

УДК 004.0-519.854.001

Компьютерное исследование и визуализация колебательной динамики систем в комплексной форме

Филер З.Е.¹, Андрухин А.И.²¹Кировоградский национальный педагогический университет,²Донецкий национальный технический университет

filer@ramber.ru, alexandruckin@ramber.ru

Филер З.Е., Андрухин А.И. Компьютерное исследование и визуализация колебательной динамики систем в комплексной форме. Рассматриваются колебания с помощью использования комплексной формы уравнения. Выделяются линейные части. Выполняется их последующее интегрирование. Выполняется. Фазовые портреты и графики перемещений строятся с использованием пакета Вольфрам Математика. Результаты расчетов приведены.

Ключевые слова: колебания, нелинейные, комплексные уравнения

Введение

В теории колебаний [1] используются комплексные переменные как аппарат анализа решений благодаря формуле Эйлера $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$. Нам неизвестны факты широкого использования дифференциальных уравнений в комплексной форме для получения решений и построения их графиков.

В настоящее время существуют пакеты, такие как Wolfram Mathematica, которые позволяют строить их решения и соответствующие графики, используя их комплексную форму.

Она позволяет снизить порядок уравнений вдвое и упростить программирование формул для получения решений и построения их графиков.

1 Постановка задачи

Уравнения автономных колебаний

$$\ddot{x} + f(x) = 0, f(0) = 0, f'(0) = \omega^2 \quad (1)$$

может быть заменено системой уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega y, \\ \dot{y} &= \omega x + (f(x) - \omega^2 x) / \omega, \end{aligned} \quad (2)$$

Последняя формула, может быть заменена в свою очередь, уравнением

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\omega^2 x + (\omega^2 x - f(x))}{\omega^2 y}. \quad (3)$$

Можно перейти от системы (2) к одному уравнению для комплексной функции $z(t) = x(t) + iy(t)$:

$$\dot{z} = i\omega z + i/\omega(f(\operatorname{Re} z) - \omega^2 \operatorname{Re} z). \quad (4)$$

Второе слагаемое в (4) не содержит постоянной и линейной слагаемых в составе правой части. Если же функция $f(x)$ линейна, то

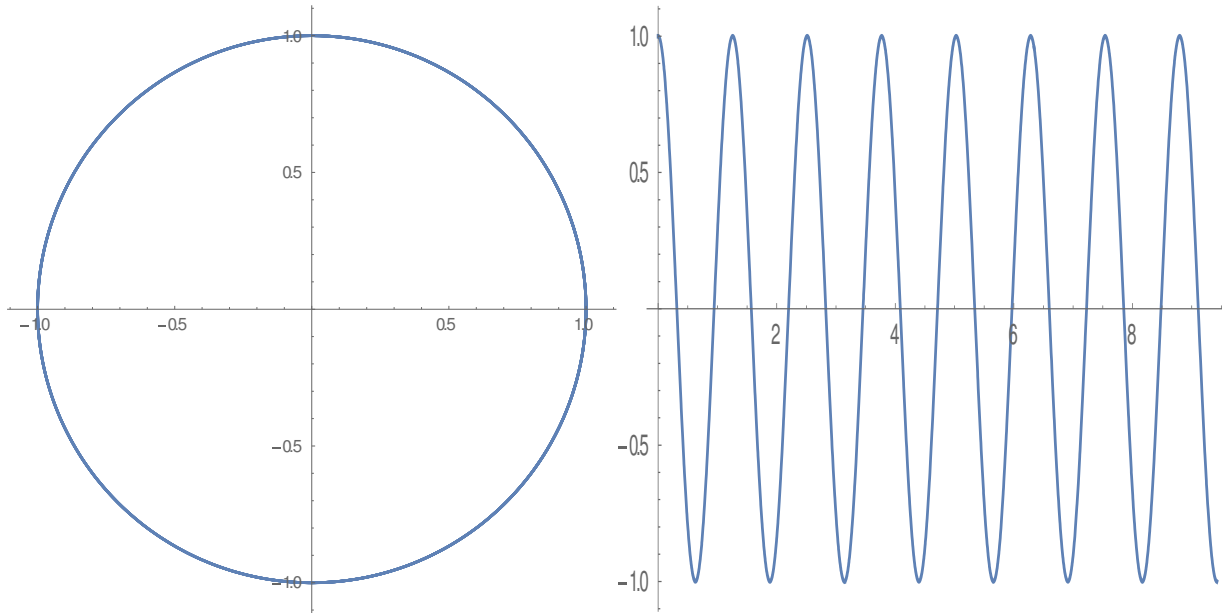
$$\begin{aligned} z &= z_0 e^{i\omega t} \Rightarrow x = a \cos(\omega t) \text{ при} \\ z_0 &= a \in \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (5)$$

Очевидно, $\omega = \sqrt{f'(0)}$ – частота малых колебаний, а поэтому период малых колебаний $T(0) = 2\pi / \omega$.

Между прочим, линейное уравнение первого порядка

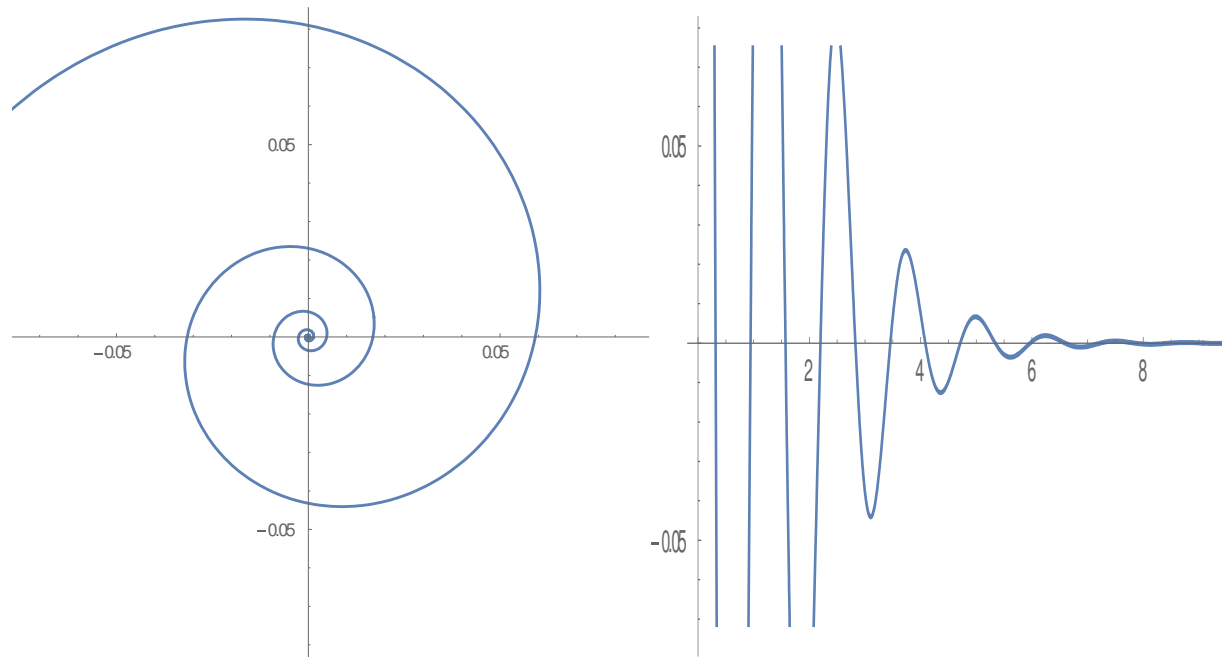
$$\dot{z} = i\omega z + (a + ib)z \quad (6)$$

имеет решение $z(t) = z_0 e^{at} \cdot e^{i(\omega+b)t}$ и при $a \neq 0$ имеет фокус (неустойчивый при $a > 0$ и устойчивый при $a < 0$ (рис. 1).

Рисунок 1а. — Незатухающие колебания при $a=0$

На рис.1а $a=0$, $b=2$ и $\omega=3$, $z_0=1$ и меньше. Построим графики $z(t)$ и $\text{Re}(z(t))$. Первый график будет близок к окружности при

$0 \leq t \leq \frac{2\pi}{5}$, второй – к косинусоиду амплитудой 1 и того же периода.

Рисунок 1б. — Затухающие колебания при $a=-1$.

Второй рис.1б при $a=-1$ и остальных данных – закручивающаяся спираль и затухающая косинусоида; Третий график рис.1в

будет при $a=1$ – раскручивающаяся спираль и нарастающая косинусоида.

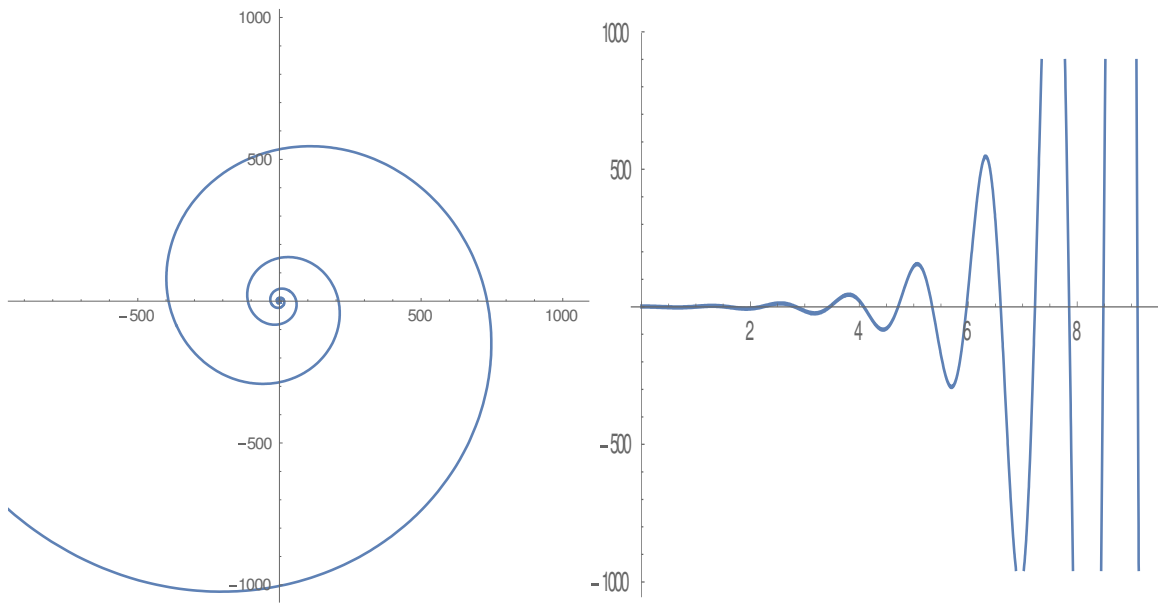


Рисунок 1в. — Нарастающие колебания при $a=+1$.

На рис.2 изображены соответствующие графики при $f(x) = 9x + 4x^3$, а на рис. 3 – графики при $f(x) = 9x - 4x^3$. В обоих случаях $f'(0) = 9$, а значит, $\omega = 3$. Поэтому период

$T(0) = 2\pi/3$. Принимая $a_0 = 0.1, 0.2, 0.3$, и т.д., получим зависимость периода $T(a)$.

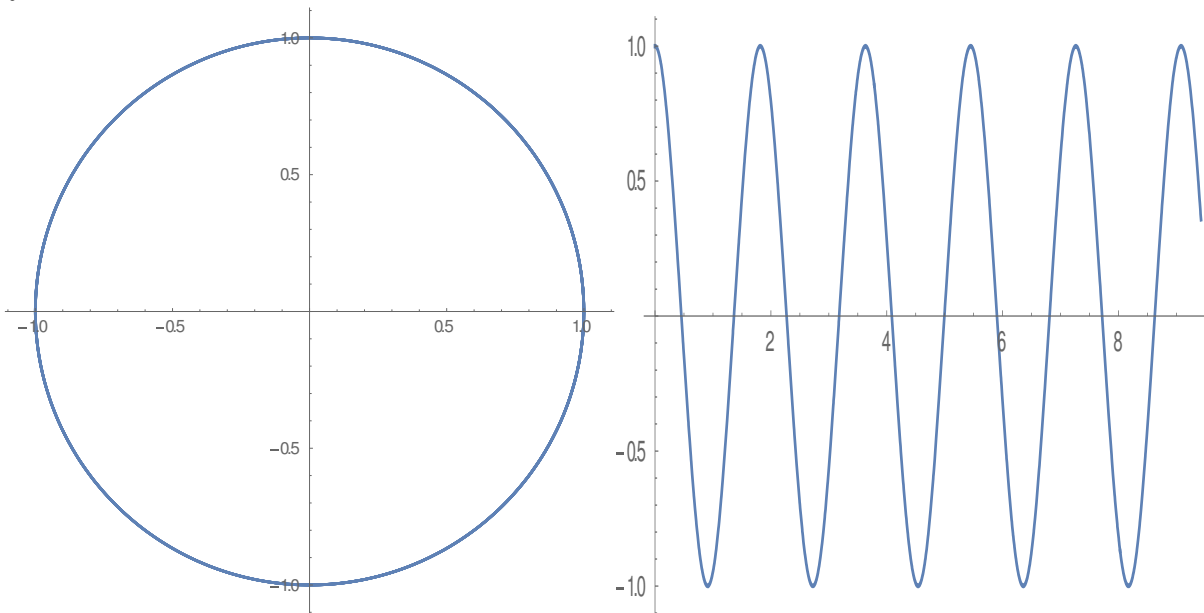
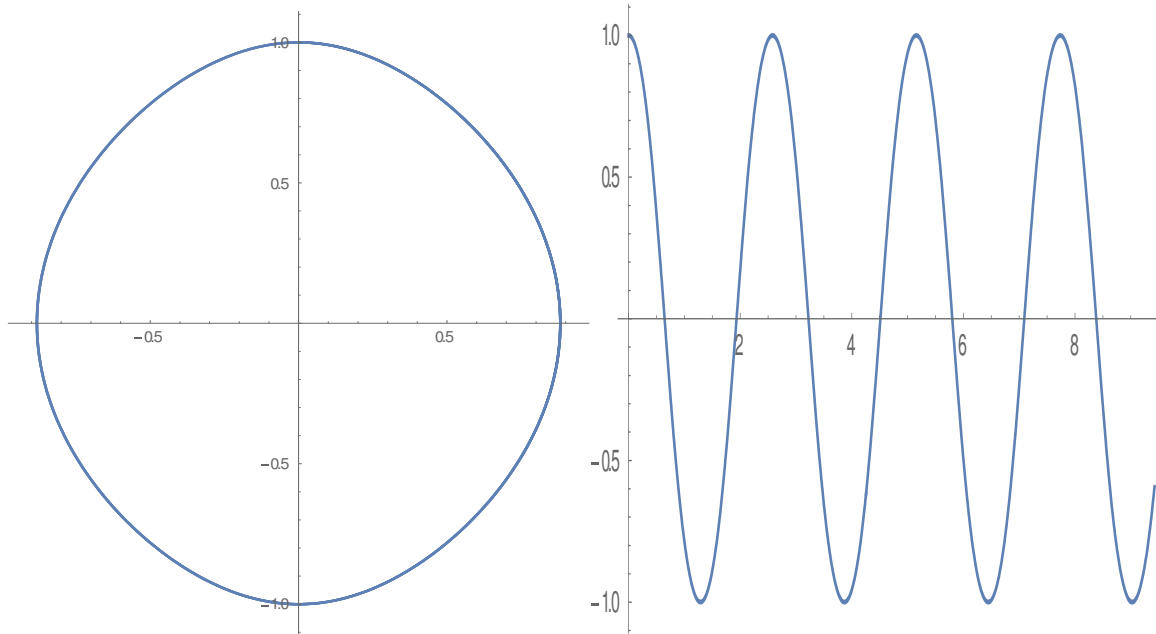
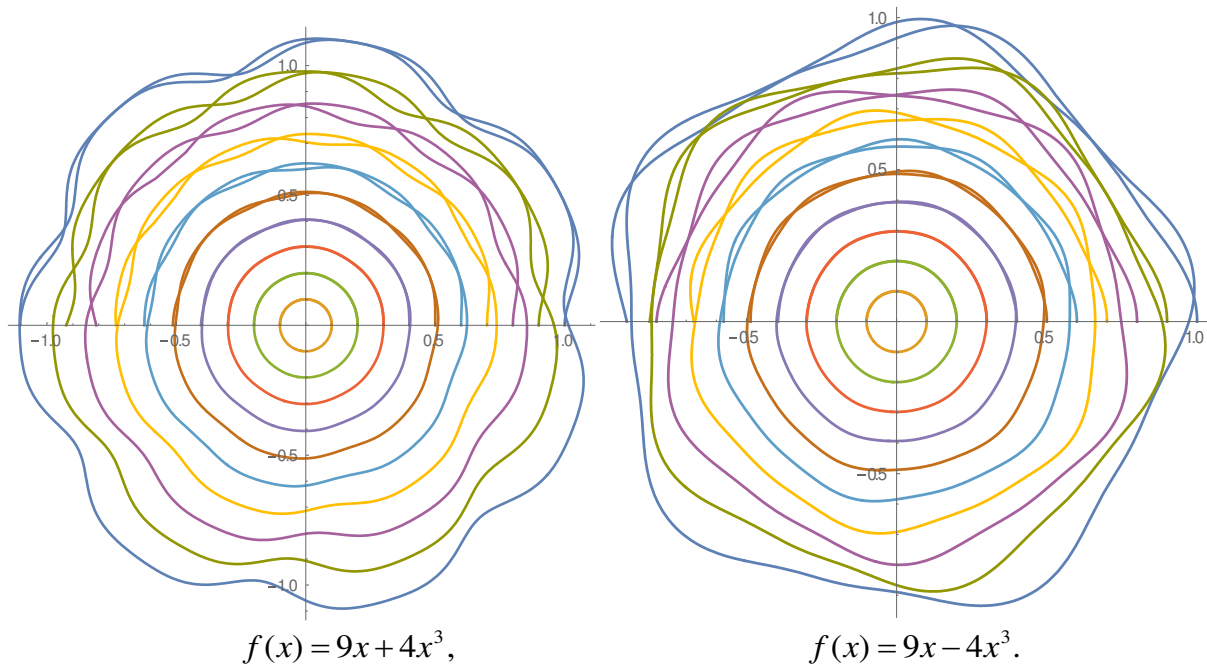


Рисунок 2. — Фазовая траектория и график при $f(x) = 9x + 4x^3$.

Рисунок 3. — Фазовая траектория и график при $f(x) = 9x - 4x^3$.

На рис. 4 изображены фазовые траектории при различных начальных значениях $Z_0=a$.

Рисунок 4. — Фазовые траектории при различных начальных значениях $Z_0=a$.

Есть в математических пакетах решение дифференциальных уравнений для комплексной функции z действительного аргумента t . поэтому можно получать траекторию для $z(t)$, находя период $T(a)$, исходя от $T(0)$.

Я.Г. Пановко [2,3] предложил метод прямой линеаризации нелинейной функции $f(x)$ заменой линейной функции kx , которая наиболее близка в смысле среднего квадратического с весом $\varphi(x)$:

$$\int_0^a [f(x) - kx]^2 \varphi(x) dx - \min,$$
 Отсюда получаем при $\varphi(x) := \omega^2 x + mx^3, \varphi(x) = x$

$$\omega^2(a) = \omega^2 + 0,4ma^3, \quad \text{а при } \varphi = 1$$

$$\omega^2(a) = \omega^2 + 0,5ma^3, \quad (7)$$

Весовая функция $\varphi(x) = x$: положительна и придаёт больший вес большим значениям. В нашем случае $f(x) = 9x \pm 4x^3$ и поэтому $\omega^2(a) \approx 9 \pm 0,4 \cdot 4a^3$, Данные, снятые с правых графиков типа рис. 2 и 3, позволяют оценить точность формул (7), используя равенство $\omega = 2\pi/T$.

На рис.5 показаны графики $\omega(a)$ по формулам (7) и их «экспериментальные» значения, снятые с графиков рис. 2 и 3.

2 Период колебаний – функция амплитуды консервативной системы

Из уравнения (1) для нечётной функции $\varphi(x)$ получаем $T(a) = 4 \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{2\Phi(a) - 2\Phi(x)}}$,

где $\Phi(x)$ – первообразная функции $\varphi(x), \Phi'(x) = \varphi(x)$. Интеграл является несобственным, т.к. подынтегральная функция обращается в бесконечность в правой точке интервала интегрирования $x = a$. Используя аддитивность интеграла, получим, выделив малый отрезок $(a - e, a)$. Для основной части отрезка $[0, a - e]$ интеграл можно вычислить по одной из формул численного интегрирования, а на конечной части отрезка $(a - e, a)$ использовать формулу интегрирования

$$\int_b^a \frac{dt}{\sqrt{c^2 - t^2}} = \arcsin \frac{a}{c} - \arcsin \frac{b}{c}, \quad \text{используя}$$

приближение функции $\Phi(x) \cong \Phi_2(x) = \Phi(a) + \varphi(x)(x - a) + 0.5\varphi'(a)(x - a)^2$ её многочленом Тейлора в окрестности точки a . Последний равен

$$\frac{4}{\sqrt{\varphi'(a)}} \arccos(1 - e\varphi'(a)/\varphi(a)).$$

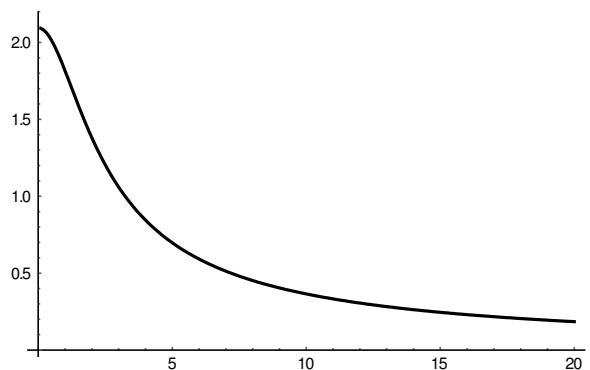


Рисунок 5а. — Зависимость периода для $f(x) = 9x + 4x^3$.

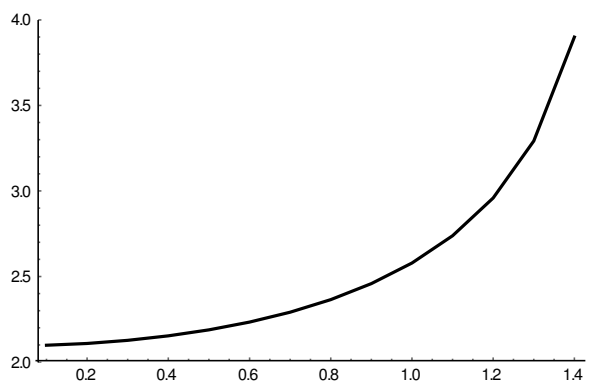


Рисунок 5б. — Зависимость периода для $f(x) = 9x - 4x^3$.

3 Более общее нелинейное автономное уравнение

$$\begin{aligned}\ddot{x} + f(x, \dot{x}) &= 0, f(0,0) = 0, \\ f'_x(0,0) &= \omega^2 > 0\end{aligned}\quad (8)$$

может быть аналогично сведено к уравнению первого порядка для комплексной функции $z(t)$:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\omega y, \\ \dot{y} &= \omega x + (f(x - \omega y) - \omega^2 x) / \omega.\end{aligned}\quad (9)$$

В результате перехода к комплексной функции $z(t)$, получаем уравнение

$$\begin{aligned}\dot{z} &= i\omega z + [f(\operatorname{Re} z, -\omega \operatorname{Im} z) \\ &- \omega^2 \operatorname{Re} z] / \omega.\end{aligned}\quad (10)$$

В качестве примера рассмотрим уравнение **Ван дер Поля**

$$\ddot{x} + x = \epsilon \dot{x}(1 - x^2), 0 < \epsilon \ll 1. \quad (11)$$

Используя формулу (10), получим уравнение

$$\dot{z} = iz + i\epsilon \operatorname{Im} z (1 - (\operatorname{Re} z)^2). \quad (12)$$

Интересно получить фазовые траектории и графики колебаний при разных начальных условиях и различных значениях «малого параметра».

Рассмотрим начальные значения $z(0) = 0.1; 5$ и параметра $\epsilon = 0.1; 1; 5$. Известно, что уравнение (11) имеет *предельный цикл*, для которого $z(0) = 2$, поэтому выбраны начальные точки *внутри* цикла и *вне* его. Предельный цикл устойчив орбитально.

Рис. 6 и 7а, 7б иллюстрируют сказанное.

4 Неавтономное уравнение с гармоническим возбуждением

$$\begin{aligned}\ddot{x} + f(x, \dot{x}) &= E \sin(pt), f(0,0) = 0, \\ f'_x(0,0) &= \omega^2 > 0\end{aligned}$$

аналогично сводится к уравнению первого порядка с комплексной функцией

$$\begin{aligned}\dot{z} &= i\omega z + [f(\operatorname{Re} z, -\omega \operatorname{Im} z) - \\ &\omega^2 \operatorname{Re} z - E \sin pt] / \omega.\end{aligned}\quad (13)$$

Тут интересно рассмотреть резонансный и не резонансный режимы. В качестве функции $f(x, \dot{x})$ можно взять $9x \pm 4x^3 - \alpha \dot{x}$, рвзять 2, 3, 5 – дорезонансный, резонансный и зарезонансный режимы. Тут проявится переходной процесс и установившийся режим. Длительность переходного процесса зависит от коэффициента сопротивления $\alpha > 0$.

Для линейной системы при отсутствии сопротивления получаем уравнение в комплексной форме

$$\begin{aligned}\dot{z} - i\omega z &= E / \omega \cdot e^{ipt} \Rightarrow \\ z &= C e^{i\omega t} + i \frac{E / \omega}{p - \omega} e^{ipt}\end{aligned}$$

Имеем при $\omega \neq p$ (нерезонансный режим).

Результаты решения уравнения (13) показаны на рис. 8-10 при $\alpha = 0,1$ для функции $9x - 4x^3 - \alpha \dot{x}$.

Для функции $9x + 4x^3 - \alpha \dot{x}$ результаты представлены на рис. 11. Значение E равно 1.

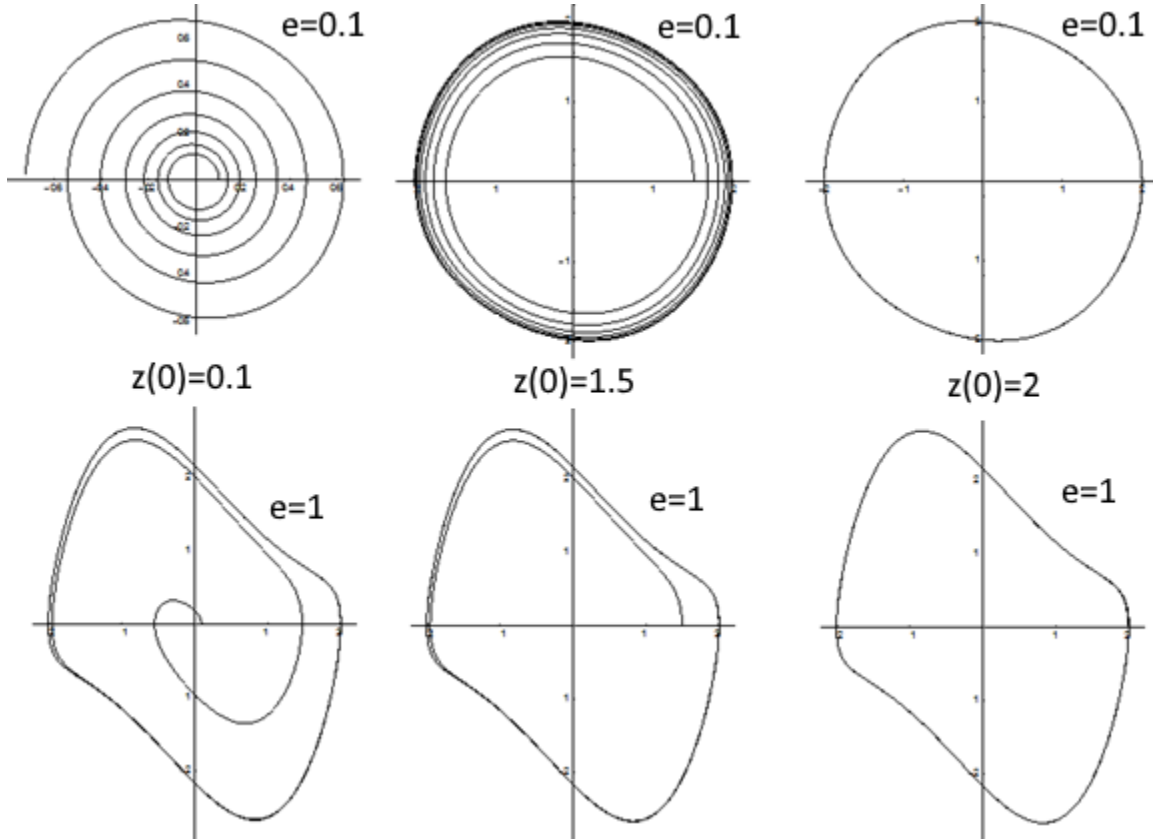


Рисунок 6—Решения уравнения (11).

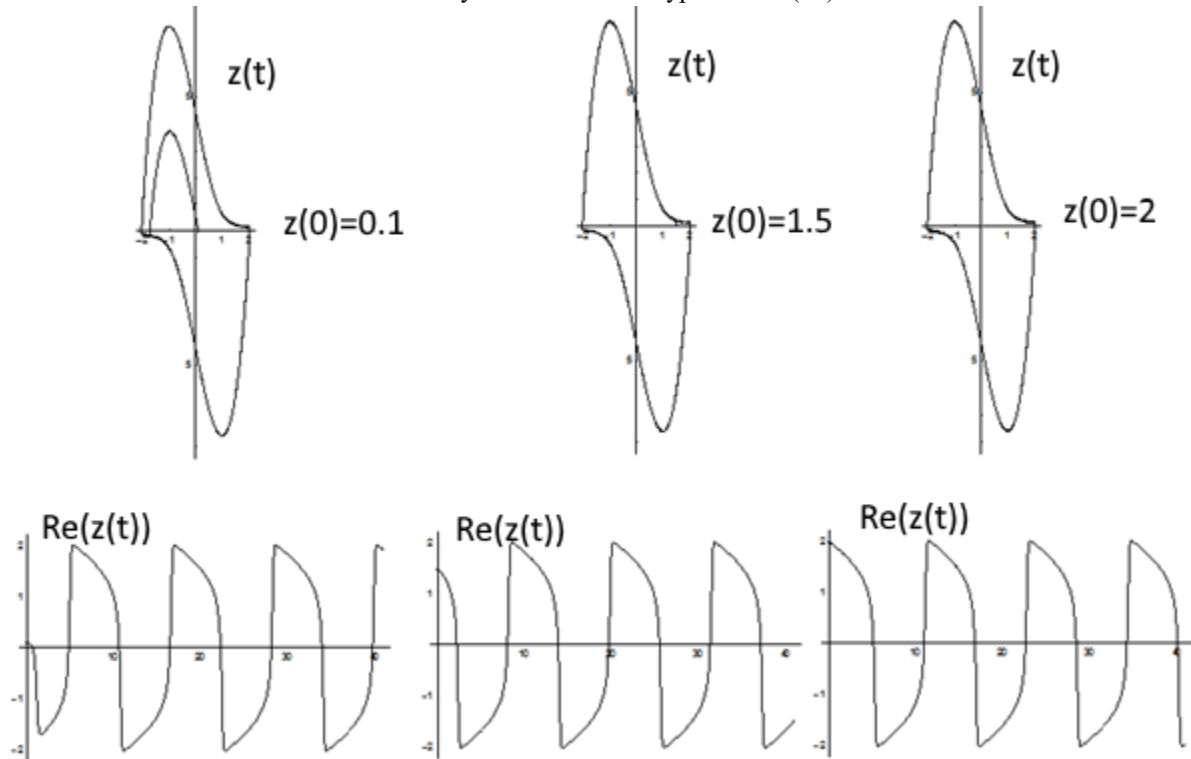


Рисунок 7а—Решения уравнения (11) при $e=5$.

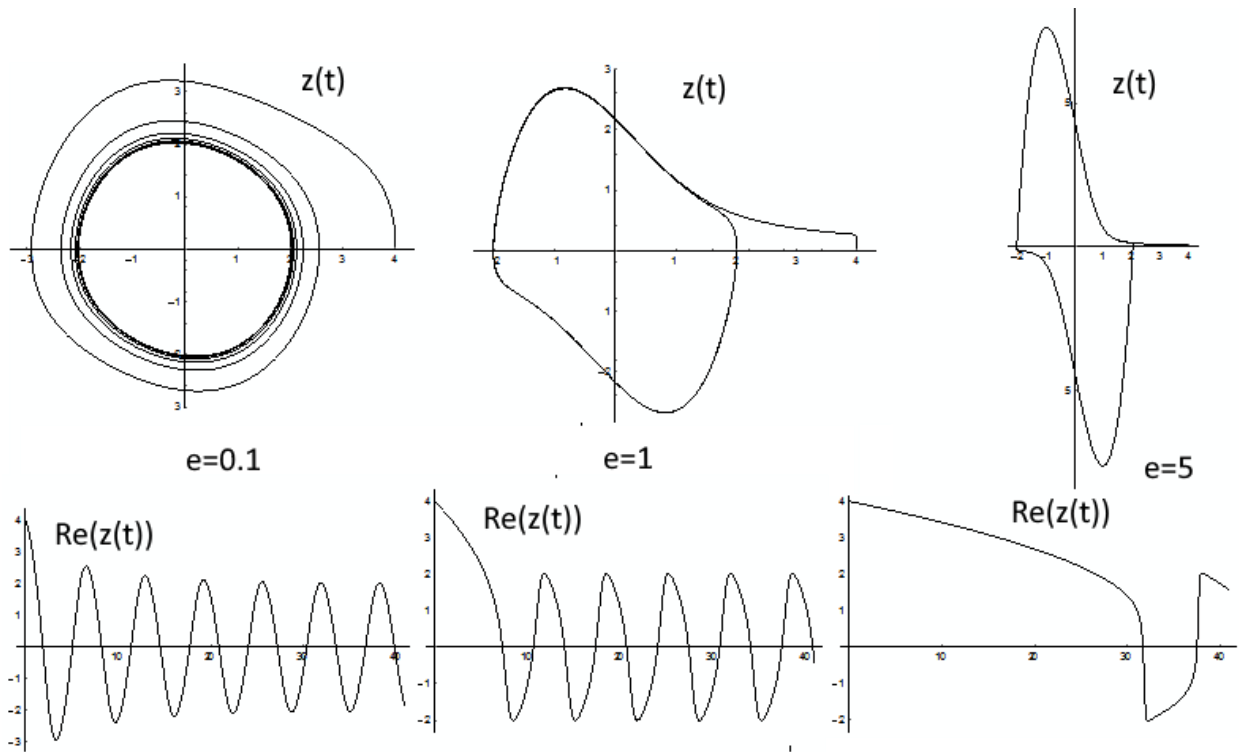


Рисунок 76. — Решения уравнения (11) при $z(0)=4$.

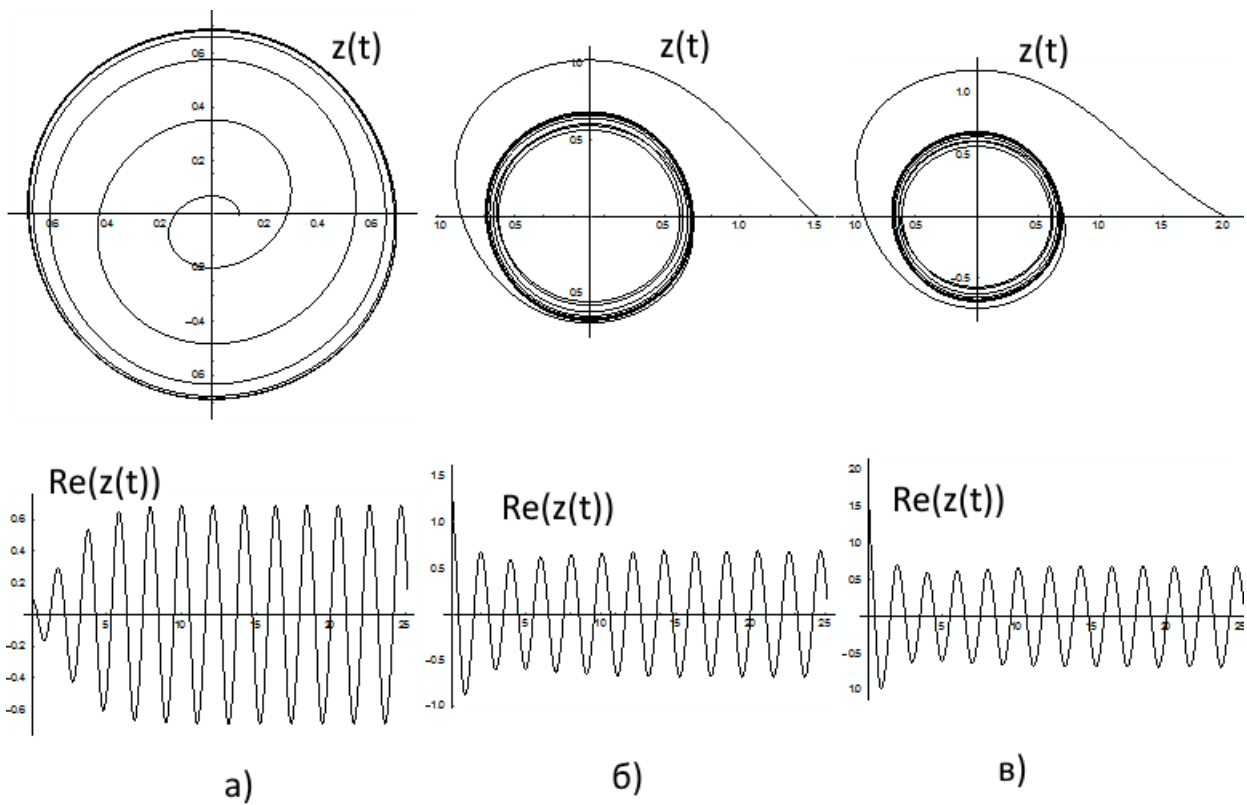


Рисунок 8. — Графики решения уравнения (13), $p=3$, а) $z(0)=0.1$; б) $z(0)=1.5$; в) $z(0)=2$.

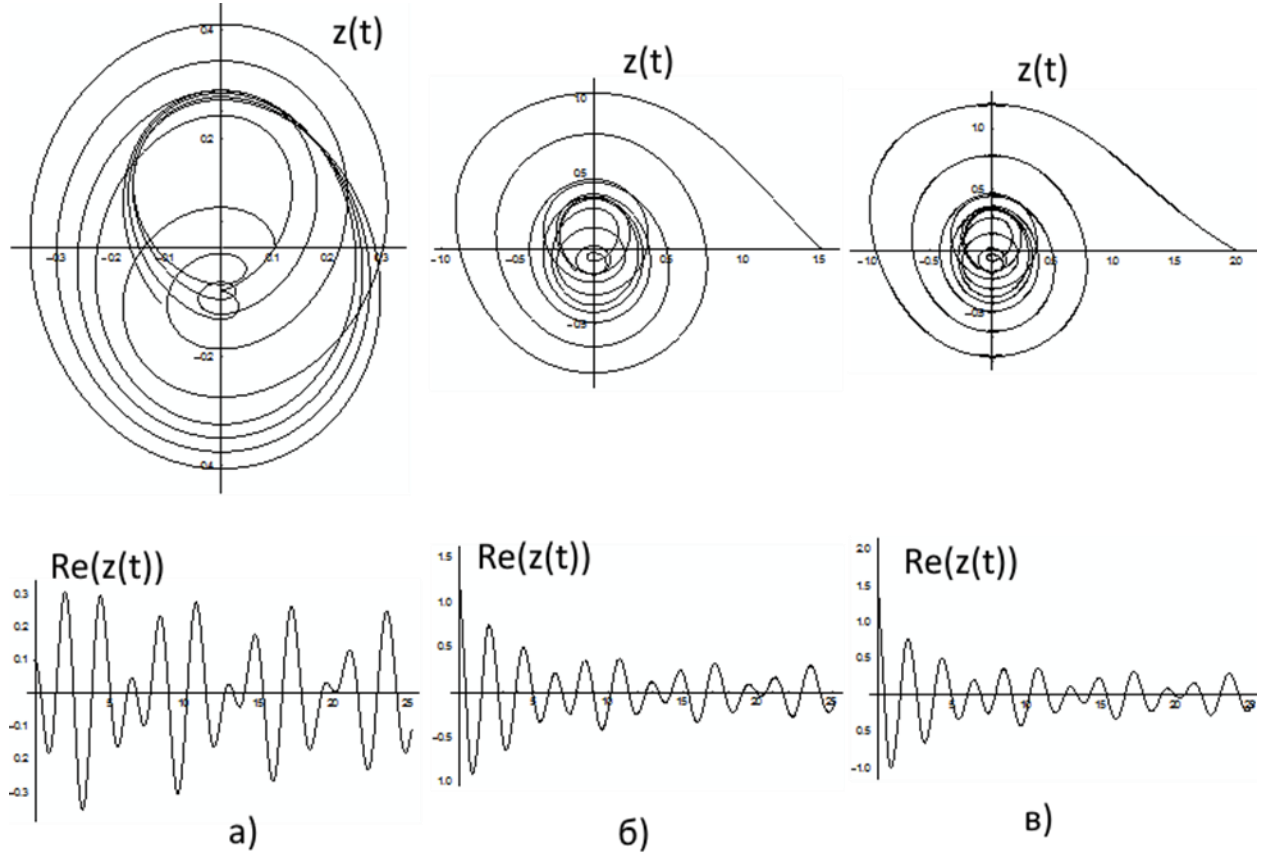


Рисунок 9. — Графики решения уравнения (13), $p=2$, а) $z(0)=0.1$; б) $z(0)=1.5$; в) $z(0)=2$.

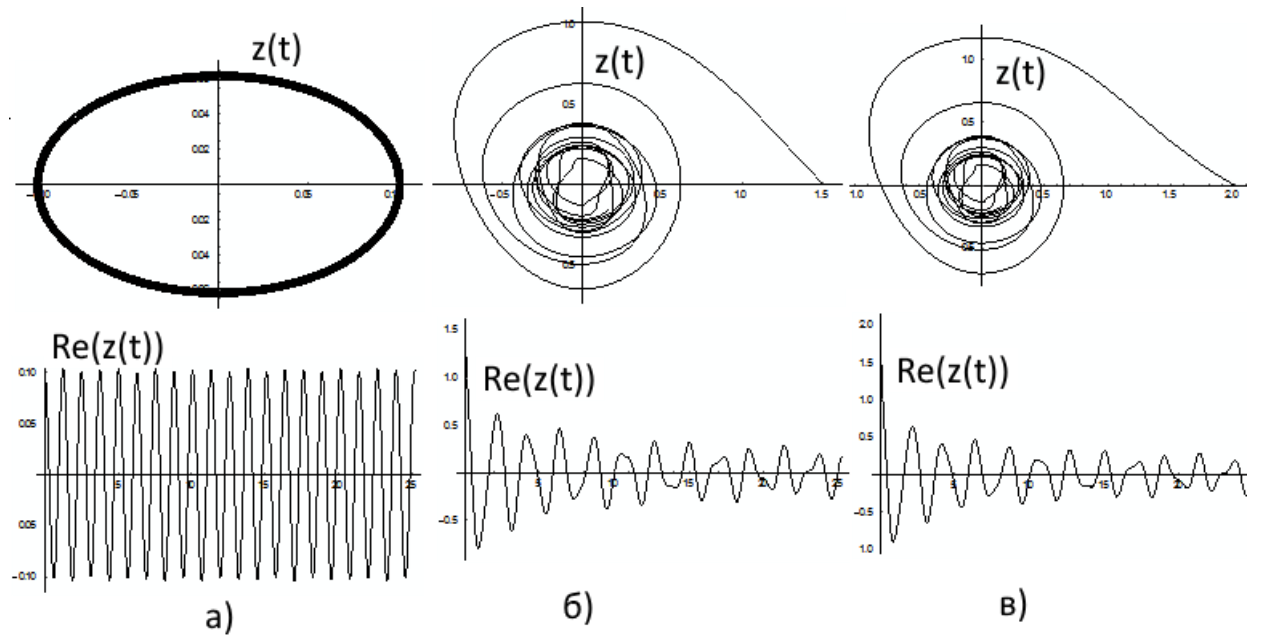


Рисунок 10. — Графики решения уравнения (13), $p=5$, а) $z(0)=0.1$; б) $z(0)=1.5$; в) $z(0)=2$.

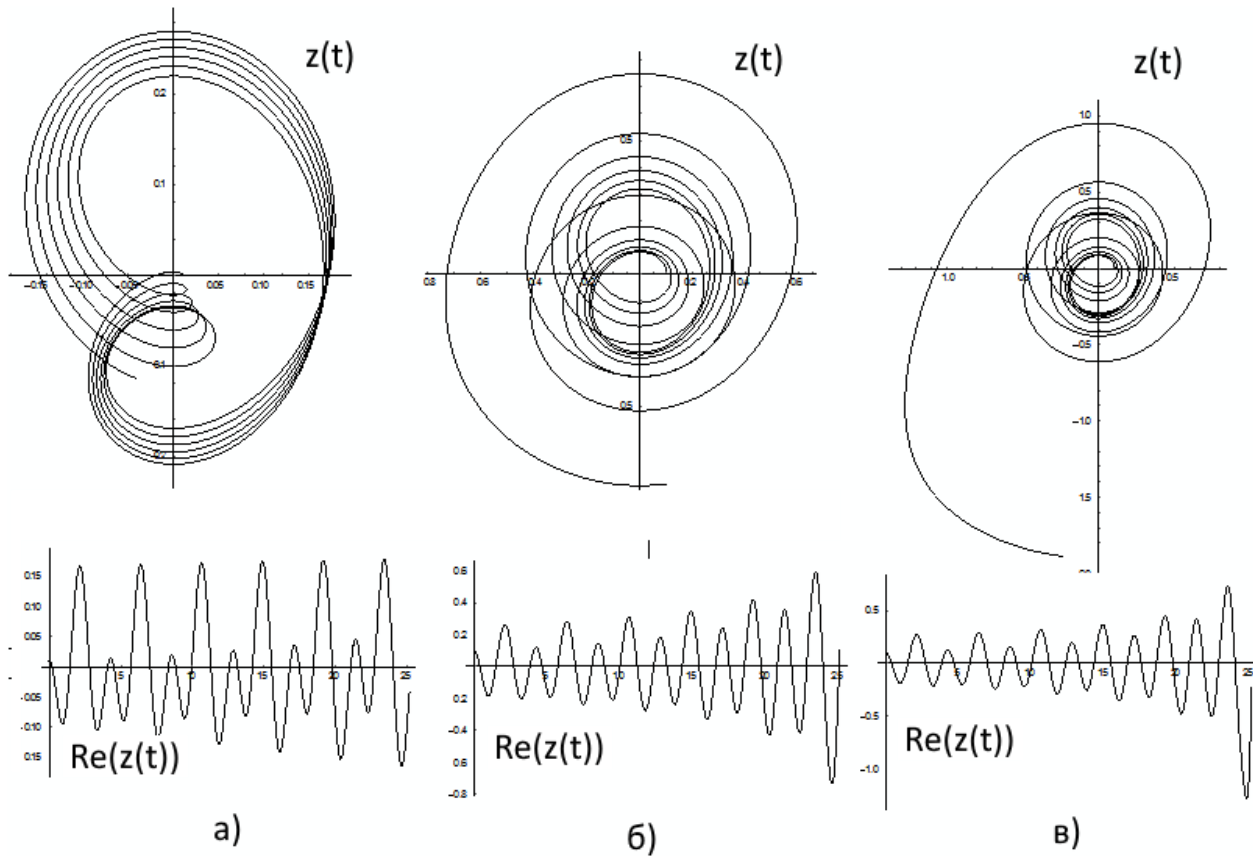


Рисунок 11. — Графики решения уравнения (13), $p=1.5$, а) $z(0)=0.01$; б) $z(0)=0.1$; в) $z(0)=0.105$.

Заключение

Показана возможность и целесообразность использования комплексной формы дифференциальных уравнений для анализа колебательных процессов с визуализацией результатов[4].

2. Переход к комплексным переменным позволяет снизить вдвое порядок соответствующих дифференциальных уравнений.

3. Использование современных математических пакетов типа Wolfram Mathematica упрощает процесс получения визуализации решений[5].

4. Желательно использование полученных результатов для анализа колебаний систем с несколькими степенями свободы.

Литература

1. Вибрации в технике. Справочник в 6 т. Т.1. Колебания линейных систем/ Под ред. В.В. Болотина. - М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.
2. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний. – М.: Машиностроение, 1967. – 316 с.
3. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука, 1991. – 256 с.
4. Дифференциальные уравнения. Электронный учебно-методический комплекс по дисциплине «Дифференциальные уравнения» для студентов математического факультета/ Н.А.Кучер, Д.А.Прокудин, О.В.Мальшенко. – Кемерово: Кемеровский госуниверситет.

5. Diran Basmadjian and Ramin Famood .
The Art of Modeling in Science and Engineering
with Mathematica, Second Edition, YiGU Hall/CRC
,2006

Filer Z.E., Andryukhin AI *Computer investigation and visualization of vibrational dynamics of systems in complex form.* We consider fluctuations through the use of an integrated form of the equation. linear parts of these equations are determined. Their subsequent integration is performed. Phase portraits and motion graphics built using Wolfram Mathematica package. The calculation results are shown

Keywords: vibrations, non-linear, complex equations

Филер З.Е., Андриюхин А.И. *Компьютерное исследование и визуализация колебательной динамики систем в комплексной форме.* Рассматриваются колебания с помощью использования комплексной формы уравнения. Выделяются линейные части. Выполняется их последующее интегрирование. Выполняется. Фазовые портреты и графики перемещений строятся с использованием пакета Вольфрам Матхематика . Результаты расчетов приведены

Ключевые слова: колебания, нелинейные, комплексные уравнения

Статья поступила в редакцию 12.12.2016
Рекомендована к публикации д-ром физ.-мат. наук С.Н. Судаковым