УДК 517.9

Приближенный анализ конвективной задачи Стефана

Миненко А.С., Радевич Е.В.
Донецкий национальный технический университет
radevich_katerina@mail.ru

Миненко А.С., Радевич Е.В. Приближенный анализ конвективной задачи Стефана. *Осуществляется математическое моделирование одного класса сложных систем с применением нечеткой логики, а также численный анализ нелинейной математической модели.*

Ключевые слова: *задача Стефана, анализ, математическое моделирование, математическая модель, нечеткая логика.*

Введение

Теплофизические процессы, сопровождающиеся фазовыми переходами вещества, описываются математической моделью, в которой температура каждой из фаз удовлетворяет уравнению переноса тепла со своими теплофизическими коэффициентами, на границе раздела фаз, обе температуры постоянны и равны температуре фазового перехода, а на заданных частях границы поддерживается определенный режим. Поверхность раздела фаз является неизвестной или «свободной» границей, и для ее определения дополнительно задается так называемое «условие Стефана», означающее, что тепловой поток через фронт кристаллизации в сторону твердой фазы равен тепловому потоку со стороны жидкой фазы плюс скрытая теплота фазового перехода.

Математическое моделирование одного класса сложных систем с применением нечеткой логики

Рассмотрим область $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3 : r^2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2)\}$ и через Γ^- и Γ^+ обозначим следующие сферы:
$\Gamma^- = \{(x_1,x_2,x_3): x_1^2+x_2^2+x_3^2 = r^2\}, \Gamma^+ = \{(x_1,x_2,x_3): x_1^2+x_2^2+x_3^2 = R^2\}$.
Далее, пусть Γ_0 гладкая, связная поверхность без самопересечений, лежащая внутри Ω, которая разбивает ее на две подобласти Ω^+ и Ω^-, т.е. $\Omega = \Omega^+ \bigcup \Omega^-$, причем сфера Γ^- лежит внутри ограниченной области, границей которой является Γ_0. Рассмотрим краевую задачу со свободной границей Γ_0. Требуется определить тройку ($u^{\pm}(x), \Gamma_0$) по следующим условиям:

$$\begin{aligned}&\nabla^2 u^{\pm}(x) = 0, x \in \Omega^{\pm}; u^{\pm}(x)\Big|_{\Gamma^{\pm}} = B^{\pm}(x);\\ &u^{\pm}(x) = 1, \left|\nabla u^-(x)\right| - \left|\nabla u^+(x)\right| = 0, x \in \Gamma_{0.}\end{aligned} \tag{1}$$

При этом, $B^{\pm}(x) \in C^{3+\alpha}(\Gamma^{\pm}), u^{\pm}(x) \in C^{3+\alpha}(\overline{\Omega^{\pm}})$, а Γ_0 принадлежит классу C^{∞} [12].

Затем введем в рассмотрение функцию $u(x)$, заданную следующим образом $u = u^-(x)$, при $x \in \overline{\Omega^-}$ и $u = u^+(x)$, при $x \in \overline{\Omega^+}$. Тогда функцию $u(x)$ можно найти из условия минимума функционала $I(u,\Gamma_0) = \iiint\limits_{\Omega} \left|\nabla u\right|^2 dx_1 dx_2 dx_3$ на соответствующем множестве R допустимых функций [19]. Это следует из формулы первой вариации интегрального функционала с неизвестной областью интегрирования [6].
Далее, удобно представить функционал I в сферических координатах:

$$I(u,\Gamma_0) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_r^{R}\left(u_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}u_\theta^2 + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}u_\varphi^2\right)\rho^2 \sin\theta d\varphi d\theta d\rho \tag{2}$$

Лемма 4.1. Пусть тройка ($u^{\pm}(x), \Gamma_0$) является классическим решением задачи (4.1). Тогда эта тройка будет стационарной для функционала (4.2) на множестве R. Обратно, каждая стационарная тройка ($u^{\pm}(x), \Gamma_0$) функционала (4.2) на множестве R, где Γ_0 – достаточно гладкая, связная поверхность, является решением задачи (4.1).

Сформулированная задача (4.1) получается из задачи, изученной в [12] в случае $\vec{V} = 0$, т.е. в случае бесконечно большой вязкости, Re = 0. Поэтому в дальнейшем под решением задачи (4.1) при Re = 0 будем понимать функции $\vec{V}(x) = 0, u^+(x)$ и $u^-(x)$, заданные в $\Omega^{\pm}$. Из условий (4.1) следует, что Γ_0 - не что иное, как линия уровня функции $u(x)$, т.е:

$\Gamma_0 = \{x \in \Omega : u(x) = 1\}$. Далее, если предположить выполнение следующего условия:

$$\pm (B^{\pm}(x) - 1) \geq \varepsilon_0 > 0, x \in \Gamma^{\pm},$$

где ε_0 – некоторая постоянная, тогда поверхность Γ_0 лежит внутри области Ω и представляет собой поверхность класса $C^{4+\alpha}$, не имеющую самопересечений и располагающую относительно Γ^{+} и Γ^{-} аналогично поверхности Γ_t (свободная поверхность), изученной в [12]. Следовательно, рассматривая функцию $u(x)$ в одной из областей $\Omega^{\pm}$, и принимая во внимание лемму о нормальной производной, находим что:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = |\nabla u| \geq \varepsilon > 0, \ x \in \Gamma_0,$$

где n – нормаль к Γ_0, направленная в сторону Ω_0^{+}, а ε - некоторая постоянная. Отсюда, применяя теорему о неявной функции, следует, что Γ_0 принадлежит классу C^{∞}, так как этому классу в некоторой окрестности Γ_0 принадлежит гармоническая функция $u(x)$.

Минимум функционала (4.2) на множестве R будем искать при помощи сумм:

$$u_n = B^{+} + \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - r^2}(B^{-} - B^{+}) + (R^2 - \rho^2)(\rho^2 - r^2)\sum_{k=0}^{n} C_k \rho^k y_k(\varphi, \theta),$$

где $y_k(\varphi, \theta)$ – сферические функции. Неизвестные коэффициенты C_k определяют при помощи метода Ритца. Тогда поверхность $\Gamma_0 : \rho = \rho_0(\varphi, \theta)$ определяется из уравнения $u_n(\varphi, \theta, \rho_0(\varphi, \theta)) = 1$.

При этом, необходимо учесть, что $|\nabla u(x)| \geq \varepsilon_0 > 0$, в $\overline{\Omega}$, где ε_0 – некоторая постоянная [3].

Лемма 4.2. При малых t справедливо представление:

$$\Gamma_t : \rho(\varphi, \theta, t) = \rho_0(\varphi, \theta) - \mathrm{Re}\frac{u_1^{\pm}(\varphi, \theta, t)}{|\nabla A^{\pm}(\varphi, \theta)|} + 0(\mathrm{Re}), (\varphi, \theta) \in \Gamma_0 . \quad (3)$$

Здесь Re – число Рейнольдса, а $u_1^{\pm}(\varphi, \theta, t)$ – первое приближение исходной задачи, изученной в [12].

В частности для нулевого приближения $u_0(\varphi, \theta)$ из уравнения:

$$u_o = B^{+} + \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - r^2}(B^{-} - B^{+}) + (\rho^2 - r^2)(R^2 - \rho^2)C_0 = 1$$

.легко найти поверхность $\rho_0(\varphi, \theta)$.

Далее, рассмотрим величину, $\varepsilon_n = I(u_n, \Gamma_o) - I(u, \Gamma_0)$, где u – точное решение задачи (4.1). Тогда, можно установить, что $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, если C_k – коэффициенты Ритца.

Используя результаты Канторовича Л.В. по минимизации квадратичных функционалов, аналогично тому как это сделано в [13], можно доказать следующее утверждение.

Теорема 4.1. Последовательность приближений Ритца u_n сходится к решению задачи (1) u по норме в W_2^1 и C, причем $\varepsilon_n = \mathrm{O}\left(\omega^{(3)}(u, \frac{1}{n}) \Big/ n^2\right)$, и если $\lim\limits_{n \to \infty} \omega^{(3)}(u, \frac{1}{n}) n^{-1} (\ln n)^{1+\varepsilon} = 0$, тогда:

$$\|u - u_n\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C_1 \omega^{(3)}(u, \frac{1}{n}) \cdot n^{-1} + C_2 \sum_{S=m}^{\infty} \omega^{(3)}(u, \frac{1}{2^s}) \cdot 2^{-s},$$

где C_1 и C_2 – некоторые постоянные, $\omega^{(3)}(u, \frac{1}{n})$ - максимальный модуль непрерывности производных третьего порядка функции $u(x)$ и $2^{m-1} \leq m < 2^m$.

Замечание. В случае двух геометрических переменных имеют место оценки:

$$\varepsilon_n = \mathrm{O}(\frac{1}{n^{2(2+\alpha)}}), \|u_n - u\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C_1 \sqrt{\varepsilon_n \ln \frac{n}{\varepsilon_n}} + C_2 \sqrt{\varepsilon_n}, \quad (4)$$

В работе [10] изучены k-е приближения $(\vec{V}, u_k^{\pm}, \rho_k)$ исходной задачи являющиеся функциями класса $H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\Omega^{\pm}})$, построены системы уравнений, решениями которых они являются. Формулы (4.3), (4.4) позволяют исследовать Γ_t в зависимости от чисел Рейнольдса Re.

Пусть T^* – температура, которую должна достичь поверхность $\partial\Omega$. Эта температура достигается за счет воздействия тепловых потоков мощности w_1, w_2, w_3, причем мощность одного из них w_3 равномерно распределена в центре $\partial\Omega$, а два других w_1 и w_2 сконцентрированы по краям $\partial\Omega$ [17]. Далее, будет предложен метод нечеткого управления в данном классе задач, который имеет место в спецметаллургии [17].

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – факторы, влияющие на процессе кристаллизации, а $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ – условия, при которых происходит появление нового слитка. Тогда нечеткое управление в нашей модели можно представить в виде функционального отображения: $X = \{X_1, X_2, ..., X_n\} \to Y = \{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$.

В простейшем случае, например, в качестве терм-множества лингвистических переменных x_1, x_2, x_3, где x_1 ={“температура слитка”}, x_2 = ={“способ нагрева”}, x_3 ={“слиток металла”} можно использовать соответственно множества: T = {“минимальная”, “средняя”, “максимальная”}, W = {“минимальный”, “средний”, “максимальный”}, L= {“минимальный”, “средний”, “максимальный”}. Следовательно, получим:

$$x = \{x_1, x_2, x_3\} \to y \in [a,b],$$

где a и b – некоторые числа, а для выходной лингвистической переменной y (температура поверхности слитка) будет использоваться терм-множество Q = {“минимальная”, “средняя”, “максимальная”}. Пределы a и b выбираются таким образом, чтобы произошло отделения слитка от стенок кристаллизации [17]. Далее, формируется база нечетких высказываний из 17 правил.

При численной реализации задачи использовались следующие значения параметров:

$2500 MBm/м^2 \le W \le 5000 MBm/м^2, 600 мм \le L \le 6000 мм$.

Численный расчет, позволяющий построить нечеткое управление, был осуществлен с помощью стандартного алгоритма Мамдани, а результаты получены в ходе эксперимента на объектах управления ЭШП [17].

Численный анализ одной нелинейной математической модели

Пусть $\Omega \in R^3$ – заданная область, граница которой $\partial\Omega$ состоит из двух замкнутых, связных гладких поверхностей Γ^+ и Γ^-, не имеющих самопересечений, причем поверхности $\Gamma^\pm$ предполагаются принадлежащими классу $H^{5+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Пусть далее $\Gamma_t (t \in [0,T])$ – гладкие замкнутые поверхности, лежащие внутри Ω, такие, что Γ^+ лежит внутри ограничений области, границей которой является Γ_t. Свободная поверхность Γ_t – граница раздела фаз в момент времени t – разбивает область Ω на две связные подобласти Ω_t^- и Ω_t^+, занимаемых твердой и жидкой фазами соответственно. Требуется определить вектор скорости $\vec{V}(x,t)$, давление $p(x,t)$, распределения температур твердой и жидкой фаз $u^-(x,t)$ и $u^+(x,t)$ и свободную поверхность Γ_t по следующим условиям:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V}(x,t) + \nabla p(x,t) = \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\vec{V}(x,t) + \vec{f}(u^+), \qquad (5)$$

$$\nabla\vec{V}(x,t) = 0,\ (x,t) \in D_T^+;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u^+(x,t) + \left(\vec{V}\nabla\right)u^+(x,t) - a_+^2\nabla^2 u^+(x,t) = 0, (x,t) \in D_T^+, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u^-(x,t) - a_-^2\nabla^2 u^-(x,t) = 0,\ (x,t) \in D_T^-, \qquad (7)$$

$$u^\pm(x,t)\Big|_{t=0} = A^\pm(x), u^\pm(x,t)\Big|_{x\in\Gamma^+\cup\Gamma^-} = B^\pm(x,t), \qquad (8)$$

$$\vec{V}(x,t)\Big|_{t=0} = \vec{C}(x), \vec{V}(x,t)\Big|_{x\in\Gamma^+\cup\Gamma_t} = 0, \qquad (9)$$

$$u^\pm(x,t)\Big|_{x\in\Gamma_t} = 0, \sum_{i=1}^{3}\left[K_-\frac{\partial u^-}{\partial x_i} - K_+\frac{\partial u^+}{\partial x_i}\right]\cos(n,x_i) + K\cos(n,t) = 0,\ x \in \Gamma_t, \qquad (10)$$

где $D_T^\pm = \{(x,t) : x \in \Omega_t^\pm, t \in (0,T)\}$, $\partial\Omega^\pm\Gamma_t \cup \Gamma^\pm$, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$, $\vec{n}$ – нормаль к Γ_t, направлена в сторону Ω_t. Предполагается, что $B^\pm(x,t) \in H^{3+\beta,(3+\beta)/2}(\Gamma^\pm \times [0,T])$, $0 < \beta < \alpha$, $A^\pm(x) \in H^{5+\alpha}\left(\overline{\Omega_0^\pm}\right)$, $\vec{C}(x) \in H^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega^+}\right)$, где $\Omega_0^\pm$ – области, на которые разбивает Ω граница раздела фаз Γ_0 в момент времени $t = 0$ и $B^\pm(x,t) \ge \varepsilon_0 > 0$ при $(x,t) \in \Gamma^\pm \times [0,T]$.

Параметры $a_\pm$, $K_\pm$, K, Re, ε_0 – считаются положительными постоянными, а $\vec{f}(u^+)$ – принадлежащей классу $C^2(R^1)\ \vec{f}'(u^+)$ – ограниченной в R^1. Задача (4.5) –(4.10) при малых значениях t разрешима в классе гладких функций, при этом $u^\pm \in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{D_T^\pm})$, $\vec{V} \in H^{2+\beta,(2+\beta)/2}(\overline{D_T^\pm})$, а свободная поверхность Γ_t принадлежит классу $H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}$ [5].

Настоящая работа посвящена приближенному анализу задачи (4.5) –(4.10).

Для точек поверхности Γ_0 введем координаты $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, через $x(\omega) \in \Gamma_0$ или через ω будем обозначать также соответствующие точки в R^3. Далее, пусть $\vec{n}(\omega)$ – нормаль к Γ_0, направленная внутрь Ω_0^+. В работе [10] установлено, что поверхность Γ_t можно представить в виде $\Gamma_t = \left\{x = x(\omega) + \vec{n}(\omega)\rho(\omega,t)\right\}$ с некоторой функцией $\rho(\omega,t)$ класса $H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\Gamma_0 \times [0,T])$, так что $\rho(\omega,0) = 0$.

Предположим, что при малых значениях Re неизвестные нашей задачи можно представить в виде степенного ряда:

$u^{\pm}(x,t) = u_0^{\pm}(x)+;$

$$V_i(x,t) = V_{i0}(x) + \sum_{K=1}^{\infty} (\mathrm{Re})^K V_{iK}(x,t),\ i = 1,2,3;$$

$$\rho(\omega,t) = \sum_{K=1}^{\infty} (\mathrm{Re})^K \rho_K(\omega,t).$$

В работах [8-10] изучены нулевые и первые приближения задачи (4.5) – (4.10) для малых чисел Re. При этом установлено, что $u_0^{\pm} = A^{\pm}(x)$, $\vec{V}_0(x) = \vec{C}(x)$, $\rho_1(\omega,t) \in \mathrm{H}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\Gamma_0 \times [0,T])$, $u_1^{\pm}(x,t) \in \mathrm{H}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{D_T^{\pm}})$, причем $\rho_1(\omega,t)$ находим как неподвижную точку сжимающегося оператора M_1:

$$M_1\rho_1 = \frac{1}{K}\int_0^t \left(K_- \frac{\partial u_1^-}{\partial n} - K_+ \frac{\partial u_1^+}{\partial n} + f(x,t) \right) dt,$$

$x(\omega) \in [0,T]$,

а $f_1(x,t)$ - некоторая функция класса $\mathrm{H}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}$

Рассмотрим случай, когда $B^{\pm} = B^{\pm}(x)$ и $\Omega = \{(x_1,x_2,x_3) : r^2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2\}$.

Тогда нулевое приближение находим как решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \nabla^2 u^{\pm}(x) = 0,\ x \in \Omega_0^{\pm},\ A^{\pm}(x)\big|_{\Gamma^{\pm}} = B^{\pm}(x),\ u^{\pm}(x)\big|_{\Gamma_0} = 0, \\ \vec{C}(x) = 0,\ x \in \overline{\Omega_0^{\pm}},\ \left|\nabla u^-(x)\right| - \left|\nabla u^+(x)\right| = 0,\ x \in \Gamma_0 \end{cases} \quad (11)$$

Заметим, что замена $\tilde{u}^- = K_- u^-$ при $x \in \Omega^-$ и $\tilde{u}^+ = K_+ u^+$, если $x \in \Omega^-$ сводит задачу (4.11) к случаю $\left|\nabla u^-(x)\right| = \left|\nabla u^+(x)\right|,\ x \in \Gamma_0$. поэтому в дальнейшем будем считать, что это условие выполнено.

Нулевое приближение $u_0^{\pm}(x)$, Γ_0 найдем из условия минимума функционала $Y(u_0^{\pm}, \Gamma_0) = \iiint_{\Omega} \left|\nabla u\right|^2 dx_1 dx_2 dx_3$, здесь $\Omega = \Omega_0^+ \cup \Omega_0^-$ и $u = u^-$ при $x \in \Omega^-$ и $u = u^+$, если $x \in \Omega^+$.

Далее, рассматривая функционал Y в сферических координатах, получим

$$Y(u_0) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_r^R \left(u_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} u_0^2 + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta} u_\varphi^2 \right) \rho^2 \sin\theta d\varphi d\theta d\rho$$

Минимум функционала ищем в следующем виде

$$u = B^+ + \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - r^2}(B^- + B^+) + (R^2 - \rho^2)(\rho^2 - r^2)\sum_{K=0}^{\infty} C_K \rho^K y_c(\varphi,\vartheta)$$

Неизвестные коэффициенты C_K определяются методом Ритца. В частности, в случае нулевого приближения

$$u_0 = B^+ + \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - r^2}(B^- + B^+) + (R^2 - \rho^2)(\rho^2 - r^2)C_0,$$

из уравнения $\partial Y(u_0)/\partial C_0 = 0$ определим коэффициент C_0. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2. Поверхность Γ_0 представляет собой поверхность класса C^{∞}, не имеющую самопересечений и расположенную относительно Γ^+ и Γ^- аналогично поверхности Γ_t в задаче (4.5) – (4.10).

Доказательство следует из принципа максимума, применённого к гармонической функции $\Psi(x) = -\dfrac{\partial u_0(x)}{\partial \vec{r}}$ оценок $-\dfrac{\partial u_0(x)}{\partial \vec{r}}\bigg|_{\Omega} \ge \tilde{\varepsilon}_0 > 0$ и теоремы о неявной функции, применённой к $\Psi(x)$. Здесь $\vec{r}$ – радиус-вектор точки x.

Отсюда следует, что поверхность $\Gamma_0 : \rho = \rho_0(\varphi,\theta)$ можно найти из условия $u_0(\varphi,\theta,\rho_0(\varphi,\theta)) = 0$. Тогда для поверхности Γ_t можно воспользоваться уравнением [10]:

$$\Gamma_t = \rho(\varphi,\theta,t) = \rho_0(\varphi,\theta) - \mathrm{Re}\frac{u_1^{\pm}(\varphi,\theta,t)}{\left|\nabla A^{\pm}(\varphi,\theta)\right|} + o(\mathrm{Re})$$

На рис. 1 представлена поверхность Γ_t.

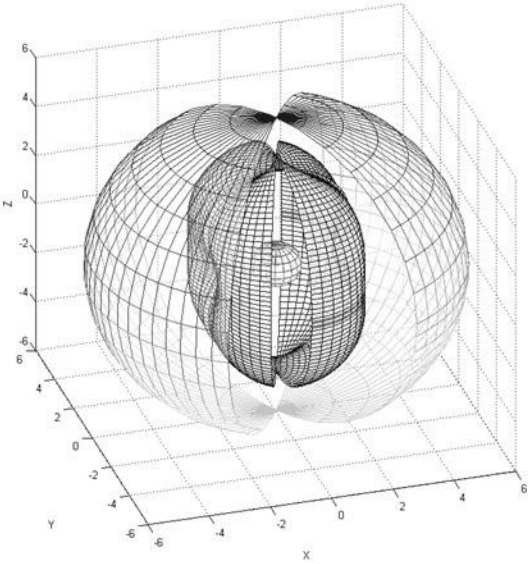

Рисунок 1 - Поверхность Γ_t

При построении использованы следующие значения параметров:

$$t = 200,\ R = 6,\ r = 0{,}8,\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{3},$$

$$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ B^+ = 3\left|\cos^2\theta + \cos^2\varphi\right|,$$

$$B = -0{,}35\left|\cos^2\theta + \cos^2\varphi\right| - 0{,}1.$$

Свободная поверхность Γ_t расположена между сферами радиусов R и r.

Предложенный алгоритм построения поверхности Γ_t позволяет исследовать эту поверхность в зависимости от параметров задачи (5) – (10).

Заключение

В заключение отметим, что в данной статье была рассмотрена задача Стефана для моделирования сложных систем.

Литература

1. Миненко А.С. Исследование одной конвективной задачи Стефана методом Ритца // Укр. мат. журнал. 2007. – 59, № 11. – С. 1546 – 1556.

2. Миненко А.С., Шевченко А.И. Об одной проблеме Стефана // Доповіді НАН України. – 2008. – № 1 – С. 26 – 30.

3. Миненко А.С. Проблема минимума со свободной границей // Искусственный интеллект. – 1998. – №2. – С. 101 – 109.

4. Данилюк И.И., Миненко А.С. Об одном подходе к анализу стационарной задачи Стефана при наличии конвекции в жидкой фазе. – В кн.: Мат. физика и Нелин.механика.- Киев, Наукова думка, 1985.- Вып. 65. – С. 39-48.

5. Миненко А.С., Шевченко А.И. Приближенный анализ стационарной конвективной задачи Стефана // Доповіді НАН України.-2010.-№5.-С.36-40.

6. Миненко А.С., Шевченко А.И. Приближенный анализ одной пространственной конвективной задачи теплопроводности // Доповіді НАН України. – 2007. – № 7. – С. 22 – 27.

7. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики.-М.: Наука, 1973.- С.407.

8. Миненко А.С., Шевченко А.И. Исследование конвективного теплопереноса в одной пространственной задаче теплопроводности // Доповіді НАН України.- 2007. – № 9. – С.25-29.

9. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с

10. Миненко А.С., Шевченко А.И. Приближенный анализ многомерной конвективной задачи Стефана // Доповіді НАН України.- 2010.-№4 – С.30-34.

11. Данилюк И.И. О задачах Стефана // Успехи мат. наук. – 1985. – Т. 40, № 5(245). – С. 133 – 185.

12. Миненко А.С., Шевченко А.И. Математическое моделирование процессов кристаллизации металла с учетом конвекции и примесей //Доповіді НАН України.-2011.-№6-С.35-39.

13. Солонников В.А. разрешимость задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью // Изв. АН СССР. Сер. мат.-1977.-41, №6.-С.1388-1424.

14. Данилюк И.И. Математическое моделирование фазовых превращений в двухкомпонентных средах //Доповіді НАН Украхни.-1984.-№12.-С.10-13.

15. Лихт М.К., Кузьминская С.Б. О затвердевании бинарных сплавов в интервале температур. - Физика металлов и металловедения. – 1961. – 11, №6. – С.878-882.

16. Борисов В.Т. Кристаллизация бинарного сплава при сохранении устойчивости // Докл. АН СССР. – 1961, - 136, №3. – С.583-586.

17. Скворцов А.А. К решению вопроса о затвердевании металлов в интервале температур // Затвердевание металлов.-М.: Машиз.-1958.-С.124-160.

18. Борисов В.Т., Виноградов В.В., Духин А.И. О применимости теории квазиравновесной двухфазной зоны к описанию кристаллизации слитка // Изв. АН СССР. Сер. металлы.-1971, №6. – С.104-109.

19. Данилюк И.И. О смешанной задаче для квазилинейного управления теплопроводности с кусочно-разрывными коэффициентами // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981, №7. – С.3-7.

20. Данилюк И.И. О начально-краевой задаче для квазилинейного уравнения теплопроводности с кусочно-непрерывными коэффициентами // Проблемы математики и механики. – Новосибирск – 1983. – С.81-94.

21. Данилюк И.И., Миненко А.С. О методе Ритца в одной нелинейной задаче со свободной границей // Докл. АН УССР. Сер А. – 1978. – № 4. – С. 291 – 294.

22. Данилюк И.И., Миненко А.С. Об одной вариационной теплофизической задаче со свободной границей // Сб. докладов на конф. По смешанным граничным задачам и задачам со свободными границами. – Штутгарт, 1978. – С. 9 – 18.

23. Данилюк И.И., Миненко А.С. О вариационном методе изучения квазистационарной задачи Стефана // Успехи мат. наук. – 1981. – Т. 43, № 5. – С. 228.

Миненко А.С., Радевич Е.В. Приближенный анализ конвективной задачи Стефана. *Осуществляется математическое моделирование одного класса сложных систем с применением нечеткой логики, а также численный анализ нелинейной математической модели.*

Ключевые слова: *задача Стефана, анализ, математическое моделирование, математическая модель, нечеткая логика.*

Minenko A. S., Radevich E. V. Approximate analysis of convective Stefan problem*. Performed mathematical modeling for a class of complex systems using fuzzy logic, and numerical analysis of nonlinear mathematical models.*

Key words*: Stefan problem, analysis, mathematical modeling, mathematical model, fuzzy logic.*

Статья поступила в редакцию 20.09.2017
Рекомендована к публикации д-ром техн. наук В.Н. Павлышом