УДК 519.21

Взаимосвязь симметрии стохастического дифференциального уравнения Ито и соответствующего ему уравнения Фоккера - Планка.

О.В. Александрова
ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры»
alexand_olga_la@mail.ru

Александрова О.В. Взаимосвязь симметрии стохастического дифференциального уравнения Ито и соответствующего ему уравнения Фоккера – Планка. *В статье рассматривается уравнение в частных производных, тесно связанное со стохастическим дифференциальным уравнением Ито – прямое уравнение Колмогорова или уравнение Фоккера-Планка. Исследуется взаимосвязь симметрий, которые допускает уравнение Ито и соответствующее ему уравнение Фоккера - Планка. Доказана теорема, при выполнении условий которой симметрия уравнения Ито является проекцией симметрии соответствующего ему расширенного уравнения Фоккера – Планка. Вычисления были сделаны при помощи специальных функций Maple.*

Ключевые слова: *стохастическое дифференциальное уравнение, симметрия, уравнение Фоккера – Планка.*

Введение.

Уравнением Фоккера - Планка описывается стохастический эволюционный процесс, непрерывно зависящий от времени [1-2]:

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t,x) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[A_i(t,x)p(t,x)\right] + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial_{ij}^2}{\partial x_i \partial x_j}\left[B_{ij}(t,x)p(t,x)\right], \qquad (1)$$

где $p(t,x)$ переходная плотность вероятности, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, вектор A = (A_1, A_2, … A_n) и симметричная матрица $B=\left\|B_{ij}\right\|_{i,j=1}^{n}$ известны как вектор дрейфа и матрица диффузии соответственно. Уравнение (1) применяется для описания различных явлений физики, химии, биологии. В связи с этим на протяжении многих лет наблюдается высокая заинтересованность по поводу исследования уравнений типа (1) и построения их точных решений [3,4-9].

С точки зрения теоретико-групповых методов исследования [10], одномерное уравнение вида (1), является хорошо изученным. Существенным результатом групповой классификации является установленный факт [11], что каждое одномерное уравнение Фоккера - Планка, которое допускает шестипараметрическую группу локальных преобразований, соответствующими заменами переменных сводится к уравнению теплопроводности.

В пространствах, размерности выше 1, были исследованы лишь отдельные классы уравнений вида (1). Например, в работе [12] были найдены усл овия, при которых уравнение (1) с однородным коэффициентом сноса и постоянной диагональной матрицей диффузии является инвариантным относительно девяти-параметрической группы локальных преобразований. Однако, авторы вешеуказанных работ не рассматривают уравнение (1) в связке со стохастическим дифференциальным уравнением, плотность решения которого может быть описана уравнением (1).

В настоящей статье сформулировано определение расширенного уравнения Фоккера – Планка, соответствующего заданному стохастическому дифференциальному уравнению (СДУ) Ито. Проанализирована взаимосвязь между симметрией СДУ Ито и соответствующего ему расширенного уравнения Фоккера – Планка. В отличие от обычного уравнения Фоккера-Планка, соответствующего уравнению Ито, расширенное уравнение содержит производные не только по фазовой переменной, но и по той переменной, которая отвечает значению винеровского процесса.

Постановка задачи.

Уравнение вида (1) в одномерном случае может соответствовать некоторому стохастическому дифференциальному уравнению Ито [13]:

$$du(t) = a(t,u)dt + \sigma(t,u)dW(t), \qquad (2)$$

где $W(t)$-винеровский процесс, $a(t,u), \sigma(t,u)$ - коэффициенты дрейфа и диффузии соответственно для процесса $u(t)$. Процесс $u(t)$, который описывается уравнением (2), является диффузионным [1].

Уравнение (2) запишем в виде системы:

$$\begin{cases} du_1(t) = a(t,u)dt + \sigma(t,u)dW(t), \\ du_2(t) = 0 \cdot dt + 1 \cdot dW(t). \end{cases} \qquad (3)$$

Таким образом, процесс $u(t)$, который описывается одномерным уравнением Ито, является решением системы (3), в которой решением второго уравнения является гауссовский процесс с математическим ожиданием 0 и коэффициентом диффузии, равным 1. Тогда коэффициенты дрейфа и диффузии для расширенного уравнения Фоккера – Планка (1), которое соответствует системе (3), будут равны:

$$A(t,u) = \begin{pmatrix} a(t,u) \\ 0 \end{pmatrix}, \; B(t,u) = \begin{pmatrix} \sigma^2(t,u) & \sigma(t,u) \\ \sigma(t,u) & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение 1. Уравнение Фоккера – Планка, соответствующее данному уравнению Ито, назовем раширенным уравнением Фоккера – Планка, если его решением является совместная плотность распределения процессов $u(t)$ и винеровского процесса $W(t)$.

Цель данной статьи – проанализировать взаимосвязь между симметрией уравнения Ито и симметрией соответствующего ему расширенного уравнения Фоккера - Планка.

Результаты продемонстрированы на примере линейного уравнения Ито, описывающего процесс броуновского движения. И на примере нелинейного уравнения Ито, решение которого является амплитудой решения более сложного СДУ параболического типа, описывающего процесс горения в случайной среде [19].

Основные результаты.

Расширенное уравнение Фоккера - Планка для системы (3) имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial u_1^2}\left(\sigma^2(t,u_1)p(t,u_1,u_2)\right) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2}\left(\sigma(t,u_1)p(t,u_1,u_2)\right) + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial u_2^2} - \frac{\partial}{\partial u_1}\left(a(t,u_1)p(t,u_1,u_2)\right), \qquad (4)$$

Перепишем уравнение (4) в виде

$$L = p_t - \frac{1}{2}\sigma^2 p_{u_1u_1} - \sigma p_{u_1u_2} - \frac{1}{2}p_{u_2u_2} - \\ - \left(2\sigma\sigma_{u_1} - a\right)p_{u_1} - \sigma_{u_1}p_{u_2} - \\ - \left(\sigma\sigma_{u_1u_1} + \sigma_{u_1}^2 - a_{u_1}\right)p = 0. \qquad (5)$$

Поскольку уравнение (5) является линейным, то общий вид инфинитезимальных операторов, которые генерируют группу инвариантности уравнения (5), будет таким [10, 14, 15]:

$$X = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \nu^1\frac{\partial}{\partial u_1} + \nu^2\frac{\partial}{\partial u_2} + \kappa p\frac{\partial}{\partial p}, \qquad (3) \quad (6)$$

где $\xi^0 = \xi^0(t)$ (согласно замечаниям [14]), $\nu^1 = \nu^1(t,u_1,u_2)$, $\nu^2 = \nu^2(t,u_1,u_2)$, $\kappa = \kappa(t,u_1,u_2)$ - произвольные дважды дифференцируемые функции в некоторой области пространства независимых переменных t, u_1, u_2 и зависимой переменной $p = p(t,u_1,u_2)$.

Основные результаты данной статьи сформулированы в следующих теоремах:

Теорема 1. Расширенное уравнение Фоккера – Планка (5) допускает группу инвариантности с оператором (6), когда координаты оператора (6) удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\tau_t - \sigma\nu_{u_1}^2 - \nu_{u_2}^2 = 0, \\ \frac{1}{2}\sigma\tau_t - \sigma\nu_{u_1}^1 - \nu_{u_2}^1 + \sigma_t\tau + \sigma_{u_1}\nu^1 = 0, \\ \sigma\tau_t - \sigma\nu_{u_1}^1 - \nu_{u_2}^1 - \sigma^2\nu_{u_1}^2 - \sigma\nu_{u_2}^2 + \sigma_t\tau + \sigma_{u_1}\nu^1 = 0, \\ \frac{\sigma^2}{2}\nu_{u_1u_1}^1 + \sigma\nu_{u_1u_2}^1 + \frac{1}{2}\nu_{u_2u_2}^1 + \left(a - 2\sigma\sigma_{u_1}\right)\tau_t - \\ - \nu_t^1 - \left(a - 2\sigma\sigma_{u_1}\right)\nu_{u_1}^1 + \sigma_{u_1}\nu_{u_2}^1 - \sigma^2\kappa_{u_1} - \\ - \sigma\kappa_{u_2} + \left(a_t - 2\sigma_{u_1}\sigma_t - 2\sigma\sigma_{tu_1}\right)\tau + \\ + \left(a_{u_1} - 2\sigma_{u_1}^2 - 2\sigma\sigma_{u_1u_1}\right)\nu^1 = 0, \\ \frac{\sigma^2}{2}\nu_{u_1u_1}^2 + \sigma\nu_{u_1u_2}^2 + \frac{1}{2}\nu_{u_2u_2}^2 - \sigma_{u_1}\tau_t - \\ - \nu_t^2 - \left(a - 2\sigma\sigma_{u_1}\right)\nu_{u_1}^2 + \\ + \sigma_{u_1}\nu_{u_2}^2 - \sigma\kappa_{u_1} - \kappa_{u_2} - \sigma_{tu_1}\tau - \sigma_{u_1u_1}\nu^1 = 0, \\ \frac{\sigma^2}{2}\kappa_{u_1u_1} + \sigma\kappa_{u_1u_2} + \frac{1}{2}\kappa_{u_2u_2} - \\ - \left(a_{u_1} - \sigma_{u_1}^2 - \sigma\sigma_{u_1u_1}\right)\tau_t - \kappa_t - \\ - \left(a - 2\sigma\sigma_{u_1}\right)\kappa_{u_1} + \sigma_{u_1}\kappa_{u_2} - \\ - \left(a_{tu_1} - 2\sigma_{u_1}\sigma_{tu_1} - \sigma_t\sigma_{u_1u_1} - \sigma\sigma_{u_1u_1}\right)\tau - \\ - \left(a_{u_1u_1} - 3\sigma\sigma_{u_1u_1} - \sigma\sigma_{u_1u_1u_1}\right)\nu^1 = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Доказательство. Как уже было отмечено выше, общий вид инфинитезимальных операторов, генерирующих группу инвариантности уравнения (5), имеет вид (6). Условие инвариантности уравнения (5) относительно оператора (6) имеет вид:

$$\underset{2}{X}L\Big|_{L=0} = 0, \qquad (5)$$

где $\underset{2}{X}$ - второе продолжение оператора (6). Применяя стандартный алгоритм Ли, описанный, напр., в [14], и сделав стандартные преобразования, получим систему (7).

Замечание 1. В уравнениях (7) не учитываем опе ратор симметрии $X = \beta(t, u_1, u_2)\partial_p$, в котором функция β является решением уравнения (5) и наличие которого обуславливается линейностью исследуемого уравнения.

В работе [17] был сформулирован и доказан критерий инвариантности стохастических дифференциальных уравнений Ито относительно рассматриваемой группы преобразований. Оператор допускаемой группы одномерного уравнения при этом выглядел так (обозначим его $\underset{0}{X}$):

$$\underset{0}{X} = \xi(t)\partial_t + \eta(t, u_1, u_2)\partial_{u_1}.$$

В нашем случае будем учитывать также переменную винеровского процесса, входящего в уравнение (2). Т.е. инфинитезимальные операторы, которые генерируют группу инвариантности уравнения (2), будем искать в классе операторов:

$$\underset{0}{X} = \xi(t)\partial_t + \eta(t, u_1, u_2)\partial_{u_1} + \zeta(t, u_2)\partial_{u_2}.$$

Следовательно, критерий инвариантности уравнения Ито (2) относительно введенной группы преобразований можно сформулировать так:

Теорема 2. Уравнение (2) инвариантно относительно группы преобразований с касательным вектором (ξ, η, ζ) тогда и только тогда, когда его координаты удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma\xi_t - \sigma\eta_{u_1} - \zeta_{u_2} + \\ + \sigma_t\xi + \sigma_u\eta = 0, \\ \frac{1}{2}\sigma^2\eta_{u_1u_1} + \sigma\eta_{u_1u_2} + \frac{1}{2}\eta_{u_2u_2} - \\ - a\xi_t + \eta_t + a\eta_u - a_t\xi - a_{u_1}\eta = 0, \\ \zeta = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \xi_s(s)dW(s). \end{cases}$$

Следующая теорема устанавливает зависимость между координатами допускаемого оператора уравнения Фоккера – Планка такую, что симметрия уравнения Ито является проекцией симметрии уравнения Фоккера – Планка.

Теорема 3. Для того чтобы симметрия уравнения Ито (2) была проекцией симметрии соответствующего ему расширенного уравнения Фоккера – Планка, необходимо (и достаточно), чтобы выполнялись условия:

$$X = \underset{0}{X} + \nu^2(t, u_2)\partial_{u_2} + \kappa(t, u_1, u_2)p\partial_p, \text{ где}$$

1) $\nu^2 = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \xi_s(s)dW(s)$;

2) функция κ является решением уравнения

$$\sigma\kappa_{u_1} + \kappa_{u_2} = -\sigma\eta_{u_1u_1} - \eta_{u_1u_2}.$$

Замечание 2. Уравнение Фоккера – Планка может иметь такие операторы симметрии, в которых функции $\nu^i(i = 0,1,2)$ не совпадают с соответствующими функциями ξ и η в операторах симметрии для уравнений Ито, но в данной работе мы не проводим систематических исследований таких операторов.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$du(t) = \beta dW(t)$, де β - постоянная. (8)

Это уравнение допускает операторы [20]: (8)

$$X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_{u_1}, X_3 = 2t\partial_t + u_1\partial_{u_1} + u_2\partial_{u_2},$$

$$X_4 = g(\beta u_2 - u_1)\partial_{u_1}, \; X_5 = \partial_{u_2},$$

де g – дважды дифференцируемая функция по переменным u_1 и u_2.

Запишем соответствующее уравнение Фоккера-Планка для уравнения (8):

$$p_t - \frac{\beta^2}{2}p_{u_1u_1} - \beta p_{u_1u_2} - \frac{p_{u_2u_2}}{2} = 0. \quad (9)$$

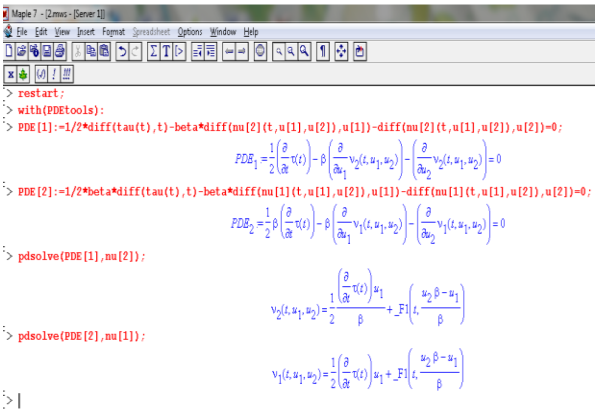
Подставим коэффициенты $a(t, u_1) = 0$ и $\sigma(t, u_1) = \beta$ уравнения (9) в систему (7), получим:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\tau_t - \beta\nu^2_{u_1} - \nu^2_{u_2} = 0, \qquad \frac{1}{2}\beta\tau_t - \beta\nu^1_{u_1} - \nu^1_{u_2} = 0, \\ \beta\tau_t - \beta\nu^1_{u_1} - \nu^1_{u_2} - \beta^2\nu^2_{u_1} - \beta\nu^2_{u_2} = 0, \\ \frac{\beta^2}{2}\nu^1_{u_1u_1} + \beta\nu^1_{u_1u_2} + \frac{1}{2}\nu^1_{u_2u_2} - \nu^1_t - \beta^2\kappa_{u_1} - \beta\kappa_{u_2} = 0, \\ \frac{\beta^2}{2}\nu^2_{u_1u_1} + \beta\nu^2_{u_1u_2} + \frac{1}{2}\nu^2_{u_2u_2} - \nu^2_t - \beta\kappa_{u_1} - \kappa_{u_2} = 0, \\ \frac{\beta^2}{2}\kappa_{u_1u_1} + \beta\kappa_{u_1u_2} + \frac{1}{2}\kappa_{u_2u_2} - \kappa_t = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Решим эту систему с помощью пакета Maple.

Замечание 2. Как несложно заметить, не все функции системы зависят от трех переменных, а, соответственно, имеют не частную, а обычную производную (функция $\tau(t)$). Использовать функции программы Maple мы будем для выражения функций ν^1 и ν^2 через $\tau(t)$ из первых двух уравнений, затем, для нахождения функций κ и τ мы уже вручную подставим полученные выражения и затем уже найдем функции κ и τ.

Для решения будем использовать встроенный пакет PDEtools.



В полученных выражениях F_1 - произвольная, дважды непрерывно дифференцируемая функция. Подставим найденные выражения для функций ν^1 и ν^2 в третье, четвертое и пятое уравнения системы (10). После преобразований получим:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}u_1\tau_{tt} - F_t - \beta^2\kappa_{u_1} - \beta\kappa_{u_2} = 0, \\ -\frac{1}{2\beta}u_1\tau_{tt} - F_t - \beta\kappa_{u_1} - \kappa_{u_2} = 0, \\ \frac{\beta^2}{2}\kappa_{u_1u_1} + \beta\kappa_{u_1u_2} + \frac{1}{2}\kappa_{u_2u_2} - \kappa_t = 0. \end{cases}$$

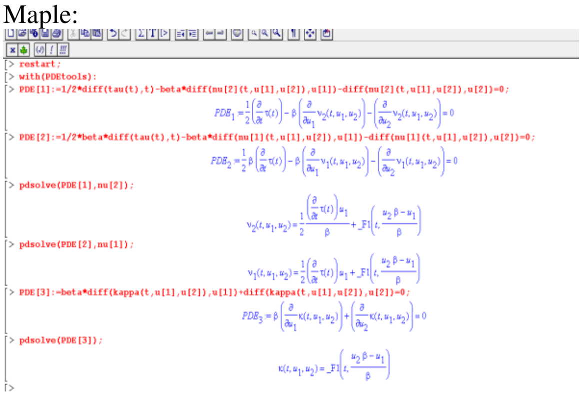
Из первых двух уравнений полученной системы следует, что

$\tau_{tt} = 0$, следовательно, $\tau = c_1t + c_2$.

Кроме того, также $F_t = 0$, т.е. данная функция не зависит от переменной t. Таким образом, для вычисления функции κ имеем систему:

$$\begin{cases} \beta\kappa_{u_1} + \kappa_{u_2} = 0, \\ \frac{\beta^2}{2}\kappa_{u_1u_1} + \beta\kappa_{u_1u_2} + \frac{1}{2}\kappa_{u_2u_2} - \kappa_t = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Решаем эту систему также с помощью функций Maple:



Проверка показывает, что найденная функция действительно является решением второго уравнения системы (11). Теперь достаточно подставить найденную функцию τ в выражения для ν^1 и ν^2:

$$\nu^1 = \frac{1}{2}u_1c_1 + F(\beta u_2 - u_1),$$

$$\nu^2 = \frac{1}{2\beta}u_1c_1 + F(\beta u_2 - u_1)$$

Подставляя найденные функции в общий вид операторов (6), найдем операторы симметрии уравнения Фоккера-Планка (9):

$X_1 = \partial_t$, $X_2 = \partial_{u_1}$, $X_3 = \partial_{u_2}$,

$X_4 = 2\beta t\partial_t + \beta u_1\partial_{u_1} + u_1\partial_{u_2}$,

$X_5 = \beta^2 t\partial_{u_1} + \beta t\partial_{u_2} - u_1 p\partial_p$, $X_6 = f(\beta u_2 - u_1)p\partial_{u_1}$,

где f произвольная дважды дифференцируемая функция по переменным u_1 и u_2.

Легко заметить, что из этих операторов, операторами симметрии уравнения Ито является X_1, X_2, X_6, а также проекция оператора X_4. Для оператора X_4+X_6 координаты касательного вектора (τ, ν^1) совпадают с координатами соответствующего вектора для уравнения Ито, а функции ν^2 и κ удовлетворяют условию теоремы 2.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$du(t) = \left(\frac{u(t)}{2(\gamma-1)} + \frac{\gamma B^2}{2}(u(t))^{2\gamma-1}\right)dt + B(u(t))^\gamma dW(t), \quad (12)$$

где $B, \gamma \neq 1, \gamma > 0$ - постоянные.

Актуальность рассмотрения подобного уравнения связана с вопросами изучения существования и единственности решения [18]. Кроме того, решение этого уравнения имеет и физический смысл: оно является амплитудой решения более сложного СДУ параболического типа, описывающего процесс горения в случайной среде [19].

Система уравнений для определения координат касательного вектора группы уравнений Ито имеет вид [17]:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}Bu^\gamma\xi_t - Bu^\gamma\eta_u - \eta_w + \gamma u^{\gamma-1}\eta = 0, \\ \frac{1}{2}B^2u^{2\gamma}\eta_{uu} + Bu^\gamma\eta_{uw} - \\ -\left(\frac{u}{2(\gamma-1)} + \frac{\gamma B^2}{2}u^{2\gamma-1}\right)(\xi_t - \eta_u) - \\ -\left(\frac{1}{2(\gamma-1)} + (2\gamma-1)\frac{\gamma B^2}{2}u^{2\gamma-2}\right)\eta = 0. \end{cases}$$

Из этой системы найдем операторы симметрии уравнения (11):

$X_1 = \partial_t$,

$$X_2 = e^{-t}\partial_t - \frac{e^{-t}u}{2(1-\gamma)}\partial_u, \quad X_3 = \frac{4}{B}e^{-\frac{t}{2}}\partial_t + u^\gamma we^{-\frac{t}{2}}\partial_u,$$

$X_4 = u^{\gamma} e^{-\frac{t}{2}} \partial_u$.

Подставим коэффициенты

$$a(t,u_1) = \frac{u_1}{2(\gamma-1)} + \frac{\gamma B^2}{2} u_1^{2\gamma-1},$$

$$\sigma(t,u_1) = B u_1^{\gamma}$$

в систему (7), получим такие операторы симметрии уравнения Фоккера–Планка:

$$X_1 = \partial_t ,$$

$$X_2 = e^{-t}\partial_t - \frac{e^{-t}u_1}{2(1-\gamma)}\partial_{u_1} - \left(\frac{u_2 e^{-t}}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t e^{-s}u_2(s)ds\right)\partial_w +$$

$$+\frac{e^{-t}}{2(1-\gamma)} p\partial_p ,$$

$$X_3 = \frac{4}{B} e^{-\frac{t}{2}}\partial_t + u^{\gamma} w e^{-\frac{t}{2}}\partial_u -$$

$$-\frac{1}{B}\left(w e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^t e^{-\frac{s}{2}} w(s)ds\right)\partial_w +$$

$$+\left(\left(-\gamma u^{\gamma-1}w + \frac{\gamma}{B(\gamma-1)}\right)e^{-\frac{t}{2}} - \frac{3\gamma t}{2B(\gamma-1)}\right)p\partial_p ,$$

$$X_4 = u^{\gamma} e^{-\frac{t}{2}}\partial_u - \gamma u^{\gamma-1} e^{-\frac{t}{2}} p\partial_p ,\ X_5 = \partial_v ,\ \ X_6 = p\partial_p .$$

Таким образом, как нетрудно видеть, симметрия уравнения Ито (12) является проекцией симметрии соответствующего ему расширенного уравнения Фоккера- Планка.

Выводы.

В статье сформулировано определение расширенного уравнения Фоккера – Планка, соответствующего заданному уравнению Ито. Проанализирована взаимосвязь между симметрией СДУ Ито и соответствующего ему расширенного уравнения Фоккера – Планка. В отличие от обычного уравнения Фоккера-Планка, соответствующего уравнению Ито, расширенное уравнение содержит производные не только по фазовой переменной u_1, но и по переменной u_2, что отвечает значению винеровского процесса. При замене времени и фазовой переменной винеровский процесс также подлежит изменениям. Учитывая этот факт, наличие в уравнении Фоккера - Планка переменной u_2, соответствующей W позволяет строить новые операторы симметрии, для которых соответствующие конечные преобразования изменяют функцию *p*. Симметрия, допускаемая уравнением Ито, является проекцией симметрии соответствующего ему расширенного уравнения Фоккера - Планка при выполнении определенных условий. Следовательно, мы можем вычислять симметрию уравнения Фоккера - Планка, не применяя алгоритм Ли, а используя лишь систему определяющих уравнений для стохастического дифференциального уравнения Ито.

Литература.

1. Cont R. Empirical properties of assept returns: sylized facts and statistical issues / J. Quant. Finance – 2001. – **1** - p. 223-236.
2. Эргодические свойства возвратных диффузионных процессов и решения задачи Коши для параболических уравнений. / Р.З. Хасьминский // ж. Теория вероятностей и ее приложения. – 1960. - Т. 5 ,№ 2. - С. 198-212.
3. *Shtelen W.M., Stogny V.* Symmetry properties of one- and two- dimensional Fokker – Plank equations //J. Phys. A: Math. Gen.- 1989, **22,** p. L539-L543.
4. *Spichak S., Stogny V.* One- dimensional Fokker – Plank equation invariant under four- and six-parametrical group //J. Phys. A: Math. Gen.- 1999, 32, № 7, p. 8341-8353.
5. *В. И. Лагно,* С.В. Спичак, В.И. Стогний. Симметрийный анализ уравнений эволюционного типа. – Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 392 с.
6. *Federico Finkel*. Symmetries of the Fokker – Plank equation with a constant diffusion matrix in 2 + 1 dimensions // J. Phys. A: Math. Gen. 32 (1999), p. 2671 – 2684.
7. *Risken H.* The Fokker – Plank equation, //Springer Series in Synergetics, Vol. 18 – Berlin: Springer, Heidelberg, 1984, p.
8. *Rudra P*. Symmetry classes of the Fokker – Plank equations //J. Phys. A: Math. Gen.,1990, 23, p. L1663-L1670.
9. *Risken H.* The Fokker – Plank equation, Berlin: Springer, 1989, 472 p.
10. *Овсяников Л.*В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. - М.: Наука,1978. – 400 с.
11. *Bluman G.*W. On the transformation of diffusion processes into the Wiener process // SIAM J. Appl. Math. — 1980. — 39. — P. 238—247.
12. *Стогній В.*І. Симетрійні властивості двовимірного рівняння Фокера—Планка // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. — 2000. — № 1. — С. 134—136.
13. *Оксендаль* Б. Стохастические дифферен-циальные уравнения: введение в теорию и приложения / Б. Оксендаль. - М.: Мир, ООО «Издательство АСТ», 2003. – 408 с.
14. *Ибрагимов Н. Х.* Азбука группового анализа. – Москва: Знание: Новое в жизни, науке и технике, 1989/8, 44 с.
15. *Ибрагимов Н. Х.* Опыт группового анализа. – Мос

ква: Знание: Новое в жизни, науке и технике, 1989/9, 45 с.
16. *Винберг Э. Б., Онищик А. Л.* Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. – М.: УРСС, 1995, 344 с.
17. *Alexandrova O. V.* Group analysis of the Ito Stochastic system/ Olga V. Alexandrova // Differential Equations and Dynamical Systems. – 2006. - Vol. 14, № 3/4. - P.255 – 279.
18. *Крылов Н.Б.*, Розовский Б.Л., О стохастических эволюционных процессах // ж. Результаты науки и инженерии, современные проблемы математики. Москва: ВИНИТИ, 1979, № 14, с. 72–147.
19. *Мельник С.А.* Расслоение решений квазилинейного стохастического уравнения параболического типа// ж. Украинский математический вестник, 2006, т.3, №2, с. 242 – 254.
20. *Aleksandrova O.V.* Group classification of the linear stochastic differential Ito equation.// Вестник Донецкого национального университета. - №2/2014, сер.4: Естественные науки, Донецк, 2014. - С. 26 – 31.

УДК 004.0- 517.8- 621.3

Александрова О. В. Взаимосвязь симметрии стохастического дифференциального уравнения Ито и соответствующего ему уравнения Фоккера – Планка.

Аннотация. *В статье рассматривается уравнение в частных производных, тесно связанное со стохастическим дифференциальным уравнением Ито. Исследуется взаимосвязь симметрий, которые допускает уравнение Ито и соответствующее ему уравнение Фоккера - Планка. Доказана теорема, при выполнении условий которой симметрия уравнения Ито является проекцией симметрии соответствующего ему расширенного уравнения Фоккера – Планка. Вычисления были сделаны при помощи специальных функций Maple.*

Ключевые слова: *стохастическое дифференциальное уравнение, симметрия, уравнение Фоккера – Планка.*

Aleksandrova O. V. The interconnection of symmetries of Ito stochastic differential equation and corresponding to him Fokker - Planck equation.

Abstract. *In article the differential equation in partial derivatives was considered, which is closely associated with the stochastic differential equation Ito. We investigate the interconnection of symmetry, which are allowed by the Ito equation and corresponding to him the Fokker - Planck equation. The theorem is proved, under conditions of which the symmetry of the Ito equation is the projection of the symmetry of the corresponding extended Fokker - Planck equation. The calculations were made by means of special functions Maple.*

Key words: symmetries, stochastic differential equation by Ito, Fokker – Plank equation.

Статья поступила в редакцию 20.1.2017
Рекомендована к публикации д-ром физ.-мат.. наук А.С. Миненко