

УДК 004.272.2: 517.542

Комплексные расширения и анализ свойств фрактальных отображений

Артеменко В.А., Андрюхин А.И.
Донецкий национальный технический университет
alexandruckin@ramber.ru

Артеменко В.А., Андрюхин А.И. Комплексные расширения и анализ свойств фрактальных отображений. Построены комплексные решения матричных уравнений. Показана связь современных фрактальных исследований и результатов Пуанкаре по качественному исследованию систем. Представлены визуализации комплексных решений базового уравнения колебательной динамики систем. Визуализации были получены с использованием современного пакета Вольфрам Математика 11.0 Изучены свойства отображения e^{iz} . Показано, что разность между реальными частями соседних решений уравнения $e^{iz}=z$ стремится к 2π при увеличении z . Также показано, что значение коэффициента при мнимой части меньше нуля, исключая z^0 . Построено трансцендентное уравнение, которое позволяет легко находить неподвижные точки этого отображения на компьютере. Показано, что отображение имеет одно устойчивое и бесконечное число неустойчивых положений равновесия, существует бесконечное число отталкивающих 2-периодических циклов. Построены примеры периодических циклов длиной 2,3,4,5. Визуализируются множества Жюлиа для различных гиперболических изображений. Последние являются асимптотическими разложениями e^{iz} .
Ключевые слова: комплексное число, предел, матрица, колебания, Пуанкаре, фрактал.

Введение

В настоящее время существует различные классификации расширения понятия числа. Всякая классификация условна, однако большинство специалистов считают, что можно говорить о следующих семи общепринятых уровнях обобщения чисел: натуральные, рациональные, действительные, комплексные, векторные, матричные и трансфинитные числа. Отдельными учеными предлагается считать функции функциональными числами и расширить степень обобщения чисел до двенадцати уровней. Можно ли считать гиперкомплексные или р-адические числа, пространственные матрицы и т.п. отдельными степенями этой классификации?

Этот вопрос и ему подобные очевидно будут решаться самим развитием математики и человеческого познания в целом.

В работе рассматриваются результаты попыток приложения комплексной единицы к известным соотношениям, которые получены с чисто вещественными числами

Комплексная единица i является идеальным элементом, как и бесконечно малая(большая) величина $x \rightarrow 0(+\infty)$. Последние согласно Н.Кузанскому, являются по определению эквивалентными.

В статье рассматриваются следующие вопросы:

А) Исследование поведения известных замечательных пределов и соотношений при замене $x \rightarrow 0(+\infty)$ на ix :

Б) Исследования изменения решений матричных уравнений при расширении вида решений мнимой частью;

В) Анализ свойств комплексного уравнения $e^{iz}=z$ и его фрактальных свойств.

Следствием известной формулы Эйлера является соотношение $e^{2\pi i}=1$. Логарифмируя обе стороны этого тождества, получаем бесконечное множество мнимых нулей и имеем значительное увеличение объектов, удовлетворяющих определенным условиям. Это замечание приложимо к результатам работы.

Комплексные расширения

На рисунках 1-6 представлены визуализации результатов при замене $x \rightarrow 0(+\infty)$ на ix для некоторых замечательных пределов и выражений.

Комплексное число i было получено при решении простого квадратного уравнения $x^2+1=0$. Расширением чисел являются матрицы и желательно получить и оценить свойства решений матричных уравнений вида $A^n+X=0$, где X есть единичная (Е), нулевая (0) матрицы и некоторые другие. Решения при $n=2$ (3) представлены на рис.8-17. В таб.1-3 представлены данные о числе решений

матричных уравнений при $n=2(3)$, в том числе и для матриц Паули.

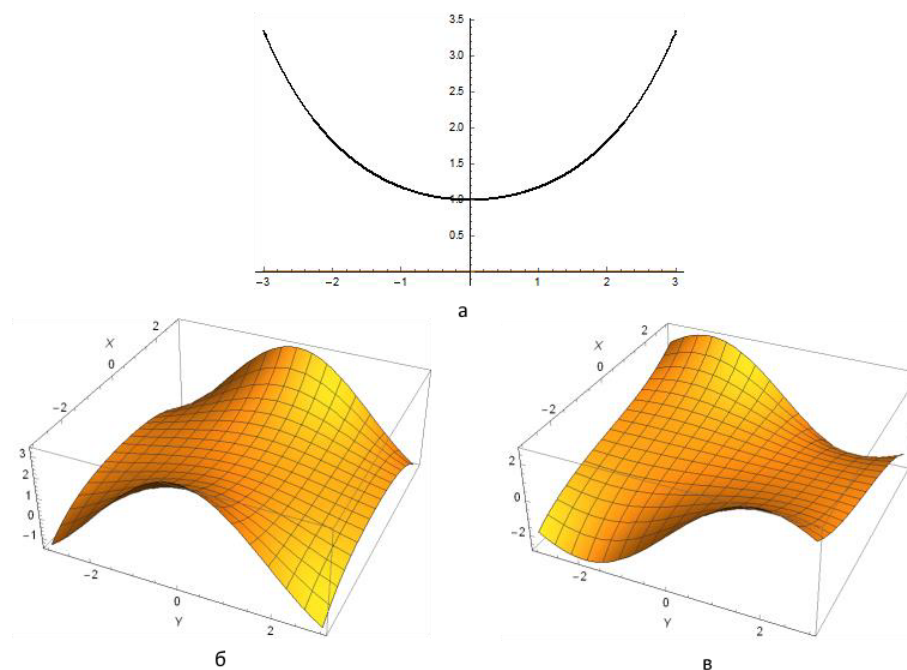


Рисунок 1. — Функция $F(Z)=\text{Sin}(Z)/Z$: а) графики реальной и мнимой части $F(iX)$; б) график $\text{Re}(F(Y+iX))$; б) график $\text{Im}(F(Y+iX))$;

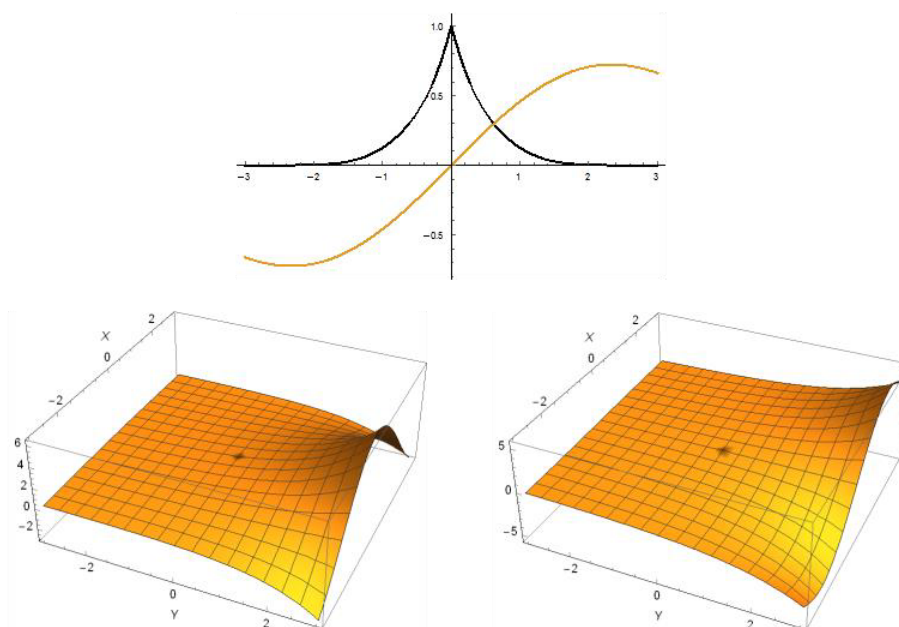


Рисунок 2. — Функция $F(Z)=(\text{Exp}(Z)-1)/Z$: а) графики реальной и мнимой части $F(iX)$; б) график $\text{Re}(F(Y+iX))$; б) график $\text{Im}(F(Y+iX))$.

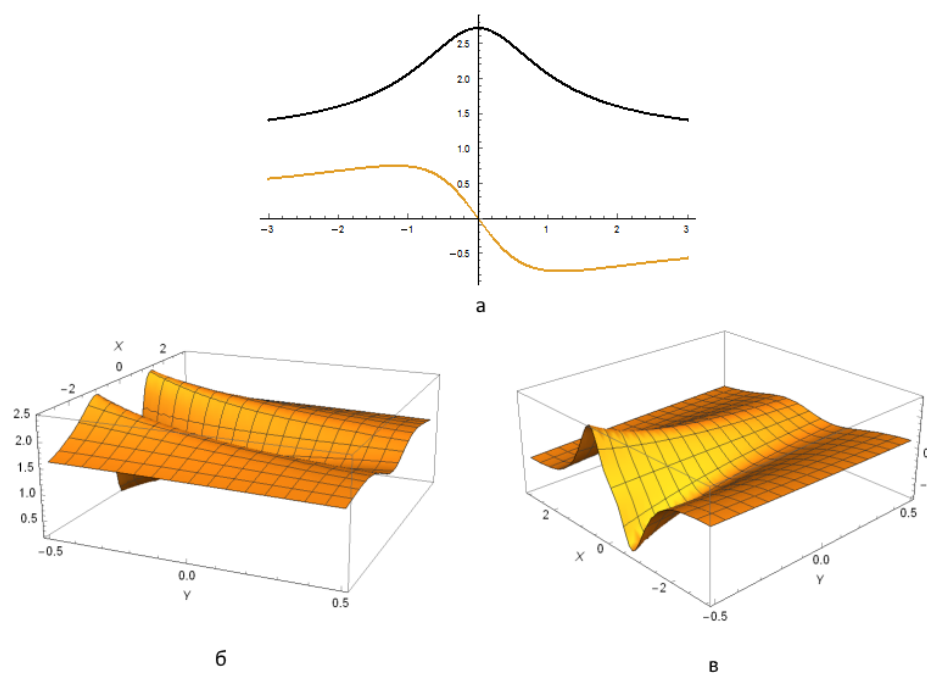


Рисунок 3. — Функция $F(Z)=(1+Z)^{1/Z}$: а) графики реальной и мнимой части $F(iX)$; б) график $\text{Re}(F(Y+iX))$; в) график $\text{Im}(F(Y+iX))$.

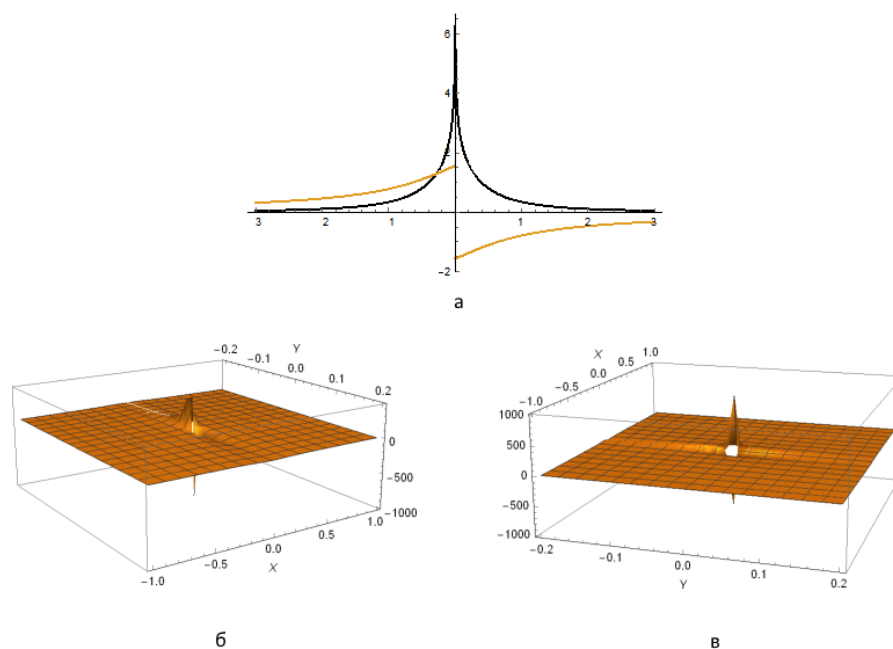


Рисунок 4. — Функция $F(Z)=\text{Ln}(1+Z)/Z$: а) графики реальной и мнимой части $F(iX)$; б) график $\text{Re}(F(Y+iX))$; в) график $\text{Im}(F(Y+iX))$.

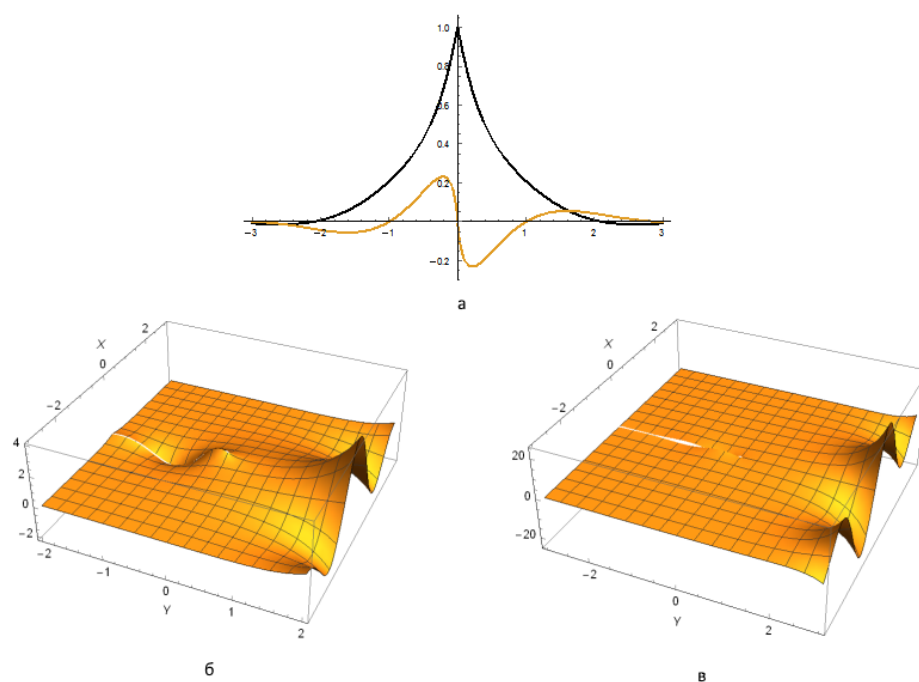


Рисунок 5. — Функция $F(Z)=Z^Z$: а) графики реальной и мнимой части $F(iX)$;
 б) график $\text{Re}(F(Y+iX))$; в) график $\text{Im}(F(Y+iX))$.

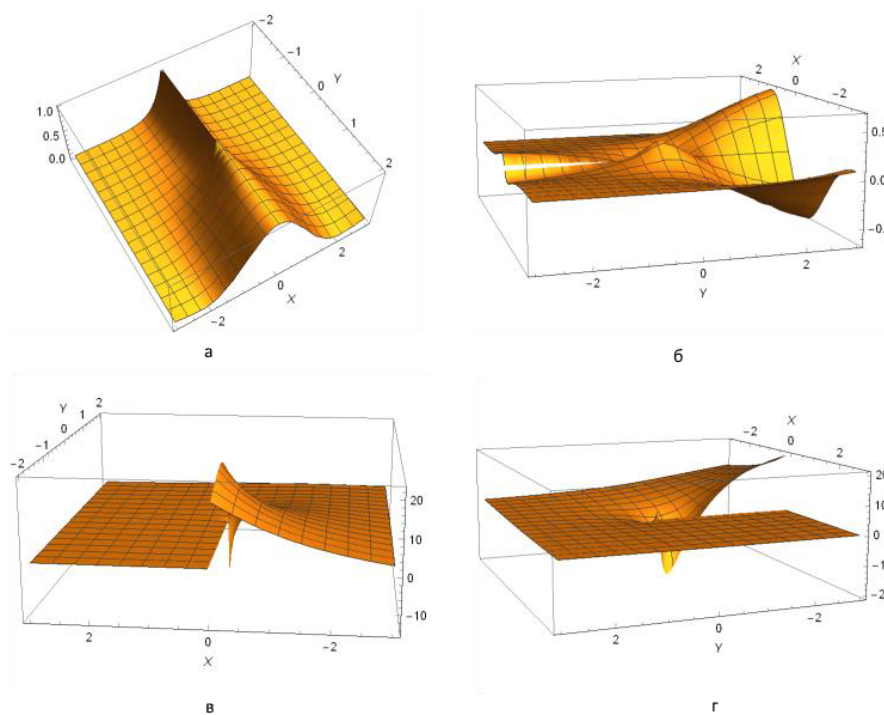


Рисунок 6. — Функция $F(Y,X)=(Y+iX)^X$: а) графики реальной и мнимой части $F(Y+iX, iX)$;
 б) график $\text{Re}(F(Y+iX, 1))$; в) график $\text{Im}(F(Y+iX, 1))$.

Последние применяются для определения спина электрона в квантовой механике, в которой любой измеряемой величине соответствует матрица и после измерения система описывается одним из собственных векторов матрицы измеряемой величины.

Уравнения с матрицами 2x2 и их решения

Введем обозначения согласно рис.7.

$$\begin{matrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{а} & \text{б} & \text{в} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \text{г} & \text{д} & \text{е} \end{matrix}$$

Рисунок 7. — Обозначения матриц: а) матрица А; б) нулевая 0; в) единичная Е; г) матрица Паули σ_1 ; д) матрица Паули σ_2 ; е) матрица Паули σ_3 .

В таблице 1 представлены расчеты числа решений матриц с помощью Mathematica 11.1.1.

Таблица 1. Число решений для уравнений с матрицами 2x2

Номер	Уравнение	Число решений
1	$A^2=0$	3
2	$A^2-E=0$	7
3	$A^2+E=0$	7
4	$A^2-iE=0$	7
5	$A^3=0$	3
6	$A^3-E=0$	18
7	$A^2+E=0$	18
8	$A^3-iE=0$	18
9	$A^4=0$	5
10	$A^4-E=0$	48
11	$A^4+E=0$	48
12	$A^4-iE=0$	48
13	$A^5=0$	3
14	$A^5-E=0$	55
15	$A^5+E=0$	55
16	$A^5-iE=0$	55
17	$A^2-\sigma_1=0$	4
18	$A^2-\sigma_2=0$	4
19	$A^2-\sigma_3=0$	4

На последующих рисунках представлены списки решения только некоторых уравнений, так как многие из них имеют значительный объем.

1. $a_{21} = -a_{11}^2/a_{12}, a_{22} = -a_{11}$
2. $a_{11} = 0, a_{12} = 0, a_{22} = 0$
3. $a_{11} = 0, a_{12} = 0, a_{21} = 0, a_{22} = 0$

Рисунок 8. — Решения уравнения $A^2=0$

1. $a_{11} = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3} - 2 a_{22})$,
 $a_{21} = \frac{1 + i\sqrt{3} + a_{22} - i\sqrt{3} a_{22} - 2a_{22}^2}{2 a_{12}}$
2. $a_{11} = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3} - 2 a_{22})$,
 $a_{21} = \frac{1 - i\sqrt{3} + a_{22} + i\sqrt{3} a_{22} - 2a_{22}^2}{2 a_{12}}$
3. $a_{11} = -1 - a_{22}$, $a_{21} = \frac{-1 - a_{22} - a_{22}^2}{a_{12}}$
4. $a_{11} = -(-1)^{1/3}$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 1$
5. $a_{11} = (-1)^{2/3}$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 1$
6. $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = -(-1)^{1/3}$
7. $a_{11} = -1 + (-1)^{1/3}$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = -(-1)^{1/3}$
8. $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = (-1)^{2/3}$
9. $a_{11} = -(-1)^{1/3}$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = (-1)^{2/3}$
10. $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = 1$
11. $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$
12. $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$
13. $a_{11} = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = 1$
14. $a_{11} = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 0$,
 $a_{22} = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$
15. $a_{11} = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 0$,
 $a_{22} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$
16. $a_{11} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = 1$
17. $a_{11} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 0$,
 $a_{22} = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$
18. $a_{11} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 0$,
 $a_{22} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$

Рисунок 9. — Решения уравнения $A^3-E=0$

1. $a_{21} = (1-a_{11}^2)/a_{12}, a_{22} = -a_{11}$
2. $a_{11} = -1, a_{12} = 0, a_{22} = 1$
3. $a_{11} = 1, a_{12} = 0, a_{22} = -1$
4. $a_{11} = -1, a_{12} = 0, a_{21} = 0, a_{22} = -1$
5. $a_{11} = -1, a_{12} = 0, a_{21} = 0, a_{22} = 1$
6. $a_{11} = 1, a_{12} = 0, a_{21} = 0, a_{22} = -1$
7. $a_{11} = -1, a_{12} = 0, a_{21} = 0, a_{22} = 1$

Рисунок 10. — Решения уравнения $A^2-E=0$

1. $a_{21} = (-1-a_{11}^2)/a_{12}, a_{22} = -a_{11}$
2. $a_{11} = -i, a_{12} = 0, a_{22} = i$
3. $a_{11} = i, a_{12} = 0, a_{22} = -i$
4. $a_{11} = -i, a_{12} = 0, a_{21} = 0, a_{22} = -i$
5. $a_{11} = -i, a_{12} = 0, a_{21} = 0, a_{22} = i$
6. $a_{11} = i, a_{12} = 0, a_{21} = 0, a_{22} = -i$
7. $a_{11} = i, a_{12} = 0, a_{21} = 0, a_{22} = i$

Рисунок 11. — Решения уравнения $A^2+E=0$

1. $a_{11} = -a_{22}, a_{21} = -a_{22}^2/a_{12}$
2. $a_{11} = 0, a_{12} = 0, a_{22} = 0$
3. $a_{11} = 0, a_{12} = 0, a_{21} = 0, a_{22} = 0$

Рисунок 12. — Решения уравнения $A^3=0$

Уравнения с комплексными матрицами 2×2 и их решения

Мы повторяем расчеты, предполагая, что матрица A является комплексной согласно рис.13

$$\begin{pmatrix} a_{11}+i \cdot b_{11} & a_{12}+i \cdot b_{12} \\ a_{21}+i \cdot b_{21} & a_{22}+i \cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

Рисунок 13. — Матрица A

Таблица 2. Число решений для уравнений с комплексными матрицами 2×2

Номер	Уравнение	Число решений
1	$A^2=0$	3
2	$A^2-E=0$	6
3	$A^2+E=0$	6
4	$A^2 \cdot iE=0$	6
5	$A^3=0$	5
6	$A^3 \cdot E=0$	27
7	$A^2+E=0$	27
8	$A^3 \cdot iE=0$	27
9	$A^4=0$	7
10	$A^4 \cdot E=0$	48
11	$A^4+E=0$	48
12	$A^4 \cdot iE=0$	48
13	$A^5=0$	3
14	$A^5 \cdot E=0$	55
15	$A^5+E=0$	55
16	$A^5 \cdot iE=0$	55
17	$A^2-\sigma_1=0$	4
18	$A^2-\sigma_2=0$	4
19	$A^2-\sigma_3=0$	4

Решения на рис.14 (при использовании явной комплексной матрицы A на рис.13) существенно отличаются от решений на рис.15 (при использовании A согласно рис.7а.).

$$\begin{aligned} 1. b_{11} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)(-i + (1+i)a_{11}), & b_{12} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)(-1 + (1+i)a_{12}), \\ b_{21} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)(-1 + (1+i)a_{21}), & b_{22} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)(-i + (1+i)a_{22}) \\ 2. b_{11} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)(-1 + (1+i)a_{11}), & b_{12} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)(-i + (1+i)a_{12}), \\ b_{21} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)(-i + (1+i)a_{21}), & b_{22} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)(-1 + (1+i)a_{22}) \\ 3. b_{11} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)(1 + (1+i)a_{11}), & b_{12} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)(i + (1+i)a_{12}), \\ b_{21} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)(i + (1+i)a_{21}), & b_{22} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)(1 + (1+i)a_{22}) \\ 4. b_{11} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)(i + (1+i)a_{11}), & b_{12} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)(1 + (1+i)a_{12}), \\ b_{21} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)(1 + (1+i)a_{21}), & b_{22} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)(i + (1+i)a_{22}) \end{aligned}$$

Рисунок 14. — 1 решения уравнения $A^2-\sigma_1=0$

$$\begin{aligned} 1. a_{11} &= \frac{(-1)^{3/4}}{\sqrt{2}}, a_{12} = -\frac{(-1)^{1/4}}{\sqrt{2}}, a_{21} = -\frac{(-1)^{1/4}}{\sqrt{2}}, a_{22} = \frac{(-1)^{3/4}}{\sqrt{2}} \\ 2. a_{11} &= -\frac{\sqrt{2}}{(-1)^{3/4}}, a_{12} = \frac{\sqrt{2}}{(-1)^{1/4}}, a_{21} = \frac{\sqrt{2}}{(-1)^{1/4}}, a_{22} = -\frac{\sqrt{2}}{(-1)^{3/4}} \\ 3. a_{11} &= \frac{\sqrt{2}}{(-1)^{1/4}}, a_{12} = -\frac{(-1)^{3/4}}{\sqrt{2}}, a_{21} = -\frac{(-1)^{3/4}}{\sqrt{2}}, a_{22} = \frac{(-1)^{1/4}}{\sqrt{2}} \\ 4. a_{11} &= -\frac{(-1)^{1/4}}{\sqrt{2}}, a_{12} = \frac{(-1)^{3/4}}{\sqrt{2}}, a_{21} = \frac{(-1)^{3/4}}{\sqrt{2}}, a_{22} = -\frac{(-1)^{1/4}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Рисунок 15. — 1 решения уравнения $A^2-\sigma_1=0$

Аналогичный пример : структура 1 решения для уравнения $A^2=0$ на рис.15 и 8.

$$\begin{aligned} 1. b_{11} &= i a_{11} - \sqrt{a_{12} a_{21} + i a_{21} b_{12} + i a_{12} b_{21} - b_{12} b_{21}}, \\ & b_{22} = i a_{22} + \sqrt{-i a_{12} + b_{12}}(-i a_{21} + b_{21}) \\ 2. b_{11} &= i a_{11} + \sqrt{a_{12} a_{21} + i a_{21} b_{12} + i a_{12} b_{21} - b_{12} b_{21}}, \\ & b_{22} = i a_{22} - \sqrt{-i a_{12} + b_{12}}(-i a_{21} + b_{21}) \\ 3. b_{11} &= i a_{11}, b_{12} = i a_{12}, b_{21} = i a_{21}, b_{22} = i a_{22} \end{aligned}$$

Рисунок 16. — Решения уравнения $A^2=0$

Уравнения с матрицами 3×3 и их решения

Количество решений уравнений с матрицами 3×3 явно больше и так как многие из них имеют значительный объем, приведем только первое решение для уравнения $A^2=0$ на рис.17.

Таблица 3. Число решений для уравнений с матрицами 3×3

Номер	Уравнение	Число решений
1	$A^2=0$	30
2	$A^2-E=0$	90
3	$A^2+E=0$	90
4	$A^2 \cdot iE=0$	90

$$\begin{aligned}
 1. a_{11} &= \frac{1}{2} \left(\frac{-\frac{a_{13}^2 a_{31}^2}{(-a_{13} a_{31} - a_{23} a_{32})^{3/2}} - \frac{2 a_{13} a_{23} a_{31} a_{32}}{3 a_{13} a_{31}}}{\frac{a_{23}^2 a_{32}^2}{(-a_{13} a_{31} - a_{23} a_{32})^{3/2}} - \frac{a_{13} a_{31}}{3 a_{23} a_{32}}} - \frac{a_{13} a_{32}}{\sqrt{-a_{13} a_{31} - a_{23} a_{32}}} \right) \\
 a_{12} &= -\frac{a_{13} a_{32}}{\sqrt{-a_{13} a_{31} - a_{23} a_{32}}} \\
 a_{21} &= -\frac{a_{23} a_{31}}{\sqrt{-a_{13} a_{31} - a_{23} a_{32}}} \\
 a_{22} &= \frac{1}{2} \left(\frac{-\frac{a_{13}^2 a_{31}^2}{(-a_{13} a_{31} - a_{23} a_{32})^{3/2}} - \frac{2 a_{13} a_{23} a_{31} a_{32}}{3 a_{13} a_{31}}}{\frac{a_{23}^2 a_{32}^2}{(-a_{13} a_{31} - a_{23} a_{32})^{3/2}} - \frac{a_{13} a_{31}}{3 a_{23} a_{32}}} + \frac{a_{13} a_{32}}{\sqrt{-a_{13} a_{31} - a_{23} a_{32}}} \right) \\
 a_{33} &= \frac{1}{2} \left(\frac{a_{13}^2 a_{31}^2}{(-a_{13} a_{31} - a_{23} a_{32})^{3/2}} + \frac{2 a_{13} a_{23} a_{31} a_{32}}{3 a_{13} a_{31}} \right) \\
 &+ \frac{(-a_{13} a_{31} - a_{23} a_{32})^{3/2}}{3 a_{23} a_{32}} + \frac{2 a_{13} a_{23} a_{31} a_{32}}{\sqrt{-a_{13} a_{31} - a_{23} a_{32}}} \\
 &+ \frac{a_{13} a_{32}}{\sqrt{-a_{13} a_{31} - a_{23} a_{32}}}
 \end{aligned}$$

Рисунок 17. — 1 решения уравнения $A^2=0$

Комплексное уравнения $e^{iz}=z$

Общеизвестно влияние результатов А. Пуанкаре по качественному исследованию систем. В частности они послужили толчком для работ Ляпунова по устойчивости систем и следовательно на развитие общей теории управления, теории автоматического управления, теории систем и т.д.

С 1880 г. начался цикл работ А. Пуанкаре «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями»[1-2].

Сложность исследования свойств решения систем, поведение которых определяется достаточно простыми уравнениями

$$\begin{aligned}
 \dot{z} &= i\omega z + [f(\operatorname{Re} z, -\omega \operatorname{Im} z) - \\
 &\omega^2 \operatorname{Re} z - E \sin pt] / \omega. \quad (1)
 \end{aligned}$$

можно оценить, рассматривая различные варианты решения уравнения (1) представленные на рис.18-21, которые были получены с использованием современного пакета Вольфрам Математика[3].

Существует множество направлений развития идей Пуанкаре. Одним из них является изучение фрактальных свойств эволюции реальных систем и их математических моделей, например, изучение фрактальных свойств времен возвращения Пуанкаре, т. е. моментов времени, когда система почти повторяет свое первоначальное состояние[4].

В работах Фату и Жюлиа была установлена связь голоморфных функций на комплексной плоскости с фрактальными множествами[5]. Использование компьютера позволило Мандельброту построить известное множество (названное в его честь) [6]. Это

множество точек $\lambda \in \mathbb{C}$, является ограниченным при стартовой точке $z = 0$ для итерационного отображения $F(z) = z^2 + \lambda$.

Оно явилось образцом для исследования многих других функций, среди которых выделим гиперболические вида λe^z , $\lambda(e^z - 1)/z$, $\lambda \operatorname{sh}z/z$, $\lambda \sin(z)$, $\lambda \cos(z)$, $z[7-12]$.

К этому классу принадлежит и отображение e^{iz} , свойствами которого мы занимаемся.

Наше отображение является частным случаем $z_{n+1} = f_\lambda(z_n) = \lambda e^z$ при $\lambda = i$ и замене $z \leftrightarrow iz$. При изучении свойств этого отображения использовался пакет Wolfram Математика. Ранее результаты по λe^z обычно получались для $\lambda \in \mathbb{R}$, вследствие чего рассматривались множества Жюлиа. а не множество Мандельброта. При $\lambda \in \mathbb{C}$ результаты носят общий характер[13]. В работе также рассматривается множество Мандельброта для семейства отображений $z_{n+1} = f_\lambda(z_n) = \lambda e^z$ при $\lambda \in \mathbb{C}$, т.е. одно и то же отображение описывают множества Жюлиа и Мандельброта с различных точек зрения.

Множества Жюлиа для рациональных целых и трансцендентных целых функций обладают различными характеристиками[14].

В частности для гиперболических функций и рассматриваемого отображения множество Жюлиа совпадает с границей точек ухода и имеет структуру букетов Кантора. Это следует из того, что отображение для гиперболических функций не является сжимающим [15].

Напомним, что “точка принадлежит множеству Жюлиа тогда и только тогда, когда динамика в окрестности этой точки демонстрирует чувствительную зависимость от изменений начальных данных, то есть близкие начальные данные порождают совсем другой характер поведения траектории после большого (а иногда и не очень большого) числа итераций” [5].

Свойства отображения $F(z) = e^z$

Свойство 1. Отображение $F(z) = \exp(iz)$ имеет по крайней мере одну устойчивую неподвижную точку $z^0 = 0.5764 + 0.3746i$.

Свойство 2. Отображение $F(z) = \exp(iz)$ имеет бесконечно много неподвижных неустойчивых точек.

Справедливость этих свойств, полагая $z = a + bi$, следует из следующих положений.

Из $e^{iz} = z$ можем получить систему трансцендентных уравнений $b = \operatorname{Ln}(\cos(a)/a)$ и $b = a \operatorname{Tg}(a)$.

На рис.22 представлены графики этих

периодических функций и можно непосредственно сразу утверждать:

- а) решений бесконечно много;
- б) разность между реальными частями решений уравнения $e^{iz}=z$ стремится к 2π при увеличении a ;
- в) значение коэффициента при мнимой части b меньше нуля, исключая z^0 .

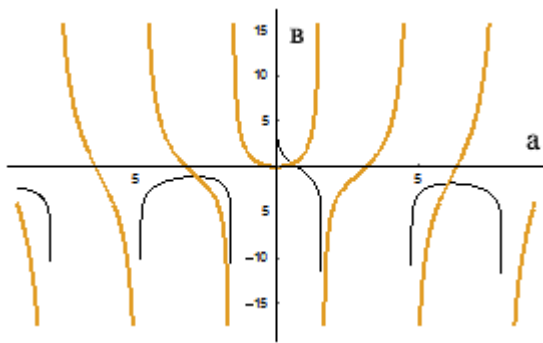


Рисунок 22. — Графики функций $b = \text{Ln}(\cos(a)/a)$ и $b = a \text{Tg}(a)$.

Конкретные значения решений уравнения $e^{iz}=z$ с учетом $e^{2\pi i}=1$ можем определять при $K = \dots -1, 0, +1, \dots$ из трансцендентного уравнения

$$\text{Ln}(\cos(a)/(a-2\pi K)) - (a-2\pi K) \text{Tg}(a) = 0.$$

На рис.23 представлены эти первые решения на комплексной плоскости.

На рис.24 представлены значения первых решений этого уравнения.

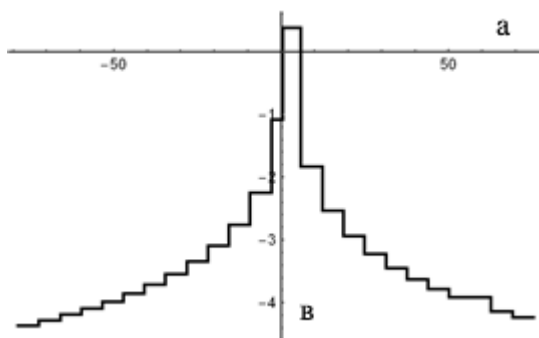


Рисунок 23. — Первые решения уравнения $e^{iz}=z$.

Голоморфная функция является целой функцией, если она определена на всей комплексной плоскости. Известно, что любая целая функция, не равная константе, принимает все значения, кроме может быть одного. Поэтому отображение e^{iz} обладает этим свойством.

Легко показать, что на бесконечности функция e^{iz} имеет порядок 1.

Отображение e^{iz} принадлежит классу Шпайзера, как функция, которая не имеет критических точек (сингулярностей).

Доказана теорема что рациональные отображения не могут иметь блуждающего домена, но для трансцендентных отображений известны контрпримеры (под блуждающими точками понимаются точки, в которые траектория не возвращается).

Свойство 3. Отображение $F(z) = \exp(iz)$ имеет бесконечное число периодических циклов длиной $n=2$. Эти циклы являются отталкивающими [16].

Для $n>2$ известна теорема для целых функций, гарантирующая существование циклов и их отталкивающий характер

Теорема 1.21 (Периодические точки почти всех периодов). Каждая целая функция имеет отталкивающие периодические точки всех периодов, кроме, возможно, период $n=1$ [15]

Примером целой функции без периодических точек периода 1 является $e^z + z$.

Более полное изложение и история теоремы 1.21 представлено в [15].

Определим функции

$$\begin{aligned} \mathbf{fa}(a,b) &= e^{-b} \cos(a), \\ \mathbf{fb}(a,b) &= e^{-b} \sin(a). \end{aligned}$$

Тогда задача определения периодических циклов длины n для отображения e^z сводится к решению системы трансцендентных уравнений ($a_0 = a_n, b_0 = b_n$).

$$\mathbf{a}_{i+1} = \mathbf{fa}(a_i, b_i), \mathbf{b}_{i+1} = \mathbf{fb}(a_i, b_i) \text{ при } i=0, n-1$$

В таблице 4 представлены найденные периодические циклы для начальных точек $z = A + Bi$ для периодов длины $n=2, 3, 4, 5$.

Таблица 4. Периодические циклы

n	A	B
2	-0.048833	-3.16017
3	-0.165067	-1.19233
4	-0.09315	-1.5417
	-0.04168	-2.3877
5	-0.04739	-1.5258

На рис 25. представлены множества Жюлиа при приближении функции e^{iz} полиномами степени n .

Выводы

Необходимо отметить, что основная часть изложенных результатов получена на компьютере и относится, по образному

выражению С.Вольфрама, к «экспериментальной математике». Если основной работой математика или сущностью математики считать формулировку и доказательство теорем, то в отличие от этой деятельности выражение «экспериментальная математика» выглядит по крайней мере странным.

Но аргументы Херша о гуманистической философии математики становятся еще более убедительными в современном окружении [17].

1. Математика - это человек. Она является частью культуры человечества. Это не соответствует концепции Фреге абстрактной, вневременной(или безвременной), объективной реальности.

2. Математическое знание ошибочно. Как в науке, математика может продвигаться, делая ошибки, а затем исправляя или даже корректируя их. Эти свойства математики блестяще доказываются в «Доказательствах и опровержениях» Лакатоса.

3. Существуют разные нормы строгости доказательств. Нормы строгости могут варьироваться в зависимости от времени, места и других факторов. Использование компьютерных доказательств, примером которых служит компьютерное доказательство четырехцветной теоремы о 4 красках, является лишь одним из примеров появления нетрадиционного стандарта строгости.

4. Эмпирические данные, численные эксперименты и вероятностные доказательства могут помочь нам решить, чему верить в математике. Аристотелевская логика не обязательно всегда является лучшим способом решения.

5. Математические объекты являются особым разнообразием социально-культурно-исторического объекта. Вопреки утверждениям некоторых постмодернистских хулителей математика не может быть отброшена как просто новая форма литературы или религии. Многие математические объекты можно рассматривать как общие идеи, такие как «Моби Дик» в литературе или «Непорочное зачатие в религии».

В любом случае математика является и останется уникальным человеческим начинанием.

Социальный конструктивистский тезис состоит в том, что математика - это социальное строительство, культурный продукт, ошибочный, как любая другая отрасль знаний. В данной работе, в которой выполнена попытка сравнения результатов решений с неявным и явным использованием комплексных

расширений в различных направлениях, в частности в области нелинейной динамики и фракталов, компьютер играл центральную роль, помог определить некоторые объекты и более ясно и конкретно задать относящиеся к ним вопросы.

Список литературы

1. Пуанкаре А. Избранные труды в 3 томах. Том III. Математика. Теоретическая физика. Анализ математических и естественно - научных работ Анри Пуанкаре. М.: Наука, 1974. – 772 с.
2. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М.-Л.: ГИТ-ТЛ, 1947. – 392 с.
3. Филер С.Е., Андриюхин А.И. Компьютерное исследование и визуализация колебательной динамики систем в комплексной форме. http://www.infcyb.donntu.org/A_6_11.pdf
4. Афраймович В., Угальде Э., Уриас Х. Фрактальные размерности для времен возвращения Пуанкаре. РХД, 2011, 296 с.
5. Милнор Дж. Голоморфная динамика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 320с.
6. Mandelbrot B.B. Fractals: Form, chance, and dimension. San Francisco, Calif.: Freeman, 1977. 365pp.
7. Alexander D., Devaney R.L. A century of complex dynamics // A century of advancing mathematics / S.F.Kennedy, D.J.Albers, G.L.Alexanderson, D.Dumbaugh, F.A.Farris, D.B.Haunsperger, and P.Zorn (eds.). Washington, D.C.: Math. Assoc. America, 2015. P.15–34.
8. Devaney R.L. e^z : Dynamics and bifurcation // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 1991, vol.1, no.2, pp.287–308.
9. Devaney R.L. Cantor bouquets, explosions, and Knaster continua: Dynamics of complex exponentials // Publ. Mat., 1999, vol.43, no.1, pp.27–54.
10. Kapoor G.P., Guru Prem Prasad M. Chaotic burst in the dynamics of a class of noncritically finite entire functions // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 1999, vol.9, no.6, pp.1137–1151.
11. Kapoor G.P., Guru Prem Prasad M. Dynamics of $(e^z - 1)/z$: The Julia set and bifurcation // Ergodic Theory Dynam. Systems, 1998, vol.18, no.6, pp.1363–1383.
12. Guru Prem Prasad M. Chaotic burst in the dynamics of $f_\lambda(z) = \lambda \sinh(z)/z$ // Regul. Chaotic Dyn., 2005, vol.10, no.1, pp.71–80.
13. Urbanski M., Zdunik A. Real analyticity of Hausdorff dimension of finer Julia sets of exponential family // Ergodic Theory Dynam. Systems, 2004, vol.24, no.1, pp.279–315.

14. Moreno Rocha M. On indecomposable subsets of the Julia set for unstable exponentials: PhD dissertation. Boston: Boston Univ., 2002. 79pp.

15. Schleicher D. Dynamics of entire functions // Holomorphic dynamical systems: Lectures given at the C.I.M.E. Summer School (Cetraro, Italy, July

7–12, 2008) / G.Gentili, J.Guenot, and G.Patrizio (eds). (Lecture Notes in Math., vol.1998.) Berlin: Springer, 2010. P.295–339.

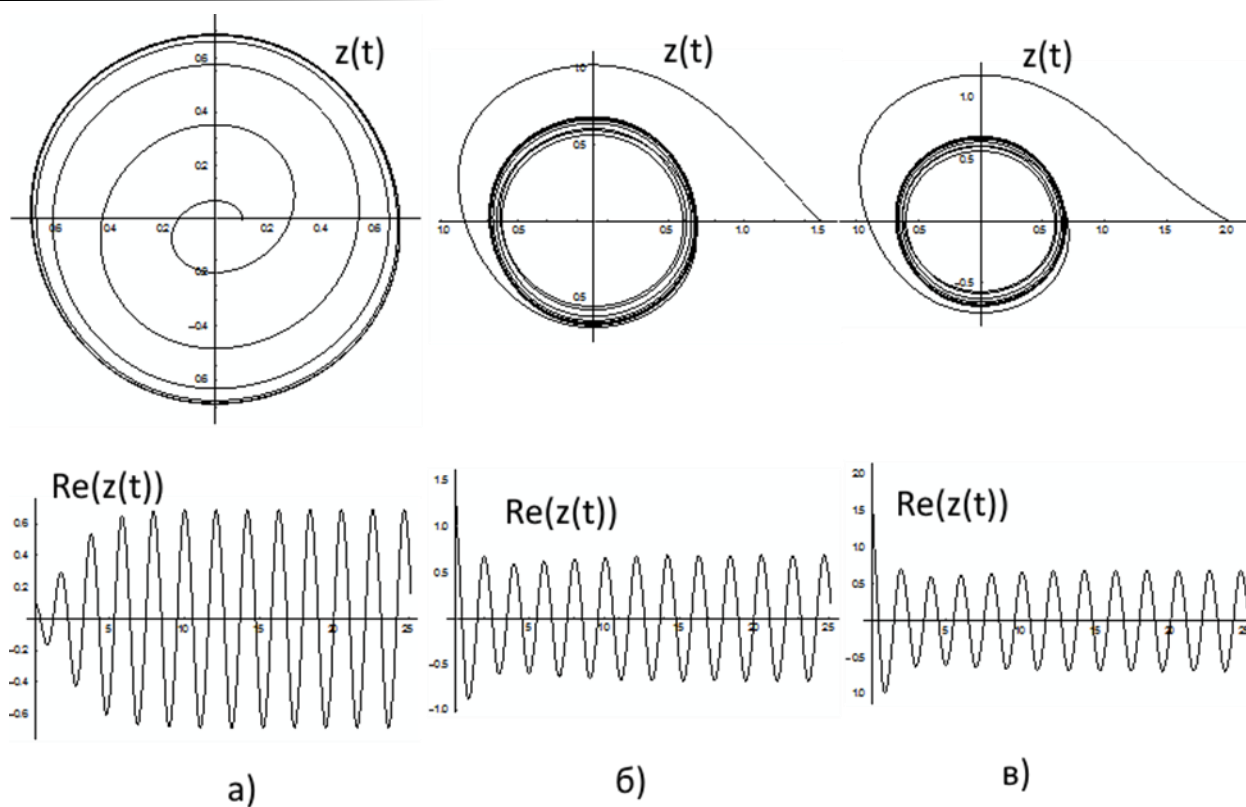


Рисунок 18. — Графики решения уравнения (1), $p=3$, а) $z(0)=0.1$; б) $z(0)=1.5$; в) $z(0)=2.0$.

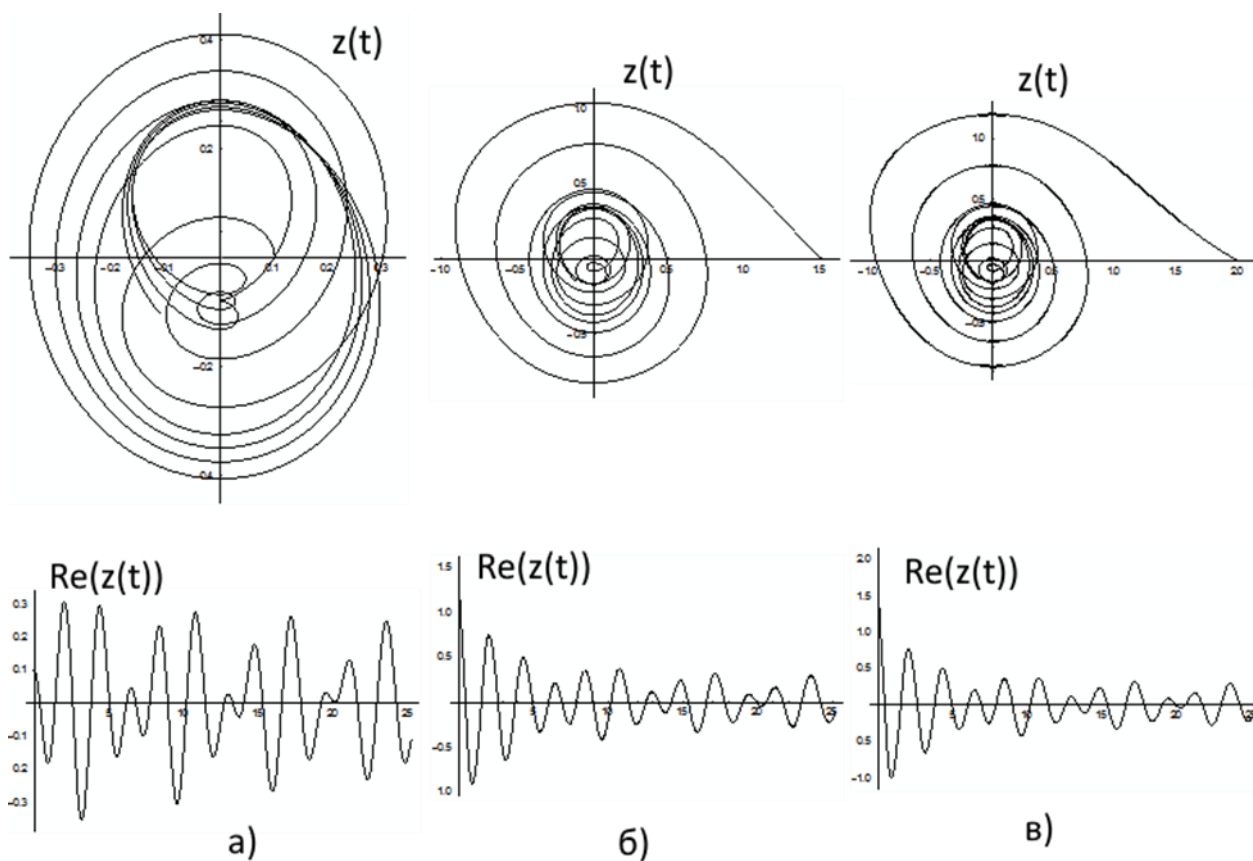


Рисунок 19. — Графики решения уравнения (1), $p=2$, а) $z(0)=0.1$; б) $z(0)=1.5$; в) $z(0)=2$.

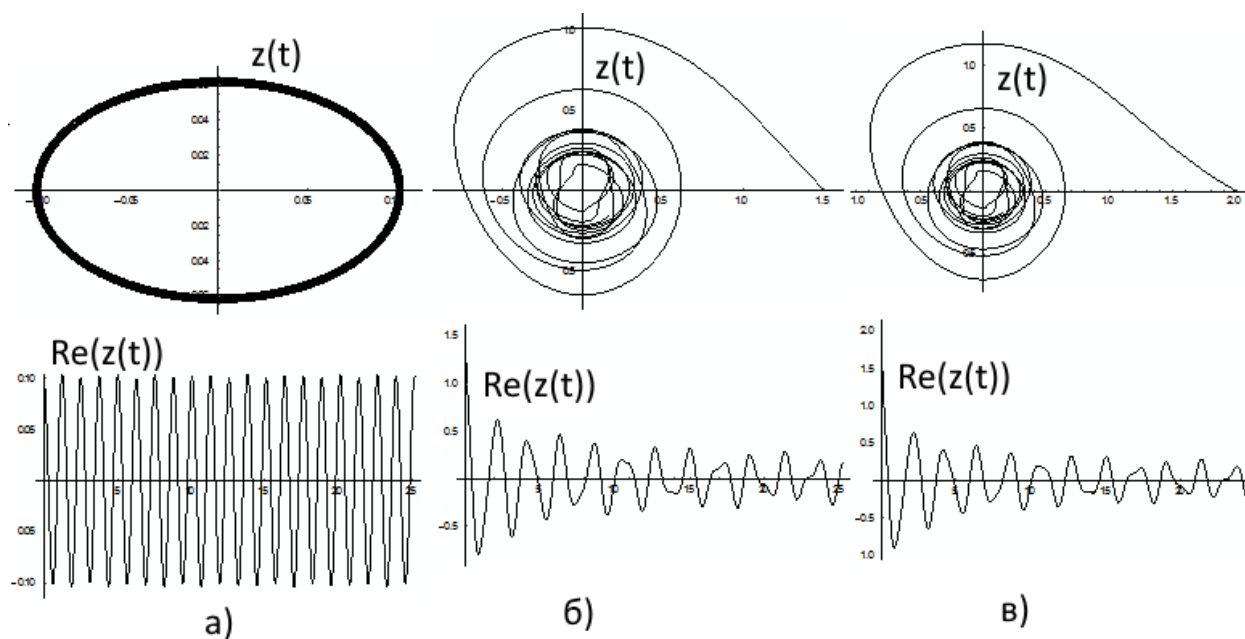


Рисунок 20. — Графики решения уравнения (1), $p=5$, а) $z(0)=0.1$; б) $z(0)=1.5$; в) $z(0)=2$.

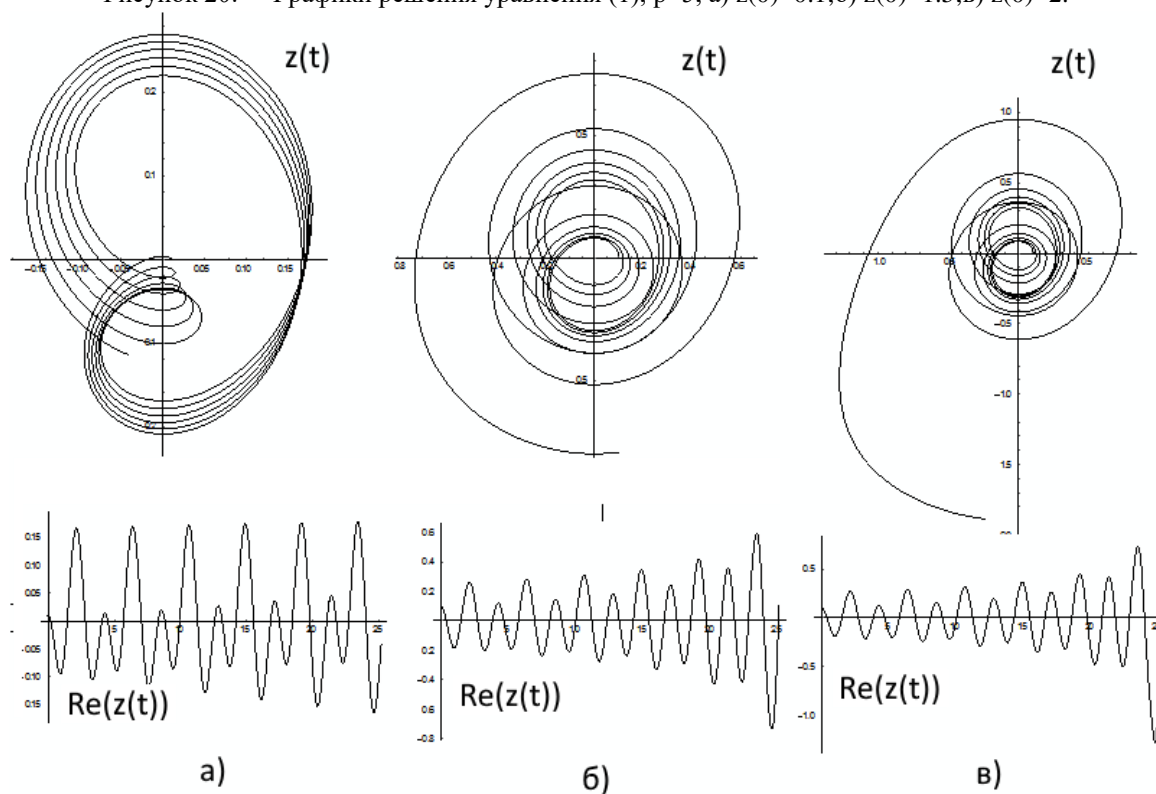


Рисунок 21. — Графики решения уравнения (1), $p=1.5$, а) $z(0)=0.01$; б) $z(0)=0.1$; в) $z(0)=0.105$.

N	A	B	Exp(I(A+BI))
1	-78.4843	-4.36444	-78.4843 - 4.36444 i
2	-72.1974	-4.28116	-72.1974 - 4.28116 i
3	-65.91	-4.19031	-65.91 - 4.19031 i
4	-59.6218	-4.09037	-59.6218 - 4.09037 i
5	-53.3326	-3.97932	-53.3326 - 3.97932 i
6	-47.0421	-3.85439	-47.0421 - 3.85439 i
7	-40.7499	-3.71158	-40.7499 - 3.71158 i
8	-34.455	-3.54492	-34.455 - 3.54492 i
9	-28.1561	-3.34477	-28.1561 - 3.34477 i
10	-21.8505	-3.09415	-21.8505 - 3.09415 i
11	-15.5322	-2.75844	-15.5322 - 2.75844 i
12	-9.18489	-2.24661	-9.18489 - 2.24661 i
13	-2.76636	-1.08965	-2.76636 - 1.08965 i
14	0.576413	0.374699	0.576413 + 0.374699 i
15	5.98583	-1.83427	5.98583 - 1.83427 i
16	12.3641	-2.53539	12.3641 - 2.53539 i
17	18.6935	-2.9404	18.6935 - 2.9404 i
18	25.0044	-3.22731	25.0044 - 3.22731 i
19	31.3062	-3.44985	31.3062 - 3.44985 i
20	37.6028	-3.63172	37.6028 - 3.63172 i
21	43.8963	-3.78553	43.8963 - 3.78553 i
22	50.1876	-3.91881	50.1876 - 3.91881 i
23	62.766	-4.14159	62.766 - 4.14159 i
24	69.0538	-4.23676	69.0538 - 4.23676 i

Рисунок 23. — Первые 24 Решения уравнения $\exp(\mathbf{I}\cdot\mathbf{Z})=\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}=\mathbf{A}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{I}$.

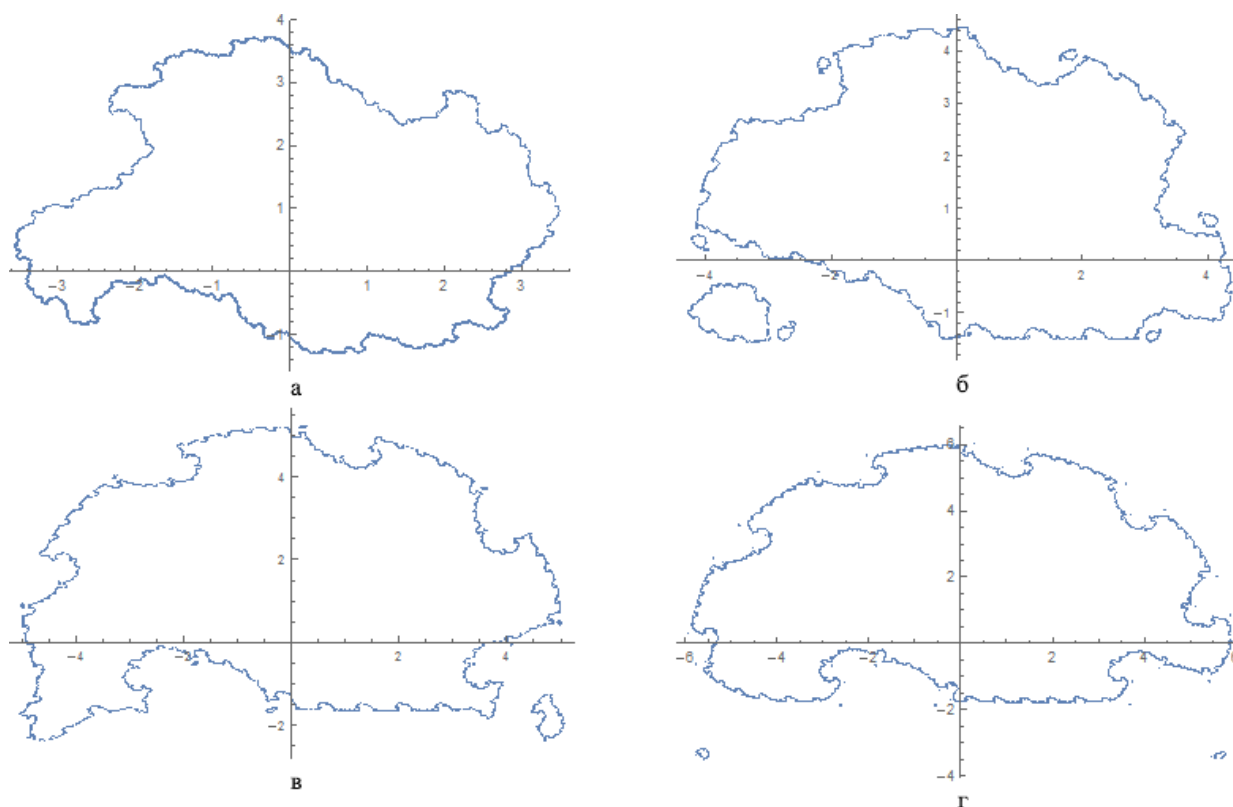


Рисунок 24. —Множества Жулиа при приближении e^{iz} полиномами степени n: а) n=4; а) n=6 а) n=8 а) n=10.

16. Матюшкин И.В. О некоторых свойствах отображения $\exp(iz)$ //Нелинейная динамика. 2016. Т. 12. №1. С. 3–15

17. David H. Bailey, Jonathan M. Borwein, Neil J. Calkin, Roland Girgensohn, D. Russell Luke,

Victor H. Moll. Experimental Mathematics in Action. A K Peters, Ltd. Wellesley, Massachusetts, 2007,

Артеменко В.А., Андрюхин А.І. Комплексні розширення і аналіз властивостей фрактальних відображень. Побудовано комплексні рішення матричних рівнянь. Показано зв'язок сучасних фрактальних досліджень і результатів Пуанкаре за якісним дослідженням систем. Представлені візуалізації комплексних рішень базового рівняння коливальної динаміки систем. Візуалізації були отримані з використанням сучасного пакету Вольфрам Математика 11.0 Вивчено властивості відображення e^{iz} . Показано, що різниця між реальними частинами сусідніх рішень рівняння $e^{iz} = z$ прагне до 2π при збільшенні z . Також показано, що значення коефіцієнта при уявній частині менше нуля, виключаючи $z=0$. Побудовано трансцендентне рівняння, яке дозволяє легко знаходити нерухомі точки цього відображення на комп'ютері. Показано, що відображення має один стійкий і нескінченне число нестійких положень рівноваги, існує нескінченне число відразливих 2-періодичних циклів. Побудовано приклади періодичних циклів довжиною 2,3,4,5. Візуалізуються множин Жуліа для різних гіперболічних зображень. Останні є асимптотическими розкладами e^{iz} .

Ключові слова: комплексне число, межа, матриця, коливання, Пуанкаре, фрактал.

Artemenko V.A., Andryukhin A.I. Complex extensions and analysis of the properties of fractal mappings. Complex solutions of matrix equations are constructed. The connection of modern fractal studies and the results of Poincaré on qualitative research of systems is shown. The visualizations of complex solutions of the basic equation of oscillatory dynamics of systems are presented. Visualizations were obtained using the modern package Wolfram Mathematics 11.0. The properties of the mapping e^{iz} are studied. The results obtained in the work are of a constructive nature. Basically they are the fruits of computer experiments. It is shown that the difference between the real parts of the neighboring solutions of the equation $e^{iz} = z$ tends to 2π as z increases. It is also shown that the coefficient value for the imaginary part is less than zero, excluding $z=0$. A transcendental equation is constructed which makes it easy to find fixed points of this map on a computer. Specific values of the solutions of the equation $e^{iz} = z$ with allowance for $e^{2\pi i} = 1$ can be determined from $K = \dots$ $1, 0, +1, \dots$ from the transcendental equation $\text{Ln}(\cos(a) / (a - 2\pi K)) - (a - 2\pi K) \text{tg}(a) = 0$. The values of the first solutions of this equation are presented. Also these first solutions are presented in the complex area. It is shown that the map has one stable and infinite number of unstable equilibrium positions, there are an infinite number of repelling 2-periodic cycles. The problem of determining periodic cycles of length n for the map e^{iz} reduces to solving a system of transcendental equations ($a_0 = a_n, b_0 = b_n$), $a_{i+1} = fa(a_i, b_i), b_{i+1} = fb(a_i, b_i)$ for $i = 0, n-1$. Examples of periodic cycles of length 2, 3, 4, 5 are constructed. The Julia sets for various hyperbolic images are visualized. The latter are asymptotic expansions of e^{iz} .

Keywords: complex number, limit, matrix, oscillations, Poincaré, fractal.

Статья поступила в редакцию 14.2.2017
Рекомендована к публикации д-ром физ.-мат. наук А.С. Миненко