УДК 512.579

О многообразиях альтернативно определённых тернарных полугрупп

А. В. Решетников
Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники», г. Москва
a_reshetnikov@hush.com

Решетников А. В. О многообразиях альтернативно определённых тернарных полугрупп. *Рассматриваются альтернативно определённые тернарные полугруппы G с операцией f, то есть тернарные гурппоиды, удовлетворяющие тождеству* $f(f(x, a, b), y, z) = f(x, f(b, y, a), z) = f(x, y, f(a, b, z))$. *Для нетривиальных G доказано следующее. Если G идемпотентна и любая её 2-порождённая подполугруппа абелева, то G содержит двухэлементную альтернативно определённую тернарную подполугруппу; если G не идемпотентна, то она содержит в качестве подполугруппы либо двухэлементную 3-полугруппу с константным умножением, либо конечную циклическую 3-группу, либо бесконечную циклическую 3-полугруппу. Аналогичные результаты в бинарном случае были получены Калицким Я. и Скоттом Д. в 1955 г. и применены к описанию атомов решётки многообразий полугрупп.*

Ключевые слова: *n-арная альтернативность, абелева n-арная полугруппа, атомы решётки многообразий, альтернативная ассоциативность.*

Постановка задачи

Пусть f — n-арная операция, заданная на некотором множестве G. Тогда G называется *n-арным группоидом с операцией f* и обозначается через (G, f). n-арная операция f *ассоциативна*, если при любых значениях i, j, удовлетворяющих неравенствам $1 \le i, j \le n$, для неё справедливо тождество

$$f(x_1,..., x_{i-1}, f(x_i, \dots, x_{i+n-1}), x_{i+n}, \dots, x_{2n-1}) =$$
$$= f(x_1,..., x_{j-1}, f(x_j, \dots, x_{j+n-1}), x_{j+n}, \dots, x_{2n-1}).$$

n-арной полугруппой называется n-арный группоид с ассоциативной операцией. Бинарную полугруппу будем называть *полугруппой*.

Мы полагаем [1], что существует глубокая связь между полугруппами и универсальными алгебрами, удовлетворяющими тождеству

$$f(f(x, u, v), y, z) = f(x, f(v, y, u), z) = f(x, y, f(u, v, z)). \quad (1)$$

Условие (1) мы называем *альтернативным тождеством ассоциативности*, а универсальные алгебры с таким тождеством — *альтернативно определёнными тернарными полугруппами*.

Пусть S_n – группа подстановок на множестве $\{1, ..., n\}$. Для произвольной n-арной операции f и подстановки $\sigma \in S_n$ введём обозначение:

$$f^{\sigma}(x_1, ..., x_n) = f(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}).$$

Нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. Если тернарная операция f удовлетворяет тождествам (1), то для любой подстановки $\sigma \in S_3$ операция f^{σ} также удовлетворяет тождествам (1).

Данная теорема переносит известный в теории полугрупп принцип двойственности на альтернативно определённые тернарные полугруппы и таким образом связывает бинарную ассоциативность с альтернативной тернарной ассоциативностью. Для классических (то есть не альтернативно определённых) тернарных полугрупп легко указать пример, когда утверждение, аналогичное теореме 1, неверно (подробнее см. [1]).

Коль скоро бинарные полугруппы и альтернативно определённые тернарные полугруппы схожи, было бы интересно сравнить решётки их многообразий. В то время как атомы решётки многообразий классических n-арных полугрупп полностью описаны [2] для любого n, удовлетворительное описание атомов решётки многообразий альтернативно определённых тернарных полугрупп не известно.

В статье [3] авторам для описания атомов решётки многообразий бинарных полугрупп потребовалось утверждение, которое на современном языке общей алгебры можно сформулировать следующим образом:

Предложение 2. Любая *полугруппа S, состоящая хотя бы из двух элементов, содержит в качестве подполугруппы либо двухэлементную полугруппу, либо циклическую группу простого порядка, либо бесконечную циклическую полугруппу, а именно:*

1) если каждый элемент полугруппы *S является идемпотентом, то:*

1.1) если S — коммутативная *полугруппа, то для любых двух различных элементов $x, y \in S$ либо $\{x, y\}$ (в случае $xy = x$), либо $\{x, xy\}$ (в случае $xy \neq x$) — двухэлементная полурешётка;*

1.2) если существуют *такие элементы* $x, y \in S$, *что* $xy \neq yx$, *то либо* $\{xyx, yx\}$ *— двухэлементная полугруппа левых нулей, либо* $\{xy, yx\}$ *— двухэлементная полугруппа правых нулей (если* $xyx = yx$*);*

2) если элемент $x \in S$ *не* является *идемпотентом, то:*

2.1) если циклическая полугруппа $\langle x \rangle$, *порождённая элементом x, имеет период длины 1, то* $\{x^{k-1}, x^k\}$ *— полугруппа с нулевым умножением, где* $x, x^2, \ldots, x^k$ *различны и* $x^k = x^{k+1} = x^{k+2} = \ldots$

2.2) если $\langle x \rangle$ *имеет конечный период Y, длина которого превышает 1, то существует подмножество множества Y, элементы которого образуют циклическую группу простого порядка;*

2.3) в противном случае $\langle x \rangle$ *— бесконечная циклическая полугруппа.*

Приведём для альтернативно *определённых* тернарных полугруппах известные на данный момент утверждения, схожие в той или иной мере с предложением 2.

Пусть G — n-арный группоид с *операцией* f. Подмножество $G' \subseteq G$ назовём его *подгруппоидом*, если G' — n-арный группоид с операцией f', определяемой следующим условием:

$$f'(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) \text{ для всех } x_1, \ldots, x_n \in G'.$$

Пересечение всех *подгруппоидов* n-арного группоида G, которые содержат некоторое подмножество $X \subseteq G$, назовём *n-арным группоидом, порождённым множеством X*. Подгруппоид, порождённый одноэлементным множеством, назовём *циклическим*. n-арную полугруппу S будем называть *циклической*, если само множество S является её циклическим подгруппоидом. Определение циклической n-арной группы см., например, в монографии [4].

Лемма 3. Пусть G *— альтернативно определённая тернарная полугруппа с операцией f, удовлетворяющая тождествам*

$$f(x, x, y) = f(x, y, x) = f(y, x, x); \quad (2)$$

$$f(x, x, x) = x. \quad (3)$$

Если $|G| \geq 2$, *то G содержит в качестве подгруппоида альтернативно определённую тернарную полугруппу, а именно:*

1) если существуют элементы $x, y \in G$ *такие, что* $f(x, y, y) = y$ *и* $f(y, y, x) = x$, *то подгруппоид, порождённый множеством* $\{x, y\}$, *изоморфен альтернативно определённой тернарной полугруппе на множестве* $\{0, 1\}$ *с операцией сложения по модулю 2;*

2) в противном случае существуют элементы $x, y \in G$ *такие, что* $f(x, y, y) \neq y$, *и то подгруппоид, порождённый множеством* $\{f(x, y, y), y\}$, *изоморфен альтернативно определённой тернарной полугруппе на множестве* $\{0, 1\}$ *с операцией умножения по модулю 2.*

Пусть f — n-арная операция, заданная на некотором множестве S. Будем говорить, что S — *n-арная полугруппа с константным умножением*, если

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$$

для всех $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in G$.

Лемма 4. *Пусть G — альтернативно определённая тернарная полугруппа с операцией f, удовлетворяющая тождеству (2) и не удовлетворяющая тождеству (3). Тогда G содержит в качестве подгруппоида либо бесконечную циклическую полугруппу, либо циклическую тернарную группу, либо двухэлементную тернарную полугруппу с константным умножением.*

Отметим также следующую теорему, которая в вопросе об описании атомов решётки многообразий альтернативно определённых тернарных полугрупп дополняет лемму 4:

Теорема 5 [4, теорема 2.5.54]. *Конечная n-арная группа G не имеет собственных n-арных подгрупп тогда и только тогда, когда она циклическая и множество простых делителей числа* $|G|$ *является подмножеством множества простых делителей числа* $(n - 1)$.

Литература

1. Решетников А. В. Об альтернативном определении тернарной полугруппы // Сборник научных трудов МИЭТ. Посвящается 70-летию профессора А. С. Поспелова. 2016. С. 110—116.

2. Артамонов В. А. Минимальные многообразия обобщенных полугрупп, групп и колец // Сибирский математический журнал. 1980. Т. 21. №3. С. 6—22.

3. Kalicki J., Scott D. Equational completeness in abstract algebras // Indagationes Mathematicae. 1955. Vol. 17. P. 650—659. Русский перевод: Калицкий Я., Скотт Д. Эквациональная полнота абстрактных алгебр // Кибернетический сборник: сб. переводов. [Вып.] 2 / Под ред. А. П. Ершова [и др.; пер. А. Воскресенский и др.]. М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. С. 41—52.

4. Гальмак А. М. n-Арные группы. Ч. I. Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. 196 с.

Решетников А. В. О многообразиях альтернативно определённых тернарных полугрупп. *Рассматриваются альтернативно определённые тернарные полугруппы G с операцией f, то есть тернарные гурппоиды, удовлетворяющие тождеству $f(f(x, a, b), y, z) = f(x, f(b, y, a), z) = f(x, y, f(a, b, z))$. Для нетривиальных G доказано следующее. Если G идемпотентна и любая её 2-порождённая подполугруппа абелева, то G содержит двухэлементную альтернативно определённую тернарную подполугруппу; если G не идемпотентна, то она содержит в качестве подполугруппы либо двухэлементную 3-полугруппу с константным умножением, либо конечную циклическую 3-группу, либо бесконечную циклическую 3-полугруппу. Аналогичные результаты в бинарном случае были получены Калицким Я. и Скоттом Д. в 1955 г. и применены к описанию атомов решётки многообразий полугрупп.*

Ключевые слова*: n-арная альтернативность, абелева n-арная полугруппа, атомы решётки многообразий, альтернативная ассоциативность.*

Reshetnikov A. V. On varieties of alternatively determined ternary semigroups *In this paper we consider the alternatively defined semigroups G with operation f, i.e. the ternary groupoids satisfying the identity $f(f(x, a, b), y, z) = f(x, f(b, y, a), z) = f(x, y, f(a, b, z))$. For the non-trivial G the following assertions are proved. If G is idempotent and every its 2-generated subsemigroup is abelian, then G contains a two-element alternatively defined subsemigroup; if G is not idempotent, then there is a subsemigroup of G which is either two-element 3-semigroup with constant multiplication, or a finite cyclic 3-group, or an infinite cyclic 3-semigroup. Similar results were obtained by Kalicki J. and Scott D. in 1955 and applied to describe the atoms of the lattice of semigroup varieties.*

Keywords*: n-ary alternativity, abelian n-ary semigroup, atoms of lattice of varieties, alternative associativity.*

Статья поступила в редакцию 23 мая 2018 г.
Рекомендована к публикации профессором Шелеповым В. Ю.