи с этим два типа кризисов в развитии систем: "кризисы С" - "конъюгационные", сопряженные с образованием новых связей, и "кризисы Д" - "разделительные", т.е. знаменующие "разрывы связей, создание новых границ там, где их когда-то не было". Подобное выделение, впрочем, условно, так как "каждый кризис в действительности представляет цепь элементарных кризисов первого и второго типа... Исходный пункт всегда С, конечная фаза всегда Д. Схема одна - СД, допускающая, конечно, под каждым из двух знаков не единичный элементарный кризис, а их переплетающиеся последовательности"[1, с.39].

Показательной в этом отношении является трактовка термина «кризис», предложенная представителями голландской школы исследования кризисов: "серьезная угроза основным структурам или базовым ценностям или нормам (общественной) системы, которая заставляет принять кардинальное решение в условиях ограниченного времени и значительной неопределённости" [2, с.23].

Отечественные и зарубежные исследователи называют такие основные динамические характеристики кризисов конца XX - начала XXI столетия, как:

1. Усиление трансграничного характера кризисов. Кризисы, как и раньше, начинаются на региональном уровне, но их последствия временами касаются целых регионов мира и даже континентов.

2. Повышение роли средств массовой информации (СМИ) в формировании и развитии кризисов.

3. Кризисогенная роль технологического прогресса. Изменения в коммуникационно-информационной среде, которые происходят на протяжении последних десятилетий, носят революционный характер и оказывают неоспоримое влияние на развитие экономики и общества в целом.

4. Прецеденты ослабления экономической роли государства как фактор повышения уязвимости систем к кризисам.

5. Политизация кризисов и их последствий [3, с.63].

Итак, с одной стороны, кризис несёт в себе угрозы стабильности функционирования макроэкономических систем, а с другой стороны представляет собой процесс формирования новых качеств системы, то есть является одним из обязательных элементов её трансформации.

При этом преодоление кризисных явлений в национальной экономике, обусловленных конкурентным характером отношений в мировом хозяйстве, зависит от финансово-экономической конкурентоспособности государства на международном уровне. В свою очередь, конкурентоспособность национальной экономики в целом является результатом взаимодействия отдельных ее элементов, в результате которого возникает синергетический эффект.

Если рассматривать экономическую систему страны с точки зрения пространственной организации, в качестве основных ее элементов можно выделить отдельные регионы. Обеспечение финансово-экономической конкурентоспособности регионов, таким образом, является необходимым для обеспечения общей конкурентоспособности государства, а следовательно и инструментом, через который достигается состояние национальной экономики, позволяющее эффективно противостоять кризисным факторам существующей модели развития мировой экономики.

Для достижения поставленной цели исследования представляется необходимым во-первых, в разрезе поставленной цели уточнение определения понятия регион, во-вторых, анализ сущности экономической конкуренции и её функций на региональном уровне, в-третьих, систематизация подходов к определению термина «конкурентоспособность региона» и их обобщение, в-четвёртых, рассмотрение процессов межрегиональной конкуренции с точки зрения участников экономического соревнования, объектов соревнования и факторов, позволяющих победить в данном соревновании, и, в-пятых, обобщение полученных результатов в виде логико-структурной схемы.

Итак, регион, как единая социально-экономическая система - довольно сложное динамическое явление. С одной стороны, он представляет собой систему городов и сельских районов, которая характеризуется:

единством территории;

совпадением основных интересов (что позволяет создать их иерархию);

общностью научно-производственных и культурно-бытовых связей, социальной и производственной инфраструктур;

необходимостью согласованных подходов к решению проблем рационального природопользования, к формированию и использованию трудовых ресурсов, а также других вопросов.

С другой стороны, регион - это экономическая система, соответственно в

качестве его элементарных составляющих выступают предприятия и организации, при этом связи между ними являются системообразующими [4, с.4].

Анализ научных источников свидетельствует об отсутствии единого, универсального определения понятия „регион”. Как отмечает в своих работах Л. Савельев, „сформированные в последней трети XX столетия подходы к определению содержания понятия „регион” свидетельствуют, что оно стало междисциплинарным, многоаспектным и в каждом случае зависимым от целей, в связи с которыми сформулировано... Универсального определения региона, „на все случаи жизни”, так и не было создано” [5, с.181].

Исходя из задач, поставленных в данной работе, наиболее приемлемым определением региона будет регион экономический, а именно - территориально целостная часть единого хозяйственного комплекса страны с присущими ей взаимосвязанными признаками: характером производственной специализации и мерой комплексности его развития. По своей социально-экономической сущности экономический регион отражает его воспроизведенную целостность и наличие основной целевой функции, направленной на создание и обеспечение комфортных условий жизнедеятельности и существования всем субъектам, которые находятся на его территории (предприятиям, организациям, учреждениям и жителям) [6, с. 23-24].

При этом главной целью территориального управления является создание условий для обеспечения материальных и духовных нужд населения данного региона. На практике эта цель реализуется путем обеспечения функционирования и развития экономики и социальной сферы, охраны окружающей среды и др. Основной функцией региональных органов государственной исполнительной власти является не только осуществление государственной политики на местах, но и эффективное развитие экономического потенциала территории [7, с.38], то есть – обеспечение региональной конкурентоспособности.

Что же в современных условиях понимается под конкурентоспособностью? Толкование термина “конкурентоспособность” непосредственно связано с содержанием понятия “конкуренция”. В переводе с латыни данный термин означает соперничество, борьбу за достижение лучших результатов в любой сфере. Отсюда “конкурентоспособность” можно определить как способность в процессе соперничества достигать лучших результатов в любой деятельности или сфере

функционирования. В экономике соперничество приобретает форму экономического соревнования субъектов хозяйствования.

Конкуренция стран, в отличие от конкуренции фирм и отраслей, характеризуется существенным влиянием развития социальной сферы (сферы воспроизводства человеческих ресурсов). Конкуренция стран - это не только соревнование за создание лучших условий для бизнеса, но и соревнование за создание лучших условий жизнедеятельности населения. При этом воспроизводство человеческих ресурсов в каждой стране в первую очередь происходит именно на региональном уровне [8, с.118-119].

Международная и межрегиональная конкуренция охватывает намного более продолжительные, чем при отраслевом и межфирменном соперничестве, промежутки времени, даже если горизонт планирования политического руководства государства не превышает 4-7 лет. В отличие от фирмы, которая оперирует капиталовложениями, как правило, в одной отрасли или отраслевом комплексе, национальная экономика зависит от межотраслевых и межрегиональных перетоков капитала [9, с.48]. Кроме того, государство имеет в своем распоряжении ресурсы для проведения в той или иной мере национальной и региональной научно-технической, социальной, инвестиционной политики.

На сегодняшний день существует много разнообразных определений конкурентоспособности регионов. Среди них можно выделить следующие:

в рамках проекта ОЭСР “Инфраструктура для промышленной конкурентоспособности” предложено понимать под конкурентоспособностью “способность компаний, отраслей промышленности, регионов, наций или групп соседних стран вырабатывать высокий уровень дохода и занятости, находясь в условиях международной конкуренции” [10, с.116];

конкурентоспособность региона - это способность расположенных на его территории предприятий соревноваться с реальными и потенциальными конкурентами за потребителя на целевом сегменте рынка в конкретный период времени благодаря определенному сочетанию свойств производимых ими товаров, условий воспроизводства основных факторов производства и использования других управляемых факторов [11, с.80];

конкурентоспособность региона - обусловленное экономическими, социальными, политическими и другими факторами положение региона и его отдельных товаропроизводителей на внутреннем и внешнем рынках, которое выражается через показатели (индикаторы),

адекватно характеризующие такое состояние и его динамику [12, с.30];

конкурентоспособность региона - способность региона обеспечивать производство конкурентоспособных на международном уровне товаров и услуг в условиях эффективного потребления существующих факторов производства (экономического потенциала), использование существующих и создание новых конкурентных преимуществ, сохранение (повышение) уровня жизни при соблюдении международных экологических стандартов [13].

Большинством исследований на всех уровнях анализа выделяется ценовая и структурная (общая) конкурентоспособность. При этом общая конкурентоспособность системно освещает производственно-технологический и экспортный потенциал региона [14, с.40]. В целом, конкурентоспособной можно считать экономику региона, которая обеспечивает:

поддержку возрастающих стандартов жизни;

привлечение инвестиций в производственную и непромышленную сферы экономики региона;

достижение и сохранение таких позиций, при которых предприятия хозяйственного комплекса региона успешно реализуют на внутреннем и внешнем рынке свою продукцию.

Систематизируя существующие подходы к определению конкурентоспособности региона, можно определить ее, как способность использовать конкурентные преимущества и позиции региона на целевых рынках с целью выполнения его основной функции. Предложенный подход требует определения тех параметров экономической системы региона, которые в первую очередь используются для определения его конкурентных позиций. При этом, рассматривая конкурентоспособность региона как элемент международной конкурентоспособности страны в целом, необходимо рассматривать эти параметры во взаимосвязи с общегосударственными показателями конкурентоспособности.

Если рассматривать конкурентоспособность региона с позиций структуры экономического соревнования, в рамках которого регион старается достичь определенных преимуществ, необходимо определить участников подобного соревнования, объект соревнования и факторы, которые позволяют достичь в этом соревновании победы.

Итак, субъектами конкуренции на региональном уровне могут быть как отдельные регионы в рамках страны, так и территории других государств. При этом, когда речь идет о конкуренции регионов в рамках страны,

объектом соревнования в первую очередь становятся внутренние и внешние инвестиции, а также трудовые ресурсы. Когда конкурируют регионы, разделенные государственными границами, объектом конкуренции в первую очередь становятся потребители продукции промышленных комплексов регионов на мировом и внутреннем рынках.

Исходя из специфических свойств объектов конкуренции можно назвать главные факторы достижения конкурентных преимуществ. Если объектом соревнования являются инвестиции, главными факторами становятся природные условия (географическое расположение территории, наличие природных ресурсов), человеческий потенциал (наличие работников с достаточным уровнем квалификации), а также ёмкость и доступность целевых рынков, институциональная инфраструктура и законодательная база инвестирования. Если объектом соревнования являются трудовые ресурсы, главным фактором становится достигнутый в рамках данного региона средний уровень жизни (средний уровень оплаты труда, развитость коммунальной инфраструктуры и др.). Если объектом соревнования являются потребители продукции, главными факторами становятся технологические факторы, т.е. способность за счет новых и усовершенствованных технологий повышать качество и снижать себестоимость продукции, которая производится предприятиями промышленного комплекса региона.

Все факторы конкурентоспособности экономического комплекса региона можно разделить на поддающиеся и не поддающиеся управлению. Такие факторы, как географическое положение и природные ресурсы, конечно, управлению не подлежат. С другой стороны, такие факторы, как уровень жизни населения, институциональная инфраструктура и законодательная база экономической деятельности, развитие технологий и некоторые другие могут быть целенаправленно изменены, а следовательно, поддаются управлению на региональном и общегосударственном уровне.

Следует отметить, что между отдельными факторами конкурентоспособности, которые поддаются управлению, существует определенная иерархическая взаимосвязь. Так, наличие человеческого потенциала как фактора конкурентоспособности в соревновании за инвестиции зависит от среднего уровня жизни в регионе как фактора конкурентоспособности в соревновании за сохранение высококвалифицированных работников. В свою очередь, высокий уровень жизни в регионе может быть обеспечен при условии роста в

рамках региона доходов предприятий, достижимого благодаря увеличению объемов реализованной на внутреннем и внешнем рынках продукции (предоставленных услуг) за счет улучшения качества и повышения эффективности экономической деятельности.

Известный австрийский экономист Й. Шумпетер одним из первых в качестве ключевого источника повышения прибыли предприятия указывал на “последовательное внедрение в экономический процесс технических, коммерческих и организационных инноваций” [15]. При этом нововведения рассматривались в крайне широком смысле, включая технические новации всех видов, изменения в коммерческой и финансовой деятельности (в том числе освоение новых и расширение старых рынков, поиск новых источников снабжения и ресурсов, включая финансовые), любые улучшения в организации производства, сбыта и т.п. На сегодняшний день данный подход является общепризнанным и не подвергается сомнению ни в научной среде, ни

на уровне практиков.

Таким образом, объективной основой конкурентоспособности региона безотносительно субъекта и объекта конкуренции является повышение привлекательности отдельных элементов хозяйственного комплекса региона на целевых рынках. При этом главным инструментом достижения высокой конкурентоспособности региона является инновационная деятельность.

Проведенный объект-субъектный анализ позволяет представить межрегиональную конкуренцию в виде логико-структурной схемы (рис. 1). Большинство специалистов обычно сходятся в том, что основные черты современного развития мировой экономической системы предопределяются качественными, революционными изменениями в технико-технологическом, транспортно-коммуникационном, информационном базисе экономики и всего человеческого сообщества, которые происходят на протяжении последних десятилетий [16, с.5].

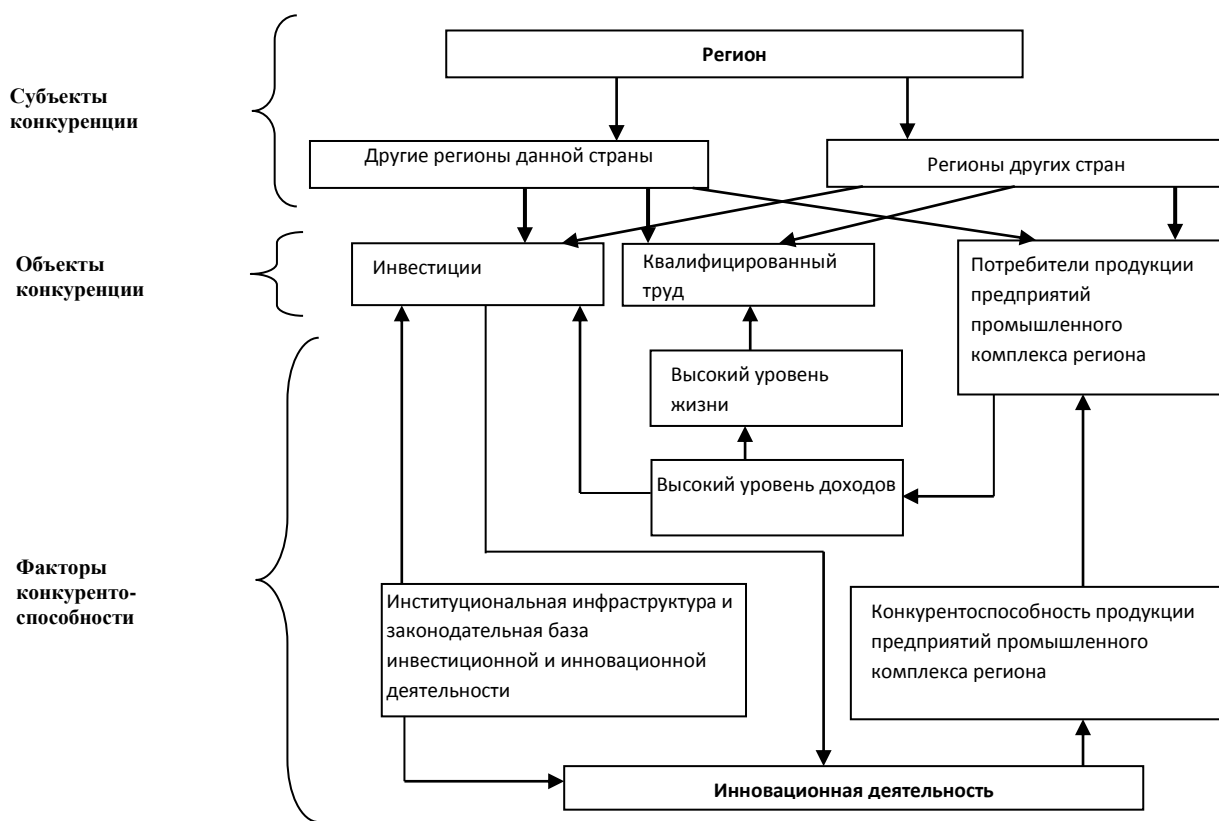


Рисунок 1 – Логико-структурная схема межрегиональной конкуренции

При этом формирующиеся глобальные вызовы требуют от каждого государства высокой степени «...конкурентоспособности совокупного государственного потенциала» [16, с.106].

Согласно предложенного российским экономистом К. Астаповым подхода к оценке потенциала развития экономических систем основными его критериями являются человеческий капитал и инновационная

деятельность [17, с.63]. По мнению М. Гельвановского, "...Конкурентоспособность может быть достигнута и на базе нетехнологических преимуществ, прежде всего, благодаря низкой стоимости факторов производства и девальвации национальной валюты. Тем не менее это - конкурентоспособность бедных стран... Нетехнологические конкурентные преимущества играют важную роль в отраслях с высокой взаимозаменяемостью продукции с преобладанием в экспорте низкотехнологических продуктов" [18, с.72]. Устоявшимся в научной среде является мнение, что одними из ключевых показателей экономической безопасности на макроуровне являются доля инновационной продукции в общем объеме изготовленной продукции и доля машиностроения и металлообработки в промышленном производстве [19, с.60]. Пороговыми значениями этих показателей являются соответственно 15% и 25%. Если реальные показатели национальной экономики ниже пороговых, экономическая безопасность страны находится в нестабильном состоянии.

Очевидными являются причины, по которым именно эти два параметра имеют такое большое значение. Ведь экономическое развитие

предусматривает повышение эффективности хозяйственной деятельности, происходящее за счёт использования новой техники и оборудования, произведенного машиностроительными предприятиями. Так инновация в машиностроении оказывает мультипликативный эффект, приводя к комплексным инновациям в других отраслях и иницируя инновационную модель развития региона и страны в целом. При этом низкий удельный вес собственной машиностроительной продукции в общем объеме потребления означает чрезмерную зависимость от импорта, что приводит к вытеснению отечественных научно-исследовательских учреждений с рынка новейших технологий, снижению спроса на высококвалифицированные кадры и падению интеллектуального потенциала страны.

Учитывая приведенный подход, представляется рациональным провести причинно-следственный анализ влияния инновационной деятельности в регионе на его финансово-экономическую конкурентоспособность. Логическая модель влияния инновационной деятельности на конкурентоспособность региона представлена на рис. 2.

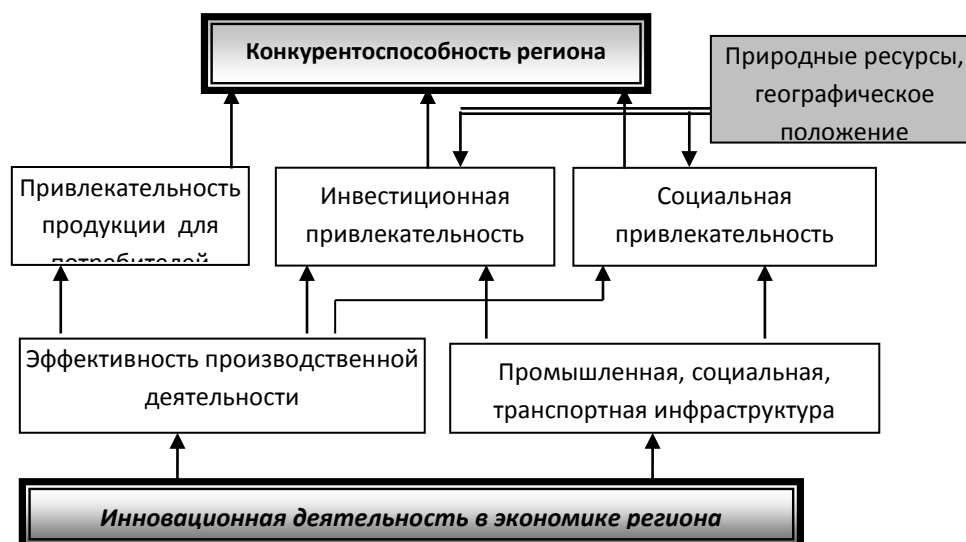


Рисунок 2 – Логическая модель влияния инновационной деятельности в экономике региона на его финансово-экономическую конкурентоспособность

Неконтролируемое влияние на конкурентоспособность оказывает наличие на его территории определенных природных ресурсов и географическое расположение. Основными направлениями, по которым проявляется эффект внедрения инноваций в экономике региона, являются повышение

эффективности производственной деятельности и усовершенствование промышленной, социальной и транспортной инфраструктуры. Достижение положительного эффекта по приведенным направлениям усиливает конкурентные позиции региона через повышение его инвестиционной и социальной

привлекательности, а также привлекательности продукции промышленности региона для потребителей.

Вышеизложенное предопределяет необходимость уточнения понятийного аппарата инноватики. В Законе Республики Беларусь “Об инновационной деятельности” инновация определена как введенные в гражданский оборот или используемые для собственных нужд новая или усовершенствованная продукция, новая или усовершенствованная технология, новая услуга, новое организационно-техническое решение производственного, административного, коммерческого или иного характера [20, ст.1].

С точки зрения объекта изменений выделяют четыре типа инноваций: продуктные, технические, процессные и организационно-управленческие [21, с.46].

*Продуктные* инновации позволяют создавать новые товары. Они варьируются от значительного расширения номенклатуры до повышения потребительских качеств традиционной продукции. *Технические* инновации, т.е. введение в эксплуатацию нового оборудования, чаще всего обусловлены или переходом к выпуску новой продукции, или необходимостью кардинального улучшения качества изделий, которые уже выпускаются. *Процессные* инновации позволяют использовать новые технологические процессы для производства традиционных и новых товаров. *Организационно-управленческие* инновации как правило сопровождают 3 предыдущих типа инноваций, но могут быть и самостоятельными, направленными на повышение эффективности хозяйствования экономического субъекта.

По масштабам распространения рассматривают инновации, которые стали основанием для создания новой отрасли, производящей однородный продукт, и инновации, которые находят применение во всех отраслях и сферах народного хозяйства [22]. Часто эти два типа инноваций во времени идут один за другим.

По мнению М.А. Алфимова, инновации могут быть базисными и прогрессивными [23]. Высшей формой базисных инноваций является связанное создание новых продуктов и новых рыночных ниш. Прогрессивные инновации - это нововведения, которые служат усовершенствованию товаров (услуг).

Более детальную классификацию инноваций по глубине внесенных изменений предложил чехословацкий экономист Ф. Валента [24]:

нулевого порядка - регенерация первоначальных свойств системы, сохранение и восстановление ее существующих функций;

первого порядка - изменение количественных свойств системы;

второго порядка - перегруппировка составных элементов системы с целью улучшения ее функционирования;

третьего порядка - адаптивные изменения элементов производственной системы с целью приспособления друг к другу;

четвертого порядка - простейшее качественное изменение, которое выходит за рамки простых адаптивных изменений, когда первоначальные признаки системы не изменяются, а происходит только некоторое улучшение их полезных свойств;

пятого порядка - изменяются все или большинство свойств системы, но базовая структурная концепция сохраняется, т.е. новое поколение;

шестого порядка - качественное изменение первоначальных свойств системы, первоначальной концепции без изменения функционального принципа, т.е. новый вид;

седьмого порядка - высшее изменение в функциональных свойствах системы и ее частей, которые изменяет ее функциональный принцип, т.е. новый род.

Наконец, Н.Афанасьев и Р.Чемчикаленко в работе [25, с.268] предлагают определять инновацию как результат комплексного целенаправленного системного преобразования элементов потенциала предприятия с целью получения одного из возможных видов эффекта (экономического, социального, экологического и т.п.).

Обобщение приведенных подходов к определению и классификации инноваций позволяет сформулировать усовершенствованную их классификацию, включающую 3 вида инноваций с точки зрения сферы внедрения и вида ожидаемого эффекта:

Производственная инновация - применение в практической деятельности результатов проектно-конструкторской деятельности, направленное на получение дополнительного экономического и (или) экологического эффекта. Это продуктные, процессные или технические инновации четвертого, пятого, шестого и седьмого порядков в реальном секторе экономики.

Административная инновация - структурное или функциональное изменение (коррекция) системы управления. Это организационно-управленческие инновации нулевого, первого, второго или третьего порядков в реальном секторе и (или) в секторе государственного управления.

Социальная инновация - структурное или функциональное изменение социальной системы (включая производственную сферу),



направленное на достижение дополнительного социального эффекта. Это организационно-управленческие инновации любого (от нулевого до седьмого включительно) порядка в социальной сфере и (или) сфере государственного управления.

Производственные, административные и социальные инновации взаимодополняют и взаимозависят друг от друга. Так, условия для внедрения производственных инноваций создают административные, или наоборот, производственные инновации порождают административные. Социальные инновации становятся действенными при условии постоянного развития, которое обеспечивается производственными инновациями, или наоборот, результативные социальные инновации дают толчок к активному внедрению производственных инноваций. Можно определить инновационное развитие региона как совокупность перманентных взаимосвязанных производственных, административных и социальных инноваций в его экономической системе. При этом процесс регионального воспроизводства инноваций можно представить как совокупность следующих этапов, замкнутых в "цепь":

1. Административные инновации на уровне системы государственного управления в регионе, содействующие улучшению инвестиционного климата и активизации внедрения производственных инноваций.

2. Административные инновации на уровне промышленных предприятий, связанные с подготовкой организационной структуры промышленных объектов к восприятию производственных инноваций.

3. Производственные инновации в машиностроительном комплексе, которые содействуют повышению технологического уровня производства и получению дополнительного положительного экономического эффекта.

4. Производственные инновации в отраслях-потребителях продукции машиностроения, направленные на повышение эффективности производства.

5. Административные инновации на уровне промышленных предприятий, связанные с изменением структуры производственного процесса.

6. Социальные инновации на государственном и региональном уровне, направленные на повышение качества жизни населения.

7. ...Переход на этап (1)

## **Выводы**

Полученные результаты исследования дают возможность утверждать, что:

1. В современных условиях в основе развития национальной экономики в первую очередь лежит способность к эффективному преодолению кризисных явлений, которые перманентно возникают вследствие усиления конкурентной борьбы на всех уровнях экономического пространства, т.е. финансово-экономическая конкурентоспособность на макроуровне. С точки зрения пространственной организации основными элементами национальной экономики являются экономические системы регионов страны. Обеспечение финансово-экономической конкурентоспособности регионов, таким образом, является необходимым для обеспечения общей конкурентоспособности государства.

2. По своей социально-экономической сущности экономический регион отражает его воспроизведенную целостность и наличие основной целевой функции, направленной на создание и обеспечение комфортных условий жизнедеятельности и существования всем субъектам, которые находятся на его территории (предприятиям, организациям, учреждениям и жителям). Систематизируя существующие подходы к определению конкурентоспособности региона, можно определить ее, как способность использовать конкурентные преимущества и позиции региона на целевых рынках с целью выполнения его основной функции.

3. Ключевыми параметрами финансово-экономической конкурентоспособности с точки зрения экономической безопасности государства являются доля инновационной продукции в общем объеме изготовленной продукции и доля машиностроения и металлообработки в промышленном производстве. Это обусловлено тем, что экономическое развитие предусматривает повышение эффективности хозяйственной деятельности, происходящее за счёт использования новой техники и оборудования, произведенного машиностроительными предприятиями. Так инновация в машиностроении оказывает на инновационную сферу мультипликативный эффект, приводя к комплексным инновациям в других отраслях и иницируя инновационную модель развития региона и страны в целом. При этом низкий удельный вес собственной машиностроительной продукции в общем объеме потребления означает вытеснение отечественных научно-исследовательских учреждений с рынка новейших технологий, снижение спроса на высококвалифицированные кадры и падение интеллектуального потенциала страны.

4. Инновационное развитие региона представляет собой синергетический эффект от

результатов развития отдельных элементов экономической системы региона, таких как промышленность, государственное управление, социальная сфера. Можно определить его как совокупность перманентных взаимосвязанных производственных, административных и социальных инноваций в региональной экономической системе. Базой инновационного развития региона служит инновационное развитие промышленности, а ключевым элементом инновационного развития промышленности - инновационное развитие машиностроительного комплекса как элемент процесса регионального воспроизводства инноваций. При этом в данной статье предложено структурирование процесса регионального воспроизводства инноваций в виде последовательности из семи этапов, замкнутых в "цепь".

### Литература

1. Порфирьев Б. Современные концепции кризисов и принятие управленческих решений [текст] / Б.Н. Порфирьев // Российский экономический журнал. – 2004. – №4. – С. 37-50.
2. Svedin, Lina M. Organizational Cooperation in Crises / Lina M. Svedin. – London: Ashgate Publishing, 2009. – 174 p.
3. Петров Ю., Жукова М., Карапетян А. Становление глобально-информационного технологического уклада в России: сценарии технико-экономического развития и задачи реформирования финансовых институтов [текст] / Ю. Петров и др. // Российский экономический журнал. – 2002. – №2. – С. 61-69.
4. Адамов Б.И., Кавыршина В.А. Реструктуризация хозяйственного комплекса региона и её влияние на развитие городов Донецкой области / Б.И. Адамов, В.А. Кавыршина // Менеджер. – 2002. – №6 (22). – С. 4-10.
5. Денисов Ю., Савельев Л., Шевчук Л. Региональный дискурс: сутність, еволюція, сучасні уявлення, перспективи розвитку / Ю. Денисов та ін. // Регіональна економіка. – 2003. – №1. – С.179-185.
6. Василенко В.Н. Архитектура регионального экономического пространства. – Донецк: Юго-Восток, 2006. – 311 с.
7. Максимов В. Стимулирование эффективного использования экономического потенциала региона / В. Максимов // Академічний огляд. – 2001. – №2. – С. 37-40.
8. Червова Л., Кузьменко Л., Дубинина М., Кацура С., Ляшенко В. Потенциал конкурентоспособности промышленности регионов Украины // Общество и экономика. – 2006. – №2. – С.113-135.
9. Рей А. Конкурентные стратегии государства и фирм в экспортно-ориентированном развитии // Вопросы экономики. – 2004. – №8. – С.46-65.
10. Лазарева Е.В. Влияние инновационной деятельности на уровень конкурентоспособности регионов / Е.В. Лазарева // Экономические инновации. – 2003. – №17. – С.115-129.
11. Амоша А.И., Ляшенко В.И., Дубинина М.В., Марченко В.Н. О ранговом методе реализации потенциала сравнительной конкурентоспособности промышленности регионов Украины / А.И. Амоша и др. // Прометей. – 2005. – №2(17). – С.78-97.
12. Селезнёв А.З. Конкурентные позиции и инфраструктура рынка России / А.З. Селезнёв. – М.: Юрист, 1999. – 384 с.
13. Реутов В.С. Регіональний вимір трансформаційних зрушень економіки України: монографія / В.С. Реутов. – Сімферополь: ПП «Підприємство «Фенікс», 2010. – 432 с.
14. Бутко Н. Инвестиционные аспекты повышения конкурентоспособности экономики / Н. Бутко // Экономика Украины. – 2004. – №4. – С.40-46.
15. Shumpeter J. A. History of economic Analysis / J.A. Schumpeter. – N.Y.: Oxford University Press, 1996 – 1320 p.
16. Черковец О.В. Глобализация. Экономические реалии и политические мифы. Монография [текст] / О.В. Черковец. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2006. – 110 с.
17. Астапов К. Стратегия развития в постиндустриальной экономике [текст] / К. Астапов // Мировая экономика и международные отношения. – 2006. – №2. – С.57-65.
18. Гельвановский М., Жуковская В., Трофимова И. Конкурентоспособность в микро-, мезо- и макроуровневом измерении [текст] / М.И. Гельвановский и др. // Российский экономический журнал. – 1998. – №3. – С.67-77.
19. Экономическая безопасность России. Общий курс: учебник [текст] / под ред. В.К. Сенчагова. – М.: БИНОМ, 2012. – 815 с.
20. Закон Республики Беларусь «О государственной инновационной политике и инновационной деятельности в Республике Беларусь» от 10 июля 2012 г. № 425-3 / Электронный ресурс. Режим доступа: <http://www.pravo.by/main.aspx?guid=3871&p0=H11200425&p1=1>
21. Астапов К. Инновации промышленных предприятий и экономический рост [текст] / К. Астапов // Экономист. – 2002. – №6. – С. 44-51.
22. Кругликов А.Г. Системный анализ научно-технических нововведений [текст] / А.Г. Кругликов. – М.: Наука, 1991. – 120 с.

23. Алфимов М. России нужны новые модели инновационного процесса [текст] / М. Алфимов // Экономические стратегии. – 1999. – №1. – С.63-76.

24. Валента Ф. Творческая активность – инновации – эффект [текст] / Ф. Валента. – М:

Эксмо, 2008. – 400 с.

25. Афанасьев Н.В., Чемчикаленко Р.А. Анализ существующего понятийного аппарата теории инноватики // Економічний вісник НТУУ “КПІ”. - 2004. - №1. - С.365 – 370.

***Павлыш Э.В. Логико-структурная модель влияния инновационной составляющей на обеспечение региональной конкурентоспособности. В статье рассмотрена сущность и структура межрегиональной конкуренции и конкурентоспособности региона. Исследованы факторы конкурентоспособности региона. Очерчена роль инновационной составляющей в обеспечении конкурентоспособности региона.***

***Ключевые слова:** система, инновация, регион, конкурентоспособность, фактор.*

***Pavlysh E.V. Logic-structural model of influence of innovative component in ensuring regional competitiveness. The article contains a review of interregional competition and regional competitiveness essence and structure. Regional competitiveness factors are investigated. The role of innovational activities in sustaining regional competitiveness is described.***

***Keywords:** system, innovation, region, competitiveness, factor.*

*Статья поступила в редакцию 22.02.2018  
Рекомендована к публикации д-ром физ.-мат. наук А.С. Миненко*

## Об использовании метода Галеркина при математическом моделировании диффузии экситонов, вызванной пульсирующим электронным зондом в полупроводниковой мишени

М.А. Степович<sup>1,2</sup>, Е.В. Серегина<sup>3</sup>, А.Н. Поляков<sup>1</sup>, О.И. Лямина<sup>4</sup>  
Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского<sup>1</sup>  
Ивановский государственный университет<sup>2</sup>  
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет), Калужский филиал<sup>3</sup>  
Институт общей и неорганической химии им. Н.С. Курнакова РАН<sup>4</sup>  
m.stepovich@rambler.ru<sup>1,2</sup>, evfs@yandex.ru<sup>3</sup>, lyam@igic.ras.ru<sup>4</sup>

*Степович М.А., Серегина Е.В., Поляков А.Н., Лямина О.И. Об использовании метода Галеркина при математическом моделировании диффузии экситонов, вызванной пульсирующим электронным зондом в полупроводниковой мишени. Рассмотрены некоторые возможности использования проекционного метода Галеркина для моделирования двумерной диффузии экситонов, возбуждаемых пульсирующим электронным зондом в полупроводниковой мишени. Задача решена в цилиндрической системе координат. Искомая концентрация экситонов найдена в виде частичной суммы двойного ряда Фурье по системе модифицированных функций Лагерра. Получена порядковая оценка погрешности невязки, соответствующей приближенному решению нестационарного уравнения их диффузии. При моделировании использовались параметры, характерные для нитрида галлия.*

**Ключевые слова:** метод Галеркина, ряд Фурье, диффузия, полупроводник.

### Общая постановка проблемы

Сфокусированные электронные пучки (электронные зонды) широко используются для локальной диагностики различных объектов в физике, материаловедении, минералогии и в других областях науки и техники. При взаимодействии электронного зонда с мишенью в последней возникает ряд явлений, которые могут быть зарегистрированы и полученный информативный сигнал может быть использован для качественного анализа и количественных исследований облучаемой мишени. При проведении количественных исследований, как правило, экспериментально измеренный информативный сигнал сравнивается с математической моделью рассматриваемого явления или процесса, при этом результаты идентификации параметров мишени во многом определяются адекватностью используемой модели описываемому физическому явлению. В силу сложности математических моделей в задачах идентификации используются численные методы, удачный выбор и использование которых во многом определяют результаты исследований. При электроннозондовых исследованиях полупроводниковых мишеней особое значение имеют процессы, связанные с

диффузией и рекомбинацией неравновесных неосновных носителей заряда, генерированных в мишени электронным пучком. Некоторые аспекты использования численных методов для проведения количественных исследований таких объектов и составляют предмет рассмотрения в настоящей работе.

### Анализ последних исследований и публикаций

При электроннозондовых исследованиях полупроводниковых объектов особое значение приобретает задача корректного количественного описания диффузионных процессов, возникающих при взаимодействии электронного пучка с полупроводниковой мишенью [1, 2]. Знание этих процессов позволяет построить математические модели, необходимые для количественного изучения полупроводников, в частности моделей наиболее информативных сигналов: тока, наведенного электронным зондом и катодоллюминесценции. В силу сложности математических моделей таких процессов, для их количественного описания нередко возникает необходимость применения численных методов [3-6]. Видимо, в силу этого, а также некоторых проблем, возникающих при экспериментальной реализации этого метода, в

катодолюминесцентной микроскопии методы математического моделирования люминесцентного излучения, возникающего при взаимодействии электронов пучка с полупроводниковой мишенью, применяются довольно редко; ниже описаны некоторые возможности такой реализации, предлагаемые нами.

В последнее время особое значение приобретают исследования различных объектов с использованием электронных пучков низких (до 8...10 кэВ) энергий, поскольку использование такого режима работы электронно-зондового устройства позволяет получить информацию об объекте исследования, которую подчас бывает сложно получить с использованием электронных пучков средних (10...50 кэВ) энергий [7]. В ряде случаев при использовании низкоэнергетичных электронных пучков для проведения количественных исследований при моделировании процессов взаимодействия электронов с конденсированным веществом достаточно рассмотреть процессы, происходящих в приповерхностной области мишени. Математически это означает использование двумерных моделей, в которых описываются процессы, происходящие на поверхности мишени. Например, в работах [8, 9] рассмотрены математические модели, описывающие процесс возбуждения катодолюминесцентного излучения, обусловленного рекомбинацией экситонов и возникающего при взаимодействии электронного зонда с поверхностью прямозонного полупроводникового материала. Сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными [10, 11] подтверждает обоснованность выбранного подхода к такому количественному описанию катодолюминесценции одного из перспективных материалов полупроводниковой опто- и СВЧ электроники – монокристаллического нитрида галлия. В то же время, как следует из анализа литературных данных, вопросы математической корректности предлагаемых моделей [12, 13], равно как и вопросы, связанные с численной реализацией этих моделей и оценки возникающих при этом погрешностей [3-6] рассмотрены недостаточно подробно. Отчасти задача восполнить этот пробел и является целью настоящей работы.

### Постановка задачи

В настоящей работе изложены результаты использования проекционного метода Галеркина для моделирования двумерного распределения экситонов в полупроводниковом материале, облученном остро сфокусированным пучком электронов.

Физическое обоснование решаемой задачи следующее: при катодолюминесцентных исследованиях полупроводников для повышения отношения «сигнал-шум» используется пульсирующий электронный пучок. В результате в начале электронного импульса происходит разгорание люминесценции, а при прекращении облучения – спад излучения. Отметим, что в катодолюминесцентной микроскопии облучение образца может привести к повышению его локальной температуры [14, 15] и, как следствие, к изменению энергетических характеристик полупроводника (ширины запрещенной зоны и т.п.). В результате может измениться спектр катодолюминесцентного излучения, что может привести к необходимости учёта этого явления при проведении количественных измерений. На характер спектра катодолюминесценции может оказать влияние и поглощение излучения в объеме полупроводника [16-18]. Поскольку предметом рассмотрения в настоящей работе является двумерная диффузия, реализуемая при низких энергиях электронов пучка, то учет этих объемных явлений здесь не проводится.

Экспериментально измеренный сигнал катодолюминесценции, отвечающий одному импульсу облучения, представлен на рисунке 1.

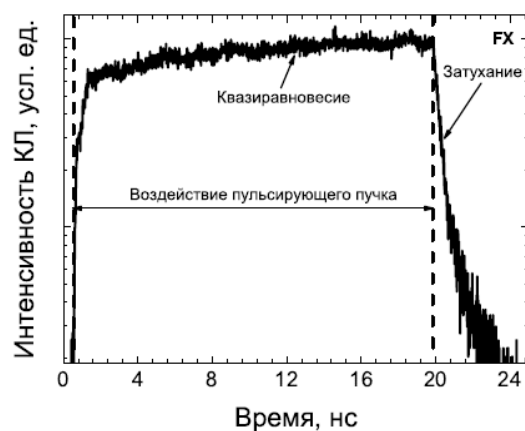


Рисунок 1 – Экспериментально измеренный сигнал катодолюминесценции нитрида галлия, отвечающий одному импульсу облучения. Пунктиром показано время начала и конца электронного импульса. Энергия электронов 5 кэВ, температура мишени 5 К

Для количественного описания процесса диффузии экситонов в полупроводнике необходимо вначале найти распределение генерированных экситонов в состоянии квазиравновесия (разгорание люминесценции), после чего описать их распределение при отключении электронного пучка (затухание люминесценции). Математически это приводит к необходимости вначале решить стационарную задачу диффузии, после чего использовать

полученные результаты для решения нестационарной задачи.

Исходная задача может быть решена в цилиндрической системе координат, при этом искомое распределение экситонов находится в виде частичной суммы двойного ряда Фурье по системе модифицированных функций Лагерра. В работах [19, 20] была получена порядковая оценка погрешности невязки, соответствующей приближенному решению стационарного уравнения диффузии проекционным методом Галеркина. Настоящая работа продолжает такие исследования и ставит задачу дать оценку погрешности невязки, соответствующей приближенному решению нестационарного уравнения диффузии.

### Исходная аналитическая модель

Концентрация экситонов  $c(x, y, t)$  в точке с координатами  $(x, y)$  может быть найдена как решение нестационарного дифференциального уравнения диффузии

$$c_t = D\Delta c - c/\tau \quad (1)$$

с начальным условием

$$c(x, y, 0) = n(x, y) \quad (2)$$

Здесь  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  — двумерный оператор Лапласа,  $D$  — коэффициент диффузии и  $\tau$  — время жизни экситонов, а функция  $n(x, y)$  может быть найдена, как решение стационарного дифференциального уравнения, описывающего диффузию экситонов в состоянии квазиравновесия:

$$D\Delta n - n/\tau = -\Phi(x, y) \quad (3)$$

где  $\Phi(x, y)$  — функция источника генерации экситонов, которая определяется характером возбуждения и свойствами материала. В случае узкого электронного пучка, электронного зонда, область генерации экситонов может быть приближенно описана функцией распределения Гаусса, что дает для правой части (3) соотношение  $G_0\varphi(x, y)$ . Здесь  $\varphi(x, y)$  — плотность двумерного нормального распределения Гаусса, а  $G_0$  — частота генерации экситонов.

Переходя к цилиндрической системе координат, получим следующее уравнение:

$$r \frac{\partial^2 c(r, t)}{\partial r^2} + \frac{\partial c(r, t)}{\partial r} - \frac{1}{D} r \frac{\partial c(r, t)}{\partial t} - \frac{1}{\lambda^2} r c(r, t) = 0, \quad (4)$$

с граничными условиями

$$c(r, 0) = n(r), \quad c(\infty, \infty) = 0, \quad (5)$$

где  $\partial^2 c(r, t)/\partial \varphi^2 = 0$ , поскольку  $c(r, \varphi, t) \equiv c(r, t)$ ,  $\lambda = \sqrt{D\tau}$  — диффузионная длина экситонов. Тогда уравнение (3) примет вид:

$$r \frac{d^2 n(r)}{dr^2} + \frac{dn(r)}{dr} - \frac{1}{\lambda^2} r n(r) = -\frac{1}{D} r \Phi(r) \quad (6)$$

### Проекционная аппроксимация исходной модели, основанная на применении метода Галеркина

Для реализации проекционного метода Галеркина выберем двумерный базис из модифицированных функций Лагерра с параметрами, ускоряющими сходимость ряда [21]:

$$\varphi_{i,j}(r, t) = \varphi_i(r)\varphi_j(t) = \exp(-\gamma_1 r/2)L_i(\gamma_1 r)\exp(-\gamma_2 t/2)L_j(\gamma_2 t),$$

которые определяются через многочлены Чебышева-Лагерра  $L_i(\gamma_1 r)$  по переменной  $r$  и многочлены  $L_j(\gamma_2 t)$  по переменной  $t$  с параметрами  $\alpha_1 = 0$  и  $\alpha_2 = 0$  соответственно [21],  $i, j = 0, 1, 2, \dots$ . Здесь параметры  $\gamma_1 > 0$  и  $\gamma_2 > 0$  используются для оптимизации вычислительной схемы.

В методе Галеркина предполагается, что неизвестная функция  $c(r, t)$  может быть достаточно точно представлена приближенным решением:

$$c_{m+1}(r, t) = c_m(r, t) + c_0(r, t), \quad (7)$$

где

$c_m(r, t) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij} \varphi_i(r)\varphi_j(t)$  — прямоугольная частичная сумма двойного ряда Фурье-Лагерра порядка  $m \times m$  функции  $c(r, t)$ , а

$$c_0(r, t) = p_0(r)\varphi_m(t),$$

$$c_0(r) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i^n \varphi_i(r) - \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij} \varphi_i(r)\varphi_j(0) / \varphi_m(0).$$

Функция  $c_0(r, t)$  введена, чтобы удовлетворить граничным условиям,  $c_i^n$  — коэффициенты разложения функции  $n(r)$ , которые находятся из решения уравнения (6), а неизвестные коэффициенты разложения

$$c_{ij} = \frac{i!j!}{\Gamma(i+1)\Gamma(j+1)} \int_0^\infty \int_0^\infty c(r, t)\varphi_i(r)\varphi_j(t)d(\gamma_1 r)d(\gamma_2 t)$$

искомой функции  $c(r, t)$  согласно методу Галеркина определяются из решения следующей системы уравнений:

$$(R, \varphi_k(r)\varphi_l(t)) = 0, \quad k, l = \overline{0, m-1}. \quad (8)$$

Здесь

$$R = r \frac{\partial^2 c_{m+1}(r,t)}{\partial r^2} + \frac{\partial c_{m+1}(r,t)}{\partial r} - \frac{1}{D} r \frac{\partial c_{m+1}(r,t)}{\partial t} - \frac{1}{\lambda^2} r c_{m+1}(r,t)$$

— невязка исходного уравнения (4).

Обозначим столбцы (растянутые в столбцы матрицы) из коэффициентов разложения неизвестной функции  $c(r,t)$  и функции  $n(r)$  по выбранному базису через  $C_{mm}$  и  $C_m^n$  соответственно. Используя кронекерово произведение, введём матрицу  $D_{mm}^r$  дифференцирования по переменной  $r$   $D_{mm}^r = D_m^{\gamma_1} \otimes E_m$  и по переменной  $t$  —  $D_{mm}^t = E_m \otimes D_m^{\gamma_2}$ , где  $E_m$  — единичная матрица, а  $D_m^{\gamma}$  — матрица дифференцирования в одномерном базисе из модифицированных функций Лагерра, элементы которой находятся с помощью элементарных алгебраических операций [22]:

$$d_{ij} = \begin{cases} -\gamma/2, & \text{если } i = j, \\ -\gamma, & \text{если } i < j, \\ 0, & \text{если } i > j. \end{cases}$$

Обозначим через  $B_1$  матрицу, элементы которой находятся по формуле:

$$b_{ij}^1 = \begin{cases} -\gamma_1(j-1)/4, & \text{если } i+1 = j, \\ \gamma_1(1-(i-1)/4), & \text{если } j+1 = i, \\ \gamma_1(3/4-i/2), & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i+1 < j, \\ \gamma_1, & \text{если } j+1 < i, \end{cases}$$

и через  $B_2$  матрицу с элементами:

$$b_{ij}^2 = \begin{cases} -i/\gamma_1, & \text{если } i+1 = j, \\ -(i-1)/\gamma_1, & \text{если } j+1 = i, \\ (2i-1)/\gamma_1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i+1 < j, \\ 0, & \text{если } j+1 < i, \end{cases}$$

которые устанавливаются на основании следующих рекуррентных соотношений для функций Лагерра:

$$\begin{aligned} r\varphi_i''(r) &= -(\gamma_1/4)(i+1)\varphi_{i+1}(r) + ((\gamma_1/4)(2i+1) - \gamma_1 i)\varphi_i(r) + \\ &+ (i(-3\gamma_1/4) + (1/\gamma_1)(1-i))\varphi_{i-1}(r) + (1/\gamma_1) \sum_{k=0}^{i-2} \varphi_k(r), \\ r\varphi_i(r) &= (1/\gamma_1) [-(i+1)\varphi_{i+1}(r) - i\varphi_{i-1}(r) + (2i+1)\varphi_i(r)]. \end{aligned}$$

Последние соотношения легко выводятся из известных рекуррентных соотношений для многочленов Лагерра [21]:

$$(i+1)L_{i+1}(r) + (r-2i-1)L_i(r) + iL_{i-1}(r) = 0,$$

$$rL_i'(r) = iL_i(r) - iL_{i-1}(r) = 0$$

и формул:

$$rL_i''(r) + (1-r)L_i'(r) + iL_i(r) = 0,$$

$$\sum_{k=0}^i L_k(r) = L_i(r;1),$$

где  $L_i(r;1)$  — многочлены Чебышева-Лагерра по переменной  $r$  с параметром  $\alpha_1 = 1$ .

Далее введем матрицы:  $D_{mm}^{r2} = B_1^T \otimes E_m$ ,  $D_{mm}^{t2} = B_2^T \otimes D_m^{\gamma_2}$ ,  $I_{mm} = B_2^T \otimes E_m$ . Перепишем систему (8) в матричном виде

$$\left( D_{mm}^{r2} - \frac{1}{D} D_{mm}^{t2} + D_{mm}^r + \frac{1}{D} \tilde{D}_{mm}^t - \frac{1}{\lambda^2} I_{mm} \right) C_{mm} = \frac{1}{D} C_{mm}^{\Phi_1}, \quad (9)$$

где  $\tilde{D}_{mm}^t = B_2^T \otimes B_3$ ,  $B_3$  - матрица с элементами  $b_{ij}^3 = -\gamma_2$ , а столбец  $C_{mm}^{\Phi_1}$  находится путем растяжения матрицы:  $C^{\Phi_1} = B_2^T C_m^n (-\gamma_2 \varphi^m(0))^T$ .

Подстановка величин  $c_{ij}$ , определяемых из решения системы уравнений (9), в формулу (7), дает искомое приближенное решение.

Исследуем сходимость невязки  $R$  и покажем, что  $R$  сходится к нулю в среднем (в пределе при  $m \rightarrow \infty$ ).

Следуя [23], введем обозначения:

$$D = r \frac{d^2}{dx^2} + (1-r) \frac{d}{dr} + t \frac{d^2}{dt^2} + (1-t) \frac{d}{dt};$$

$L_2^n(D)$  ( $n=0,1,\dots$ ) — класс функций  $f$  таких, что функции  $\tilde{f}(r,t) = f(r,t) \exp(\gamma_1 r/2) \exp(\gamma_2 t/2) \in L_2$  и имеющие обобщенные частные производные в смысле Леви  $\partial^k \tilde{f}(r,t) / \partial r^i \partial t^j$ ,  $i+j=k$ ,  $k=0,1,\dots$ , принадлежащие пространству  $L_2$ , для которых  $D^n \tilde{f} \in L_2$ ,  $n=0,1,\dots$ , где  $D^0 \tilde{f} = \tilde{f}$ ,  $D^n \tilde{f} = D(D^{n-1} \tilde{f})$ ,  $n=1,2,\dots$ ,  $L_2^0(D) = L_2$ .

Если погрешности в исходных данных и погрешности вычислений отсутствуют, а учитываются лишь погрешности аппроксимаций, то, опираясь на результаты работ [24-28], можно установить оценку для невязки уравнения (4). Мы не будем останавливаться на этом подробно, а приведем без доказательства следующий результат.

Пусть функция  $c(r, t) \in L_2^{n+1}(D)$ ,  $n > 2$  и имеет непрерывные частные производные до порядка  $2n+2$  по обоим пространственным направлениям, тогда справедлива оценка:

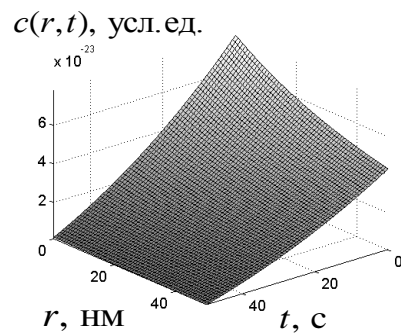
$$\|R\|_{L_2} < \left[ 3\sqrt{2}/\gamma_1 + 2 + 2\sqrt{2}/(D\gamma_1) + \sqrt{2}/(\lambda^2\gamma_1) \right] \left[ 1 - (1 - m^{-1/2})^m \right]^k \times \\ \times (m)^{-n} \Omega(m^{-1/2}) + O\left(m^{-n+\frac{7}{4}}\right) \omega(m^{-1/2}), m \rightarrow \infty.$$

Здесь  $\Omega(m^{-1/2})$  — мажоранта обобщенных модулей непрерывности для функций из пространства  $L_2$  [23], а  $\omega(m^{-1/2})$  — заданная мажоранта модулей непрерывности дифференцируемых функций [29]. Последнее выражение означает, что невязка  $R$  уравнения (3) сходится к нулю в среднем.

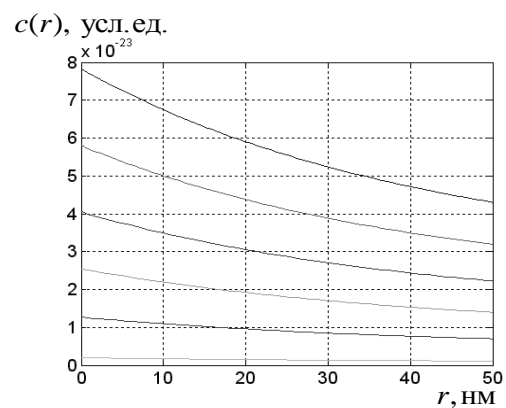
### Результаты расчетов

Было проведено математическое моделирование диффузии экситонов для параметров полупроводника, характерных для нитрида галлия, который является перспективным материалом для создания устройств опто-, микро- и нанoeлектроники, а также СВЧ-устройств, способных работать в том числе и в неблагоприятных условиях внешней среды и при высоких напряжениях. Частота генерации экситонов принималась равной  $G_0 = 10^{-13} \text{ c}^{-1}$ , а профиль распределения энергии электронов в пучке задавался функцией Гаусса с нулевым математическим ожиданием и дисперсией 60 нм, что соответствует условиям реальных экспериментальных катодолуминесцентных измерений.

На рисунке 2а представлены результаты математического моделирования полученного решения нестационарного уравнения диффузии экситонов (4), (5). Время жизни экситонов принималось равным  $\tau = 271$  пс, коэффициент их диффузии  $D = 9 \text{ см}^2/\text{с}$ . На рисунке 2б представлены результаты математического моделирования для различных значений времени  $t = 0, 10, 20, 30, 40, 50$  с.



а)



б)

Рисунок 2 – а) – рассчитанная концентрация экситонов  $c(r, t)$ ; б) – сечения поверхности  $c(r, t)$  - зависимости  $c(r)$ , полученные для различных значений времени  $t = 0, 10, 20, 30, 40, 50$  с (сверху вниз); (вычисления проведены в 12-м приближении для параметров, характерных для нитрида галлия, энергия электронов зонда 5 кэВ)

Затраты машинного времени на расчет концентрации экситонов с использованием проекционного Галеркина составили приблизительно 7 с, что говорит о вычислительной эффективности предложенного метода. Вычисления выполнялись в системе MATLAB (The MathWorks, Inc.) версии 7.5.0.342 на персональном компьютере со следующими характеристиками: процессор Intel Pentium E5400 (2 x 2.70 GHz, 2MB Cache), объем оперативной памяти 2 GB.

### Выводы

Построена двумерная математическая модель диффузии экситонов в полупроводнике, основанная на использовании проекционного метода Галеркина. Получена порядковая оценка погрешности невязки, соответствующей приближенному решению нестационарного уравнения диффузии. Предлагаемый критерий качества приближения позволяет довольно просто находить матрицу, определяющую



приближенное решение рассматриваемой задачи, не прибегая к операциям дифференцирования и интегрирования и используя только алгебраические операции, что существенно сокращает время вычислений. При моделировании использовались параметры, характерные для нитрида галлия.

### **Перспективы последующих исследований в данном направлении**

В последующих исследованиях полученные результаты будут использованы для моделирования катодоллюминесценции, возникающей в приповерхностной области нитрида галлия при рекомбинации экситонов, генерированных электронным зондом. Ожидается, что использование предлагаемого подхода позволит провести корректную оценку погрешности метода, что необходимо для катодоллюминесцентной идентификации параметров прямозонных полупроводниковых материалов.

### **Благодарность и информация о финансовой поддержке**

Экспериментальные исследования катодоллюминесценции экситонов в нитриде галлия, представленные на рис. 1, проведены в университете г. Магдебурга, ФРГ, в научной группе под руководством профессора Ж. Христана (J. Christen), за что авторы настоящей работы им глубоко благодарны.

Исследования проведены при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-03-00515).

### **Литература**

1. Конников С.Г., Сидоров А.Ф. Электроннозондовые методы исследования полупроводниковых материалов и приборов. – М.: Энергия, 1978. – 136 с.
2. Микроанализ и растровая электронная микроскопия / Под ред. Ф. Морис, Л. Мени, Р. Тиксье. – М.: Металлургия, 1985. – 408 с.
3. Серегина Е.В., Степович М.А., Макаренко А.М. О модифицированной проекционной схеме метода наименьших квадратов для моделирования распределения неосновных носителей заряда, генерированных электронным пучком в однородном полупроводниковом материале // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2013. – № 11. – С.65-69.
4. Seregina E.V., Makarenkov A.M., Stepovich M.A. On a Modified Projection Scheme of the Least\_Squares Method for the Modeling of

the Distribution of Minority Charge Carriers Generated by an Electron Beam in a Homogeneous Semiconductor Material // Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques. – 2013. – Vol. 7, No. 6. – P. 1077-1080.

5. Макаренко А.М., Серегина Е.В., Степович М.А. Проекционный метод Галеркина решения стационарного дифференциального уравнения диффузии в полубесконечной области // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2017. – Т. 57, № 5. – С. 57-69.

6. Makarenkov A.M., Seregina E.V., Stepovich M.A. The Projection Galerkin Method for Solving the Time-Independent Diffusion Equations in a Semi-Infinite Domain // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2017, Vol. 57, No. 5. – P. 802-814.

7. Фрей Д. Низковольтная растровая электронная микроскопия / Растровая электронная микроскопия для нанотехнологий. Методы и применения / Под. ред. У. Жу, Ж.Л. Уанга; пер. с англ. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. – С. 137-158.

8. Поляков А.Н., Noltemeyer M., Hempel T., Christen J., Степович М.А. Двумерная диффузия и катодоллюминесценция экситонов, генерированных электронным пучком в полупроводниковом материале: результаты математического моделирования // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2012. – № 11. – С.35-40.

9. Polyakov A.N., Noltemeyer M., Hempel T., Christen J., Stepovich M.A. Two Dimensional Diffusion and Cathodoluminescence of Excitons Generated by an Electron Beam in a Semiconductor Material: Results of Mathematical Modelling // Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques. – 2012. – Vol. 6, No. 6. – P. 901-905.

10. Поляков А.Н., Noltemeyer M., Hempel T., Christen J., Степович М.А. Катодоллюминесцентные экспериментальные исследования транспорта экситонов в нитриде галлия // Известия РАН. Серия физическая. – 2012. – Т. 76, № 9. – С.1082-1085.

11. Polyakov A.N., Noltemeyer M., Hempel T., Christen J., Stepovich M.A. Experimental Cathodoluminescence Studies of Exciton Transport in Gallium Nitride // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics. – 2012. – Vol. 76, No. 9. – Pp. 970-973.

12. Поляков А.Н., Степович М.А., Туртин Д.В. Математическое моделирование катодоллюминесценции экситонов, генерированных узким электронным пучком в полупроводниковом материале // Известия РАН. Серия физическая. – 2016. – Т. 80, № 12. – С. 1629-1633.

13. Polyakov A.N., Stepovich M.A., Turtin D.V. Mathematical modeling of the cathodoluminescence of excitons generated by a narrow electron beam in a semiconductor material // *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics.* – 2016. – Vol. 80, Issue 12. – Pp. 1436–1440.
14. Амрастанов А.Н., Гинзгеймер С.А., Степович М.А., Филиппов М.Н. Об одной возможности математического моделирования теплового воздействия остро сфокусированного электронного пучка на однородный полупроводник // *Известия РАН. Серия физическая.* – 2016. – Т. 80, № 10. – С. 1448-1452.
15. Amrastanov A.N., Ginzgeyer S.A., Stepovich M.A., Filippov M.N. On Possibility of Mathematically Modeling the Thermal Effect of a Finely Focused Electron Beam on a Homogeneous Semiconductor // *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics.* – 2016. – Vol. 80, Issue 10. – Pp. 1290-1294.
16. Вавилов В.С., Макаров С.И., Чукичев М.В., Четверикова И.Ф. Катодолуминесценция нелегированного нитрида галлия // *Физика и техника полупроводников.* – 1979. – Т. 13, вып. 11. – С. 2153-2159.
17. Lipchak A.I., Mikhailov S.G., Sokolov V.I., Solomonov V.I., Kiselev I.V. Luminescence of ZnSe: Mn single crystals at room temperature // *Optics and Spectroscopy.* – 1997. – Vol. 83, no. 6. – P. 854-859.
18. Гвоздовер Р.С., Петров В.И., Подтяжкин Е.Я., Степович М.А., Филиппов М.Н. Определение электрофизических параметров полупроводников по зависимости катодолуминесценции от ускоряющего напряжения // *Известия АН СССР. Серия физическая.* – 1984. – Т. 48, № 12. – С. 2378-2383.
19. Серегина Е.В., Степович М.А., Макаренко А.М., Филиппов М.Н. О возможности использования проекционного метода Галеркина для моделирования пространственного распределения неосновных носителей заряда, генерированных электронным зондом в полупроводнике // *Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования.* – 2017. – № 9. – С. 78-84.
20. Seragina E.V., Stepovich M.A., Makarenkov A.M., and Filippov M.N. On the Possibility of Using the Galerkin Projection Method to Model the Spatial Distribution of Minority Charge Carriers Generated by an Electron Probe in a Semiconductor // *Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques.* – 2017. – Vol. 11, Issue 5. – P. 981-986.
21. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. – М.: Физматлит, 2005. – 480 с.
22. Лапин С.В., Егупов Н.Д. Теория матричных операторов и ее приложение к задачам автоматического управления. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. 1997. – 496 с.
23. Абилов В.А., Абилов М.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости двойных рядов Фурье по классическим ортогональным многочленам // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* – 2015. – Т. 55, № 7. – С. 1109-1117.
24. Серегина Е.В., Макаренко А.М., Степович М.А. Использование проекционного метода для определения статистических характеристик решения дифференциального уравнения диффузии неосновных носителей заряда, генерированных в полупроводниковом материале широким электронным пучком // *Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования.* – 2009. – № 6. – С. 80-95.
25. Seragina E.V., Makarenkov A.M., Stepovich M.A. Use of the Projective Method for Determining Statistical Characteristics of the Solution to the Differential Diffusion Equation of Minority Carriers Generated in the Semiconductor Material by a Wide Electron Beam // *J. of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques.* – 2009. – Vol. 3, No. 3. – P. 468-482.
26. Серегина Е.В., Степович М.А., Макаренко А.М. О модифицированной проекционной схеме метода наименьших квадратов для моделирования распределения неосновных носителей заряда, генерированных электронным пучком в однородном полупроводниковом материале // *Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования.* – 2013. – № 11. – С. 65-69.
27. Seragina E.V., Makarenkov A.M., Stepovich M.A. On a Modified Projection Scheme of the Least Squares Method for the Modeling of the Distribution of Minority Charge Carriers Generated by an Electron Beam in a Homogeneous Semiconductor Material // *Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques.* – 2013. – Vol. 7, No. 6. – P. 1077-1080.
28. Серегина Е.В., Макаренко А.М., Степович М.А. О сходимости некоторой проекционной схемы дифференциального уравнения тепломассопереноса // *Прикладні завдання математики: Матеріали XXI міжнародної науково-технічної конференції (16-20 вересня 2013 року, м. Севастополь, Україна, Севастопольський національний технічний університет).* – Севастополь: Севастопольський національний технічний університет, 2013. – С. 122-126.
29. Лашенов В.К. Приближение дифференцируемых функций частными суммами

ряда Фурье- Лагерра // Известия вузов.  
Математика. – 1981. – № 1 (224). – С. 44-57.

**Степович М.А., Серегина Е.В., Поляков А.Н., Лямина О.И.** *Об использовании метода Галеркина при математическом моделировании диффузии экситонов, вызванной пульсирующим электронным зондом в полупроводниковой мишени.* Рассмотрены некоторые возможности использования проекционного метода Галеркина для моделирования двумерной диффузии экситонов, возбуждаемых пульсирующим электронным зондом в полупроводниковой мишени. Задача решена в цилиндрической системе координат. Искомая концентрация экситонов найдена в виде частичной суммы двойного ряда Фурье по системе модифицированных функций Лагерра. Получена порядковая оценка погрешности невязки, соответствующей приближенному решению нестационарного уравнения их диффузии. При моделировании использовались параметры, характерные для нитрида галлия.

**Ключевые слова:** метод Галеркина, ряд Фурье, диффузия, полупроводник.

**Stepovich M.A., Seregina E.V., Polyakov A.N., Lyamina O.I.** *On the use of the Galerkin method for mathematical modeling of diffusion of excitons caused by a pulsing electron beam in a semiconductor target.* Some possibilities of using the Galerkin projection method to simulate two-dimensional diffusion of excitons excited by a pulsing electron beam in a semiconductor target are considered. The problem is solved in a cylindrical coordinate system. The wanted concentration of excitons is found in the form of a partial sum of a double Fourier series in the system of modified Laguerre functions. An order-of-magnitude estimate of the discrepancy error corresponding to the approximate solution of the nonstationary equation of their diffusion is obtained. In the simulation, parameters typical of gallium nitride were used.

**Keywords:** Galerkin method, Fourier series, diffusion, semiconductor.

Статья поступила в редакцию 22.02.2018  
Рекомендована к публикации д-ром физ.-мат. наук А.С. Миненко

CONTENT

Aydagulov R.R. The efficiency of computation in matrix multiplication .....	4
Bakalenko V.S. Development of a speech recognition of the source code of programs in the CMU Sphinx tool environment .....	10
Belkov D.V., Edemskay E.N. Fractal analysis of speech signals.....	16
Vorobuev L.O., Chernyshova A.V. Protecting a web resource from unauthorized access using an authentication method without the need to enter personal data. ....	22
Dotsenko G.V. The technique of research of safety of functioning of systems of electronic commerce by means of mathematical modeling. ....	27
Dyachenko V.O., Dyachenko O. N. Complex evaluation of compact testing of digital circuits based on minimal polynomials.. ....	36
Zenzerov V.I., Perinska E.V. Mathematical modeling of the powered roof supports on sloping coal layers .....	42
Kozhukhov I.B., Pryanichnikov A.M. On congruences of acts over rectangular bands.. ....	49
Kozlova I. A. Application of polynomials of best uniform approximation in the evaluation and analysis of economic phenomena. ....	54
Korobov M.S., Petrikov A.O. Continued partial operations in universal algebras. ....	60
Kusov V. M., Shchuchkin N. A. Endomorphisms of abelian semicyclic n-ary groups. . ....	65
Malevanny I.I., Karjakin T.I. The longitudinal scheme of the method of lines for the numerical approximation of boundary value problems with nonsmooth data for a differential equation of second order of parabolic type.....	76
Minenko A.S., Radevich E.V. Approximate analysis of modeling the process of solidification during electroslag remelting. ....	84
Pavlysh E.V. Logic-structural model of influence of innovative component in ensuring regional competitiveness.. ....	90
Stepovich M.A., Seregina E.V., Polyakov A.N., Lyamina O.I. On the use of the Galerkin method for mathematical modeling of diffusion of excitons caused by a pulsing electron beam in a semiconductor target.....	100
Content.....	109

Научное издание

ИНФОРМАТИКА И КИБЕРНЕТИКА

Научный журнал

(на русском, английском языках)

№ 1(11)-2018

Ответственный за выпуск А.И. Андрихин

Технические редакторы Т.В. Завадская, А.В. Звягинцева

Компьютерная верстка Д.А. Филипишин

Подписано к выпуску 23.03.2018. Усл. печ. лист. 10. Уч.- изд. лист. 7,1.

Адрес редакции: ДНР, 83001, г. Донецк, ул. Артема, 58, ГОУ ВПО «ДонНТУ», 5-й учебный корпус, к. 425. Тел.: +38 (062) 301-08-51 E-mail: [infcyb.donntu@yandex.ru](mailto:infcyb.donntu@yandex.ru), URL: <http://infcyb.donntu.org>