

УДК 004.0-519.854.001

Вероятностные автоматы и асинхронность

А.И. Андрухин, к.т.н,
Донецкий национальный технический университет, г. Донецк,
alexandruckin@ramber.ru

Андрухин А.И. Вероятностные автоматы и асинхронность. Целью исследования является применение моделей вероятностных автоматов для повышения точности описания асинхронных процессов. Оно основано на анализе неопределенности начального состояния и предположениях относительно длительности переходов в вероятностных автоматах. В работе была выполнена разработка алгоритма статистического моделирования для оценок характеристик асинхронных переходов в вероятностных автоматах. Приведены результаты компьютерных расчетов. В расчетах использовался пакет Mathematica.

Ключевые слова: вероятностный автомат, асинхронность, компьютерная модель, функция распределения.

Введение

В стандартной классификации математических моделей систем, если при исследовании случайные факторы не учитываются, мы имеем дело с детерминированными моделями. Для описания систем, функционирующих в непрерывном времени, применяем дифференциальные, интегральные и другие уравнения, а для описания систем, действующих в дискретном времени, - конечные автоматы и конечно-разностные схемы. Если же при исследовании мы случайные факторы учитываем, то используем стохастические модели, т.е. для представления систем с непрерывным временем применяем модели систем массового обслуживания (СМО), а для описания систем с дискретным временем используем вероятностные автоматы (ВА).

Согласно [1-8], основой описания вероятностных автоматов является вероятностная функция, описывающая его поведение $\text{Prob}[s(t+1)y(t)/s(t), x(t)]$, которую обычно разбивают на две части:

1) Функцию перехода автомата из одного состояния в другое.

2) Выходную функцию.

Для целей статьи достаточно использовать табличное представление переходов вероятностных автоматов и таблицу выходов.

Эти таблицы переходов и выходов ВА задают вероятности перехода ВА в состояние $s(t+1)$ в момент времени $t+1$ и выдачи выходного сигнала $y(t)$ в момент времени t в зависимости от нахождения в состоянии $s(t)$ и воздействия $x(t)$ в момент времени t .

Целью исследования является применение моделей ВА для описания при повышении точности асинхронных процессов. Оно основано на анализе неопределенности

начального состояния и предположениях относительно длительности переходов в ВА.

Задачей исследования является разработка алгоритма статистического моделирования для оценок характеристик асинхронных переходов в ВА.

Более конкретно, выполняются расчеты для определения доли вероятностных автоматов с задаваемыми распределениями входов, выходов состояний, которые :

1) удовлетворяют условию псевдопоглощения, т.е. они постоянно выдают конкретный выход Y_x при переходах по различным состояниям. Напомним, что условие поглощения определяется выражением $\delta(S,X)=\delta(\delta(S,X),X)$, т.е. постоянное воздействие одних и тех же входных сигналов в автоматах должно приводить их в стационарное состояние.

Одной из важнейшей областью применения ВА является их применение при описании работы процессора(ов) ЭВМ в многозадачном режиме, т.е. при описании асинхронных параллельных процессов.

Для детерминированных автоматов при их реализации чрезвычайно важен учет асинхронности переходов, которые обусловлены состязаниями сигналов [9].

Состязания элементов памяти приводят к тому, что автомат при изменении состояния не сразу оказывается в том состоянии, которое запланировано требованиями проекта, а переходит в него через несколько непредусмотренных транзитных состояний. Если в результате такого перехода, независимо от соотношений задержек элементов памяти, автомат достигает того состояния, в которое он должен перейти, то такие состязания считаются некритическими. Если же существует хотя бы одна комбинация значений задержек элементов памяти, при которой автомат не достигает фиксированного требуемого

состояния, то такие состязания являются существенными или критическими.

Согласно [9], присутствие существенных состязаний можно определить по таблице переходов на уровне абстрактного автомата. Рассмотрим соседнее изменение входов $X_K \rightarrow X_L$ на рис.1.

	X_K	X_L
S_I	S_I	S_J
S_J	S_M	S_J
S_M	S_M	S_P

Рисунок –1.Фрагмент таблицы переходов.

Автомат должен перейти в устойчивое состояние S_J .

Однако структурная реализация может привести к тому, что новое состояние S_J воспринимается частью схемы при старых входных воздействиях X_K . Поэтому возможен переход схемы в состояние S_J . Полностью завершившийся переход $X_K \rightarrow X_L$ может привести к переходу всей схемы из состояния S_M в состояние S_P .

Некритические состязания могут существенно изменять время, затрачиваемое автоматом на переход в нужное состояние, поскольку автомат может совершать различное число транзитных переходов в зависимости от соотношения между задержками.

Основные обозначения для модели расчета

Обозначим через nX , nY , nS число входов, выходов и состояний исследуемых ВА. Введем следующие обозначения. \

Пусть $S_{ikj} = \text{Prob}(s=i, x=k, s_{\text{new}}=j)$ - вероятность перехода ВА из состояния $s=i$ в состояние $s_{\text{new}}=j$ при входном воздействии $x=k$ и $Y_{ikl} = \text{Prob}(s=i, x=k, y=l)$ - вероятность выдачи ВА выходного сигнала $y=l$ из состояния $s=i$ при входном воздействии $x=k$.

Для ВА выполняются следующие соотношения

$$\sum_{i=1}^{nS} \sum_{j=1}^{nS} S_{ikj} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{nS} \sum_{l=1}^{nY} Y_{ikl} = 1$$

Напомним, что при проектировании обычно учитывают условие поглощения $\delta(S,X) = \delta(\delta(S,X),X)$, т.е. постоянное воздействие одних и тех же входных сигналов для технических устройств должно приводить их в стационарное состояние.

Математическая модель ВА для расчета

Основываясь на рассуждениях для асинхронных конечных детерминированных автоматов, построим оценки по аналогии для ВА. Рассмотрим рис. 2, 3.

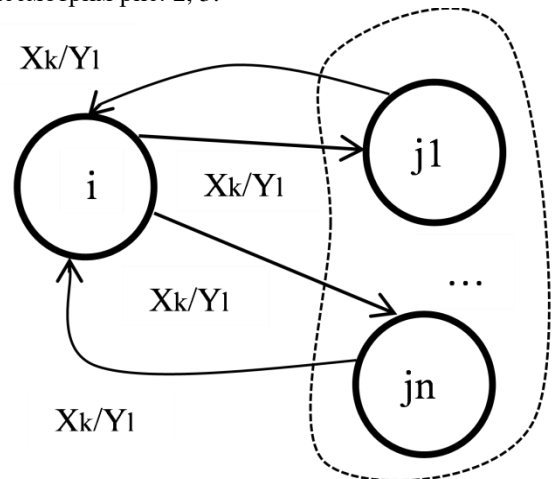


Рисунок 2-Граф переходов при P=2 .

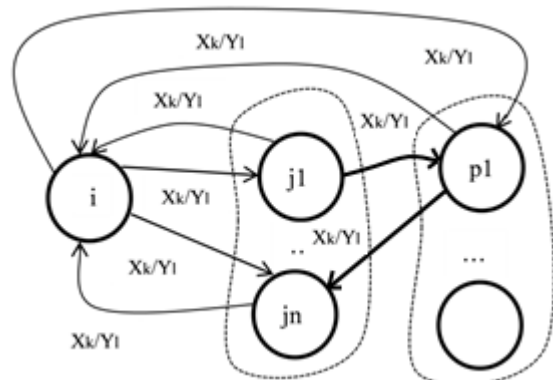


Рисунок 3-Граф переходов при P=3.

Выполним оценку вероятности $Y_{2_{ikl}}$ нахождения в состоянии i при дальнейшем переходе в состояния j_1, \dots, j_n с возвратом в i (т.е. за 2 перехода). Для этого мы используем формулу

$$Y_{2_{ikl}} = \sum_{j=1}^{nS} S_{ikj} Y_{ikl} S_{jki} Y_{jkl}$$

Аналогично построим оценку вероятности Y_{3ikl} нахождения в состоянии i при дальнейшем переходе в состояния j_1, \dots, j_n и далее при переходе из этих состояний в состояния p_1, \dots, p_n с возвратом в i (т.е. за 3 перехода).

Аналогичная формула представлена ниже

$$Y_{3ikl} = \sum_{p=1}^{nS} \sum_{j=1}^{nS} S_{ikj} Y_{ikl} S_{jkp} Y_{jkl} S_{pki} Y_{pkl}$$

Алгоритм расчета

Считая, что условия неопределенности имеют случайную природу, мы фиксируем данные по наблюдаемым выходным характеристикам, т.е. таблицу Y распределения выходов ВА.

Тогда алгоритм представим в следующем виде:

1. Установка номера распределения $I=0$.
2. $I=I+1$.
3. Если $I>I_{max}$, то конец расчета.
4. Начало цикла по испытаниям: $Z=0$, $S=0$.
5. $Z=Z+1$.
6. Если $Z>Z_{max}$, то переход на п.9.
7. Заполнение массива S .
8. Переход на п.5
9. Вычисление $S_k = \sum_i \sum_j S_{ikj}$.
10. Нормирование $S_{ikj} = S_{ikj} / S_k$.
11. Обработка и выдача результатов по распределению I .
12. Переход на п.2 (новое распределение)

На рис.4 представлены результаты расчетов для равномерного распределения.

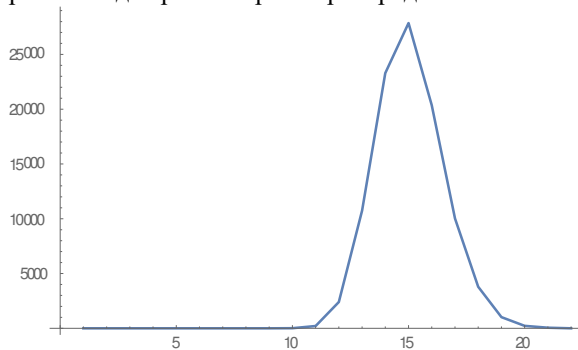


Рисунок 4-Гистограмма частоты $Z_{max}=100000$.

Основная схема экспериментальных расчетов

На рис.5 представлена матрица марковской цепи для анализа соответствующего ВА. Количество строк этой матрицы равно количеству состояний NS умноженное на количество входных сигналов NX .

Количество столбцов этой матрицы равно произведению числа состояний NS и количества выходных сигналов NY . Элементом матрицы является значение вероятности P_{ij} перехода из состояния i в состояние j , где i определяется парой (s,x) , а j соответствует паре (s,y) . Здесь $s=1, NS$ – состояние ВА, $x=1, NX$ – входной сигнал, а $y=1, NY$ – выходной сигнал ВА.

	1,1	1,2	...	K,1	..	S,1	...	S,Y
1,1								
1,2								
...								
I,1								
I,2				P_{ij}				
...								
S,1								
S,2								
...								
S,X								

Рисунок 5-Модель марковской цепи для анализа вероятностного автомата.

Алгоритм определения вероятностей определенной длины (цепочки) переходов при постоянном воздействии фиксированного сигнала x можно представить согласно рис.6 следующим образом.

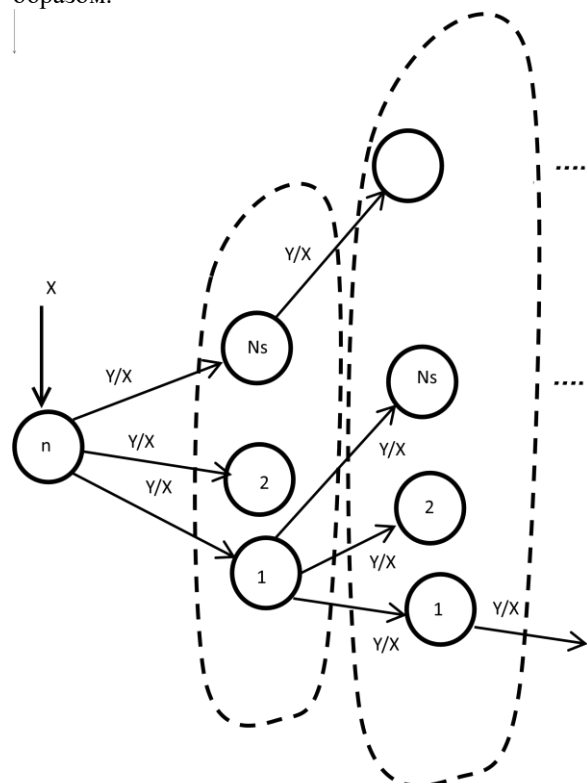


Рисунок 6-Расчет вероятностей для переходов различной длины в ВА.

Для фиксированной пары (s, x) , в которую мы попали за $i-1$ переход, существует NS пар – последовательностей (s_k, y_0) с требуемым выходом y_0 .

Можем обозначить через V_i множество переходов длины i из конкретной фиксированной пары (s, x) , которые всегда выдают определенный выходной сигнал y_0 . Таким образом, $L(i)$ - число переходов длины i равно $NS \cdot L(i-1)$ и следовательно, $L(i) = NS^i$. Элементу V_i соответствует вероятность перехода, которая равна произведению вероятностей соответствующих i переходов согласно матрице.

Представляет интерес решение вопроса, как влияет на распределение вероятностей для множеств V_i вариация числа состояний, входных и выходных реакций вероятностного автомата при определенном распределении вероятностей P_{ij} в соответствующей ВА матрице марковской цепи.

На рис.7-15 для равномерного распределения имеем результаты расчетов для определенных размерностей ВА, где усредненная реализация получена для 10000 испытаний.

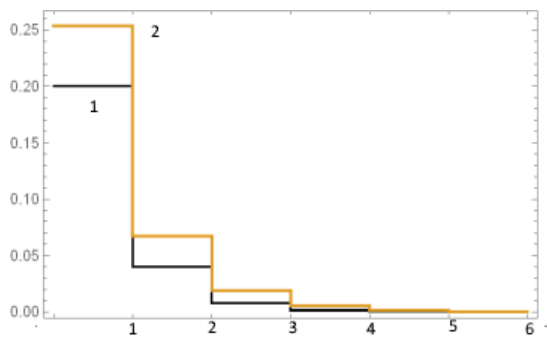


Рисунок 7-Вероятности длин переходов при $s=6, y=4, x=2$:1-реализация, 2-усредненное среднее.

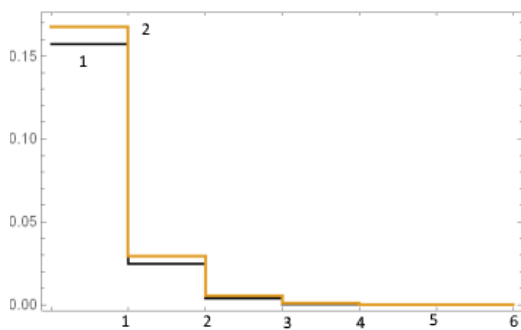


Рисунок 8-Вероятности длин переходов при $s=6, y=6, x=2$:1-реализация, 2-усредненное среднее.

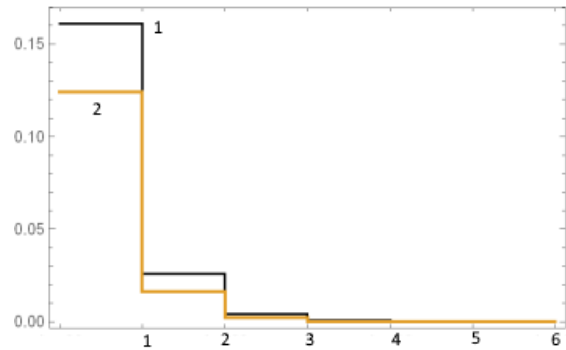


Рисунок 9-Вероятности длин переходов при $s=6, y=8, x=2$:1-реализация, 2-усредненное среднее.

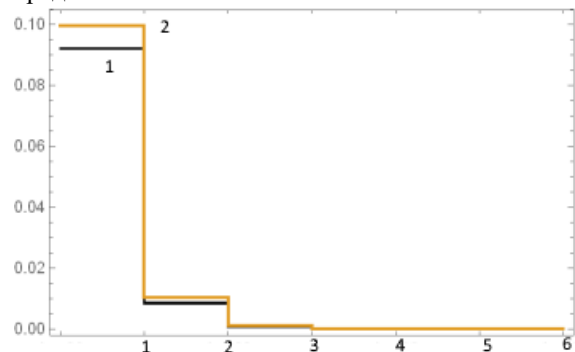


Рисунок 10-Вероятности длин переходов при $s=6, y=10, x=2$:1-реализация, 2-усредненное среднее.

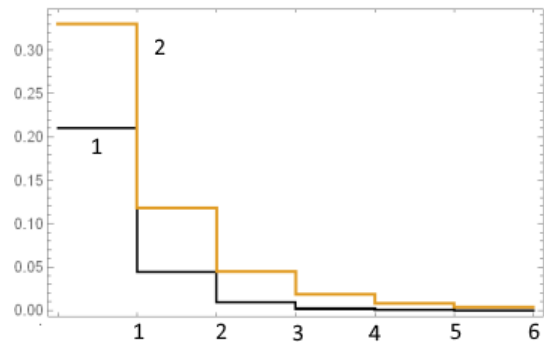


Рисунок 11-Вероятности длин переходов при $s=4, y=3, x=2$:1-реализация, 2-усредненное среднее.

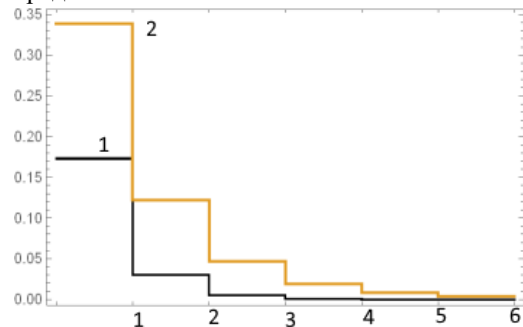


Рисунок 12-Вероятности длин переходов при $s=5, y=3, x=2$:1-реализация, 2-усредненное среднее.

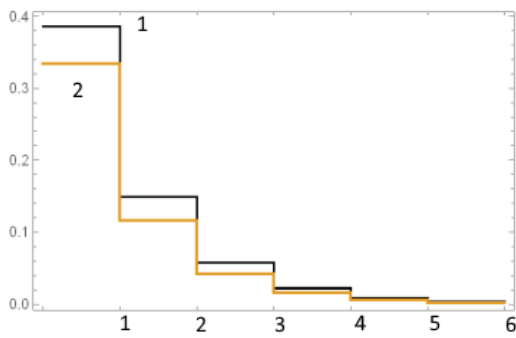


Рисунок 14-Вероятности длин переходов при $s=7, y=3, x=2$:1-реализация, 2-усредненное среднее

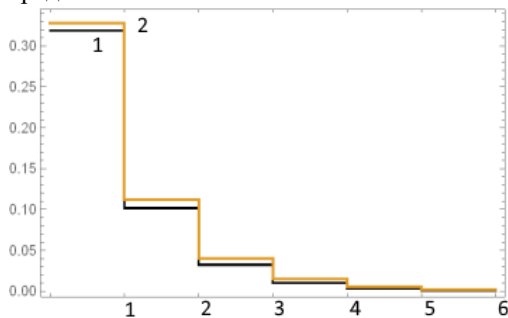


Рисунок 15-Вероятности длин переходов при $s=8, y=3, x=2$:1-реализация, 2-усредненное среднее.

Оценки времени перехода для ВА

Общая модель ВА не включает в себя временные параметры, но естественно большое количество специалистов конкретизировали распределения времен перехода в различных проблемных областях и предлагали решения [10-13]. Так укажем важную модель синхронизации (корреляции) функционирования различных иерархических уровней головного мозга, которая исследовалась в [13]. В ней использовалось геометрическое распределение.

Интерес представляют такие вероятностные распределения времен перехода как нормальное, экспоненциальное и распределения Релея, Накагами и Гумбеля. Последнее применяется в теории надежности для описания наибольших или наименьших значений в последовательности случайных величин.

Распределения Релея и Накагами часто используется как модель для статистических сигналов, переданных через радиоканалы. Более конкретно, распределения Релея (Накагами) применяются для описания статистики флуктуаций сигнала на выходе многопутевого канала (каналов) с замираниями соответственно.

На рис.16-23 представлены результаты расчетов для различных распределений и конкретного числа переходов и x_i -длительности переходов.

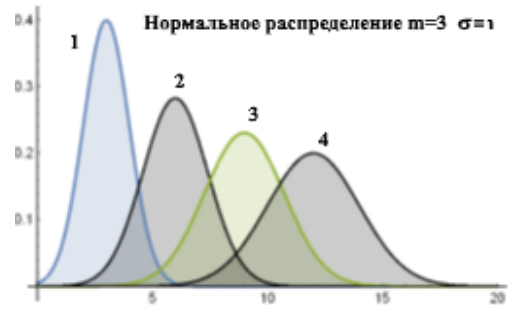


Рисунок 16-Функции плотности распределения:1- x_1 , 2- x_1+x_2 , 3- $x_1+x_2+x_3$, 4- $x_1+x_2+x_3+x_4$.

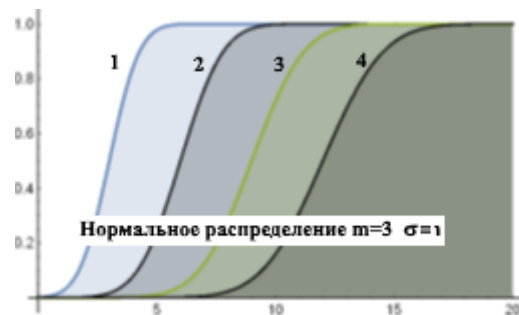


Рисунок 17-Функции распределения:1- x_1 , 2- x_1+x_2 , 3- $x_1+x_2+x_3$, 4- $x_1+x_2+x_3+x_4$.

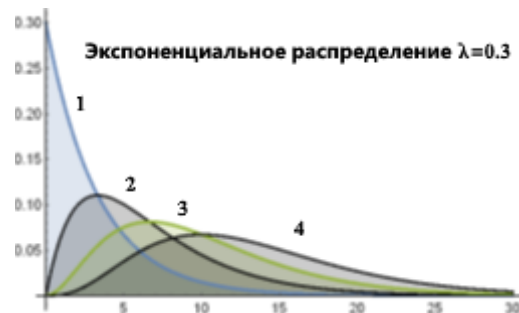


Рисунок 18-Функции плотности распределения:1- x_1 , 2- x_1+x_2 , 3- $x_1+x_2+x_3$, 4- $x_1+x_2+x_3+x_4$.

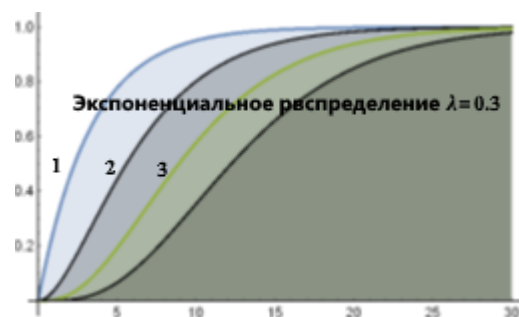


Рисунок 19-Функции распределения:1- x_1 , 2- x_1+x_2 , 3- $x_1+x_2+x_3$, 4- $x_1+x_2+x_3+x_4$.

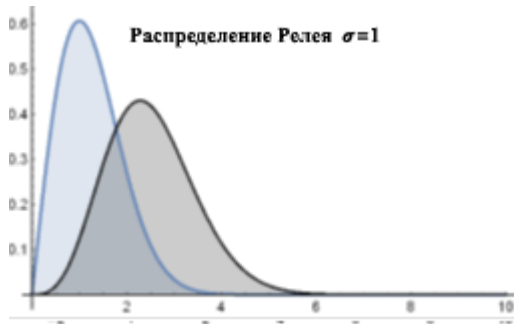


Рисунок 20-Функции плотности распределения: 1- x^1 , 2- x^1+x^2 .

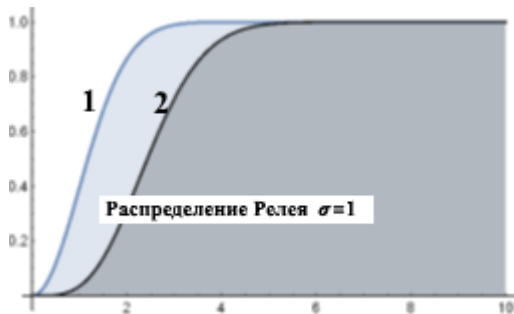


Рисунок 21-Функции распределения: 1- x^1 , 2- x^1+x^2 .

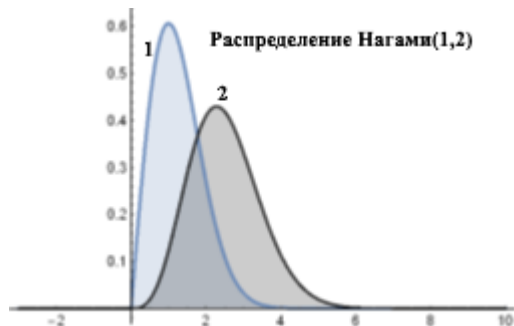


Рисунок 22-Функции плотности распределения: 1- x^1 , 2- x^1+x^2 .

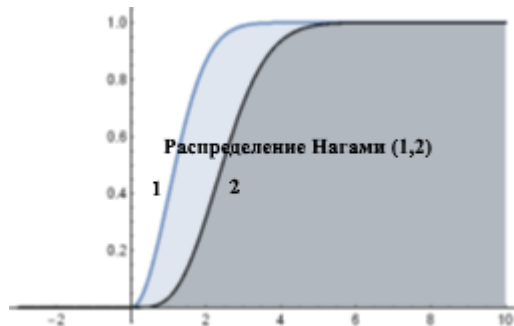


Рисунок 23-Функции распределения: 1- x^1 , 2- x^1+x^2 .

Асинхронная логика

Построение и проектирование дискретных систем и в частности цифровых устройств, которые работали бы независимо от значения времени переходов, привело к созданию различных вариантов асинхронной логики [10-12].

Общеизвестны преимуществ асинхронных схем - быстрдействие, независимость от рассинхронизации часов, низкое энергетическое рассеяние, модульная конструкция, иммунитет к метастабильному поведению, а также низкой чувствительности к электромагнитным помехам и малое их порождение [12].

Однако сложность проектирования асинхронных схем является одной из основных причин доминирования синхронных схем.

Формализмы, использованные в асинхронном проектировании интегральных схем, могут быть разделены на два класса: формализм, базирующийся на булевой алгебре и формализм, основанный на последовательностях событий. На практике большинство методологий разработки асинхронных схем используют смешение обоих формализмов.

Разработка многих асинхронных схем основана на булевой алгебре или ее производной теории переключений. Такие схемы используют модель ограниченных задержек, и примитивные элементы - вентили, соответствующие основным логическим функциям, как И, ИЛИ, НЕ. Этот формализм удобен для реализации логических функций, анализа схем на присутствие паразитных импульсов, синтеза схем [14].

Событийный формализм имеет дело с последовательностями событий, а не переменных бинарной логики. Схемы, разработанные с помощью этого формализма и использованием модели неограниченных задержек, обычно работают в режиме ввода - вывода и имеют такие примитивные элементы, как разветвления, переключатели, и слияния. Формализм на базе событий очень удобен для конструирования асинхронных схем, при высокой степени запутанности параллелизма.

Были созданы несколько инструментальных средств для автоматической проверки асинхронных схем с событийным формализмом. Примерами таких формализмов являются, к примеру, сети Петри.

На рис.25 показано несколько простых примитивов и их обозначений, используемых в event-based методах проектирования.

Самый простой примитив *WIRE* (ПОТОК ДАННЫХ) - это двухполюсный элемент, который формирует выходное событие на выходе b после каждого входного события на входе a . События входа и выхода в потоке данных, должны чередоваться. Входное событие должно

сопровождаться выходным событием b прежде, чем произойдет другое событие. Поток данных физически осуществляется с помощью провода (шины), а события - изменениями напряжения. Инициализированный поток данных, или *IWIRE*, очень похож на *WIRE*, за исключением того, что *IWIRE* формирует событие выхода b вместо того, чтобы принять входное событие a ; после этого, его режим работы совпадает с *WIRE*.

Примитив для синхронизации – *JOIN* (объединение), также называемый *RENDEZVOUS* (рандеву). *JOIN* имеет два входа a и b и один выход c . *JOIN* выполняет операцию Логическое И двух событий – a и b . Он формирует событие выхода c только после того, как получают события оба входа, a и b . Входные данные могут измениться снова, только после того, как сформированы выходные данные. *JOIN* может быть реализован *C*-элементом Мюллера, который рассматривается далее.

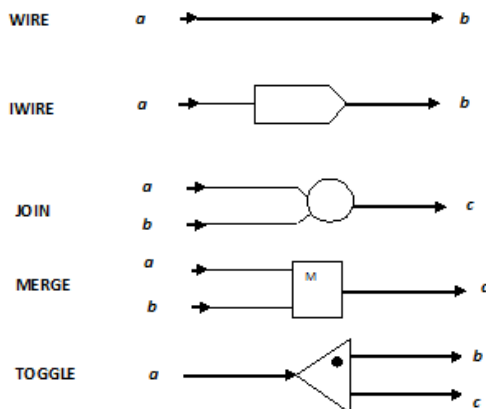


Рисунок 25-Основные нечувствительные к задержкам примитивы

Элемент *MERGE* (объединение) выполняет операцию Логическое ИЛИ двух событий. Если элемент *MERGE* получает событие на любом из его входов, a или b , он формирует событие выхода c . После входного события следует выходное; последовательные входные события не допускаются. *MERGE* может быть реализован логическим элементом *XOR*.

TOGGLE (переключатель) имеет один вход и два выхода b и c . После появления события на входе a , оно формируется на выходе b . Следующее событие на входе a формируется на выходе c . Входное событие должно сопровождаться событием выхода прежде, чем произойдет другое входное событие. Таким образом, события выхода чередуются или переключаются после каждого входного события. Точка на рисунке схемы показывает какой выход формирует событие первым.

C-элемент Мюллера назван по имени его изобретателя Д. Е. Мюллера [15]. Традиционно, его логическое поведение описывается следующим образом. Если оба входа - 0 (1), то выход становится 0 (1); иначе говоря, сохраняет то же значение. Для правильности операций *C*-элемента, также предполагается, что, как только оба входа становятся 0 (1), они не изменяются снова, пока не поменяется выход. Поведение выхода c *C*-элемента выражается с использованием значений входов a и b и предыдущего состояния выхода c' следующей логической функцией $c = c'(a \vee b) \vee a \vee b$.

C-элемент может использоваться для реализации *JOIN*, который имеет несколько более ограниченное поведение окружения, в том смысле, что входные данные не разрешено изменять дважды в последовательности. Мы приводим две самые распространенные КМОП реализации из их множества на рис. 26.

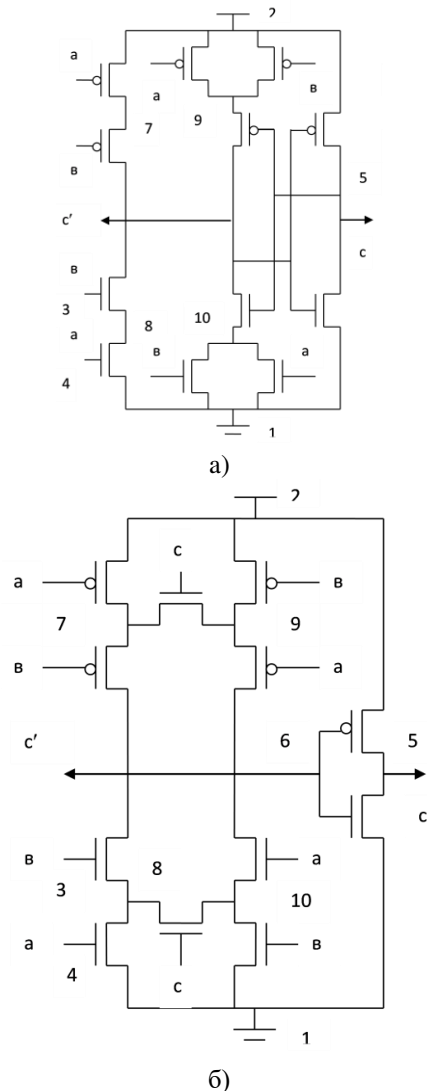


Рисунок 26-КМОП-реализации *C*-элемента:(а)-стандартная;(б)-симметрическая.

Реализация (a) – стандартная, предложенная Сазерлендом [12]. Реализация (b) предложена Ван Беркелем [16].

Каждая реализация имеет свои собственные характеристики. Реализация (b) – считается реализацией лучшей по критерию быстродействия и эффективности.

Рассмотрим два контролируемых событиями фиксатора Сазерленда [62], которые изображены на рис.27. Их работа управляется с помощью двух входных управляющих сигналов: фиксирование и проход, помеченных соответственно *c* и *p*. Они, также, имеют два управляющих выходных сигнала: осуществлено фиксирование- *cd*, и осуществлен проход- *pd*. Входные данные - *D*, выходные данные - *Q*. Реализация (a) состоит из трех так называемых переключателей на два направления. Реализация (b) включает *MERGE*, *TOGGLE* и контролируемый уровень фиксатор, состоящий из переключателя на два направления и инвертора. Переключатель на два направления схематично представлен инвертором и переключателем. Переключатель переключает между двумя позициями, в зависимости от логического значения управляющего сигнала.

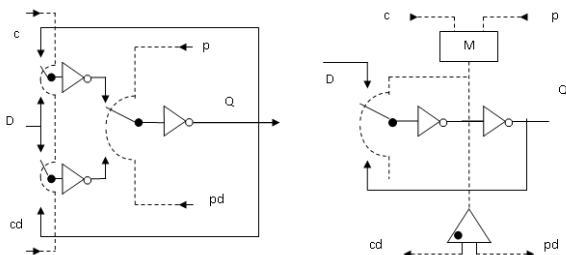


Рисунок 27-Две реализации управляемого событиями фиксатора

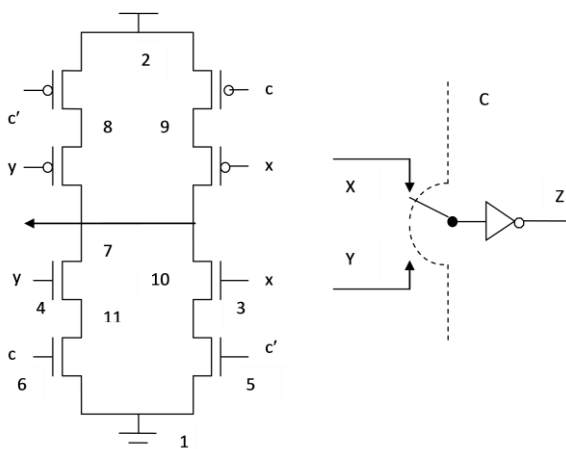


Рисунок 28-. КМОП реализация переключателя на два направления

Переключатель на два направления, фактически, является мультиплексором с двумя входами, который формирует инвертированный вариант его входного сигнала. КМОП реализация переключателя на два направления показана на рис.28 [62]. Позиция коммутатора соответствует состоянию, при котором значение входа *c* низкое.

Контролируемый событиями фиксатор имеет два состояния: прозрачное и непрозрачное.

В прозрачном состоянии никакие данные не фиксируются, но выходные данные копирует входные, потому что путь двух стадий инвертирования лежит между входом и выходом. В непрозрачном состоянии, этот путь построен так, что входные данные можно изменить без воздействия на выходные данные.

Ясно, что при этом текущие данные запираются при выводе. Реализации на рис.27(a), 27(b) показаны в начальных прозрачных состояниях. Фиксирование и проход сигналов в контролируемом событиями фиксаторе всегда чередуются. При переходе на *c*, фиксатор фиксирует текущие входные данные и становится непрозрачным. Следующее перемещение на *cd* - подтверждение провайдеру данных, о том, что текущие данные были зафиксированы и что входные данные могут быть безопасно изменены. Последующее перемещение на *p* возвращает фиксатор назад к его прозрачному состоянию, чтобы следующие данные прошли к выходу. Сигнал *p* подтверждается перемещением на *pd*. Обращаем внимание, что в реализации (a) рис.27, сигналы *cd* и *pd* просто запаздывают и возможно являются усиленными варианты *c* и *p*, соответственно.

Выводы

На практике обычно выполняют реализации конечных детерминированных автоматов в виде современных синхронных процессоров. Значительно реже аппаратные реализации автоматов являются асинхронными схемами ввиду сложности их проектирования

Однако изменения самих аппаратных реализаций (геронтологические, флуктуации окружения и т.п.) приводит к необходимости анализа стохастических приближений детерминированных конечных автоматов и общей моделью обычно выступает ВА.

Получены результаты, когда мы приближаем детерминированные автоматы с помощью ВА, т.е. тогда, когда $S_{ikj} \rightarrow 1$ только при определенном *k* и аналогично $Y_{ikl} \rightarrow 1$. Этот подход применяли в [17]. Однако объем полученных результатов не позволяет привести их в данной работе.

Это направление перспективно для дальнейших исследований

Литература

1. Paz A. Introduction to Probabilistic Automata. New York: Academic Press, 1971. 228 p.
2. Rabin M. O. Probabilistic automata // Information and Control, 1963. Vol. 6.No. 3.P. 230-245.
3. Бухараев Р. Г. Основы теории вероятностных автоматов. Москва, Наука, 1985 г.
4. Segala R., Lynch N. A. Probabilistic simulations for probabilistic processes // Nordic Journal of Computing, 1995. Vol. 2. No. 2. P. 250-273.
5. Stoelinga M. An introduction to probabilistic automata // Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science, 2002. Vol. 78. P. 176-198.
7. Sokolova A., deVink E. P. Probabilistic Automata: System Types, Parallel Composition and Comparison // Lecture Notes in Computer Science, 2004. Vol. 2925. P. 1-43.
8. Darwiche A. Modeling and Reasoning with Bayesian Networks. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. 562 p.
9. Андриюхин А.И. Моделирование и диагностирование дискретных устройств на переключательном уровне. Донецк, ГВУЗ «ДонНТУ», 2012. – 258 с.:
11. The Status of Asynchronous Design in Industry. www.scism.sbu.ac.uk/ccsv/ACiD-WG/AsyncIndustryStatus.pdf
12. I. E. Sutherland, "Micropipelines", Communications of the ACM, Vol. 32, no. 6, pp. 720-738, June 1989.
13. Дж. Николис : Динамика иерархических систем: Эволюционное представление. М.: Мир, 1989, 490 с.
10. S. Hauck, "Asynchronous design methodologies: An overview", Proc. IEEE, Vol. 83, No. 1, Jan. 1995, pp. 69-93.
14. J. A. Brzozowski and C.-J. Seger. Asynchronous Circuits. Springer-Verlag. 1995.
15. R. E. Miller, Switching Theory Volume II: Sequential Circuits and Machines. New York NY: John Wiley & Sons, 1965.
16. K. v. Berkel. Beware the isochronic fork. Integration, the VLSI journal, vol. 13, June 1992, pp. 103-128.
17. Поспелов Д. А. Вероятностные автоматы, М., «Энергия», 1970, 88 с.

Андриюхин А.И. Вероятностные автоматы и асинхронность. Целью исследования является применение моделей вероятностных автоматов для повышения точности описания асинхронных процессов. Оно основано на анализе неопределенности начального состояния и предположениях относительно длительности переходов в вероятностных автоматах. В работе была выполнена разработка алгоритма статистического моделирования для оценок характеристик асинхронных переходов в вероятностных автоматах. Приведены результаты компьютерных расчетов. В расчетах использовался пакет Mathematica.

Ключевые слова: вероятностные автоматы, асинхронность, компьютерная модель, функция распределения.

Andryukhin A.I. Probabilistic automata and asynchrony. The aim of the study is to apply models of probability automata to improve the accuracy of describing asynchronous processes. It is based on an analysis of the uncertainty of the initial state and assumptions about the duration of transitions in probabilistic automata. In this work, a statistical modeling algorithm was developed for estimating the characteristics of asynchronous transitions in probabilistic automata. The results of computer calculations are presented. The calculations used the Mathematica package.

Keywords: probabilistic automata, asynchrony, computer model, distribution function.

Статья поступила в редакцию 20.09.2016
Рекомендована к публикации д-ром физ.-мат. наук А.С. Миненко