УДК 004.0- 519.854.001

Компьютерные расчеты и визуализации характеристик устойчивости систем: проблема центра-фокуса и гармонические функции

Филер З.Е.[1], Андрюхин А.И [2]
[1]Кировоградский национальный педагогический университет,
[2]Донецкий национальный технический университет
filier@ramber.ru, alexandruckin@ramber.ru

Филер З.Е., Андрюхин А.И. Компьютерные расчеты и визуализации характеристик устойчивости систем: проблема центра-фокуса и аналитические функции. *Эта работа относится к известной проблеме определения параметров устойчивости систем. Теоретические обоснования решения этой задачи рассматриваются для случая центра. Решения для линейных и гармоничных функций, а также однородных многочленов высших степеней обсуждаются. Результаты компьютерных расчетов приведены. В расчетах использовался пакет Mathematica.*

Ключевые слова: *проблема центра-фокуса, устойчивость системы , визуализация, компьютер.*

Введение.

Общеизвестно влияние результатов А. Пуанкаре по качественному исследованию систем. В частности они послужили толчком для работ Ляпунова по устойчивости систем и следовательно на развитие общей теории управления, теории автоматического управления, теории систем.

С 1880 г. начался цикл работ А. Пуанкаре «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями». В своём «Аналитическом резюме» [1] он в 1-ом разделе «Дифференциальные уравнения» в подразделе Y он даёт анализ своих работ в этом направлении. На с. 597-598 он пишет: «… я начал свои исследования … с изучения кривых, определяемых уравнениями вида

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y},$$

где X,Y - … многочлены от *x* и *y*… [оно] привело к различению 4 видов особых точек … Я дал [им] … названия: 1) сёдла… 2) узлы … 3) *фокусы* … наподобие логарифмической спирали…4) *центры*, где все кривые, … замкнуты, наподобие кривых уровня топографического плана лишь в крайне редких случаях). Далее, на с. 599, он пишет: «Имеется частный случай… . … необходимо бесконечное число условий … это чаще всего … доказывается, что все условия удовлетворены, … когда …

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=0 \text{ ».}$$

Здесь нет ни одной «картинки» - в докомпьютерную эру построение графиков решений было весьма трудоёмкой работой.

В нашей статье мы попытаемся обобщить эти результаты и использовать современные средства, предоставляемые ЭВМ.

1 Случай линейных функций X,Y *.*

Он рассматривается практически во всех пособиях по дифференциальным уравнениям [2-5]. Иногда это изложение занимает много страниц. Заменяя уравнение $\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}$ системой уравнений $\dot{x}=X, \dot{y}=Y,$ получим для $X=ax+by, Y=cx+ey$ характеристическое уравнение $\det(A-\lambda E)=0.$ Оно является квадратным относительно λ. След матрицы $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix}$ SpA=a+e и её определитель $\det(A)=ae-bc$ определяют тип особой точки O(0, 0).

Центр будет при чисто мнимых корнях характеристического уравнения, когда SpA=a+e=0, а $\det(A)=ae-bc=\omega^2>0$. Тогда *x* и *y* будут периодическими функциями от *t* частоты ω (с периодом 2π/ω). При *комплексных* корнях этого уравнения, когда SpA ≠0 и $\det(A)=ae-bc>0$ налицо **узел.** Все кривые будут подобными ввиду однородности уравнения. В других случаях будут узлы и сёдла. Если записать это уравнение в дифференциалах $Ydx-Xdy=0,$ то сказанное Пуанкаре условие $X_y+Y_x=0$ является условием полного дифференциала левой части уравнения. Таким образом, уравнение имеет полный интеграл

$cx^2 + 2axy + by^2 = f$ при постоянных действительных коэффициентах. Если $bc > a^2, b > 0, f > 0,$ то оно описывает эллипс. Точка О является **центром**.

Переход к комплексной форме для функции $\dot{z} = (a + bi)z + iAz$ при $\sqrt{a^2 + b^2} < A$ *даёт* центр при любых $a, b, A.$ У этой формы есть простой механический смысл. Вектор касательной к траектории при $a = b = 0$ перпендикулярен к радиусу - вектору каждой её точки. Такой линией является окружность. При $a \neq 0, b \neq 0$ траекторией является эллипс.

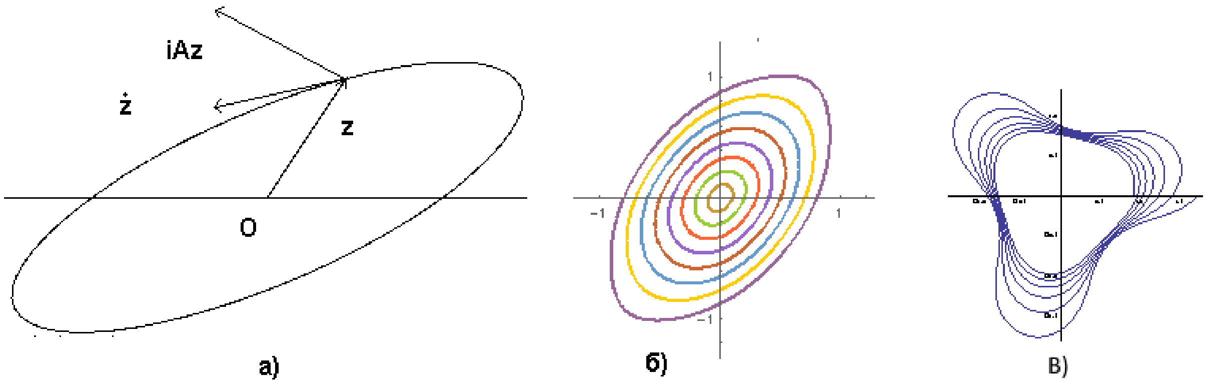

Рисунок.1--а) Механическое истолкование центра - скорость движения точки z под действием сил *iAz* и *az*; б) *Центр* системы концентрических эллипсов в) фокус при a=1,в=0.8,A=1,68,r_0=0.9,B=0.01.

В [5, с.128-129] по поводу центра читаем: «… случай центра: при малом изменении элементов матрицы … центр перейдёт в … фокус. Включение этого вырожденного случая … в основной текст … объясняется его важностью». Периодические решения уравнения 2-го порядка изображаются замкнутыми линиями на фазовой плоскости.

2. *Случай однородных многочленов высших степеней.*

Для системы $\dot{x} = X, \dot{y} = Y$ удобнее в этом случае перейти к полярным координатам $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. Если многочлены X, Y **гармоничны,** то есть лапласиан от них равен нулю, правые части являются линейными комбинациями косинусов и синусов аргумента $n\varphi.$, умноженных на r^n. Умножая уравнения на *x* и *y* соответственно и складывая, получим систему $\dot{r} = (xX + yY)/r, \dot{\varphi} = (xY - yX)/r^2.$ Она равносильна уравнению

$$\frac{dr}{d\varphi} = r\frac{Y\sin\varphi + X\cos\varphi}{Y\cos\varphi - X\sin\varphi},$$
$$X = r^n(a\cdot\cos(n\varphi) + b\cdot\sin(n\varphi)),$$
$$Y = r^n(c\cdot\cos(n\varphi) + e\cdot\sin(n\varphi))$$

Правая часть уравнения имеет точки бесконечного разрыва, в которых тригонометрическое уравнение $Y\cos\varphi - X\sin\varphi = 0$ имеет корни. Добавив в знаменатель число А, что эквивалентно добавлению в правые части соответственно членов *–Ay* и *Ax*, получим при выборе постоянной $A > \max[\sqrt{a_k^2 + b_k^2}), k = 1,2,$ где a_k, b_k - коэффициенты указанных линейных комбинаций.

В этом случае при использовании комплексной переменной $z = x + iy$ получим уравнение $\dot{z} = \alpha_n z^n + iAz.$ Комплексный коэффициент α_n $= a_n + ib_n$ выбирается так, чтобы выполнялись условия центра: $|\alpha_k| < A.$. Соответствующее уравнение будет

$$\frac{dr}{d\varphi} = r\frac{Y\sin\varphi + X\cos\varphi}{Y\cos\varphi - X\sin\varphi + A},$$
$$X = r^n(a\cdot\cos(n\varphi) - b\cdot\sin(n\varphi)),. \quad (2)$$
$$Y = r^n(b\cdot\cos(n\varphi) + a\cdot\sin(n\varphi))$$

Оно содержит лишь 3 произвольных постоянных a, b, A, которые могут изменяться и не мало, но согласованно.

В декартовых координатах в левой и правой точках с вертикальными касательными приходится переходить от уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X}$ к уравнению $\frac{dx}{dy} = \frac{X}{Y}.$ Поэтому удобно для построения траекторий переходить к *полярным* координатам.

На рис. 2-4 представлены центры с различными n. Нижние рисунки показывают изменение радиуса $r(\varphi)-r(0)$.

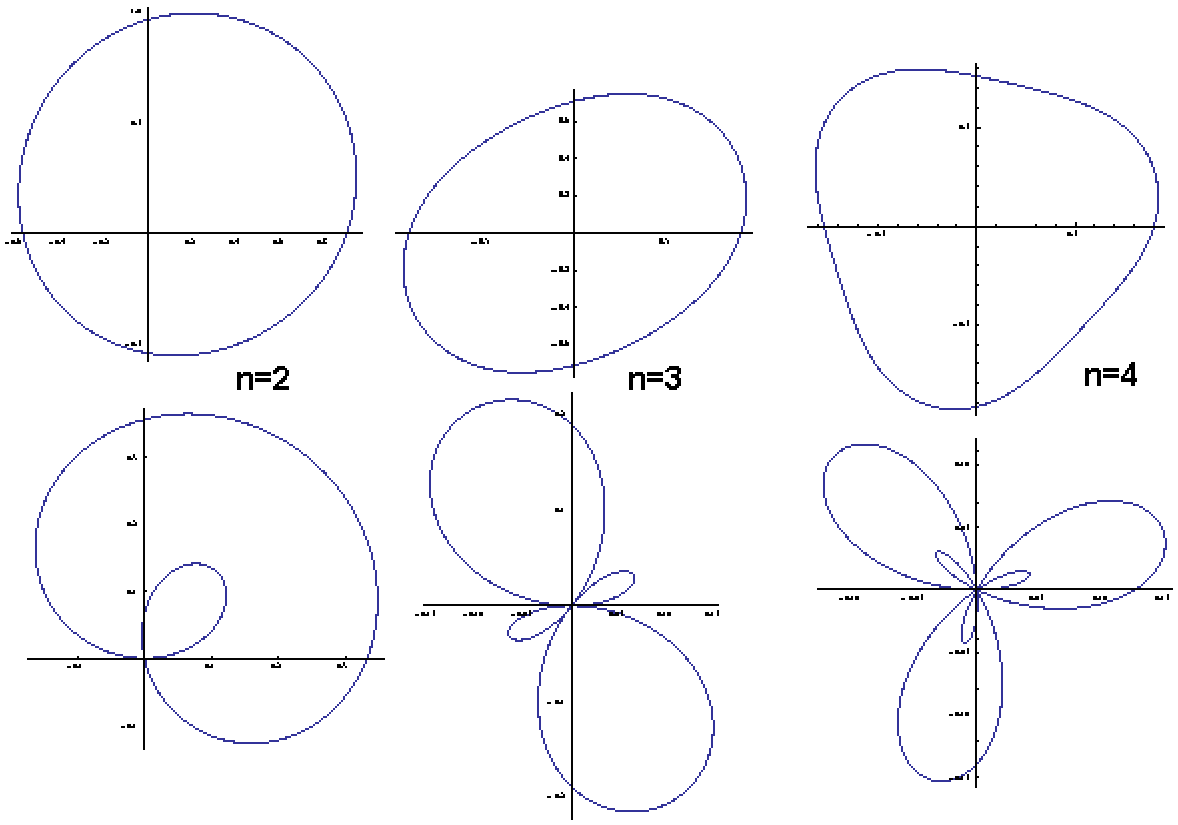

Рисунок 2-- Коэффициенты имеет значения: $a=1, b=8, A=1.68$.

«Атомарные» гармонические многочлены являются «кирпичиками», из которых строятся функции, обеспечивающие появление центра.

Примерами их при $n=3$ являются 2 конкретных многочлена 3-ей степени: $X_3 = x^3 - 3xy^2, Y_3 = 3x^2y - y^3$;

при $n=4$ имеем $X_4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4, Y_4 = 4x^3y - 4xy^3$. Они являются действительными и мнимыми частями степени $z^n = (x+iy)^n$ при n, соответственно равном 3 и 4.

3. Случай гармоничных функций

Для комплексной аналитической функции $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ центр находится в точке О при $c_0=0$; член $c_1 z$ должен иметь вид $(a+bi)z+iAz$. Коэффициенты $a, b, A, a_k, b_k, k \geq 2$ произвольны, но сумма модулей коэффициентов *сходящегося* ряда должна быть меньше А.

Для известных гармонических функций можно пользоваться привычными формулами, например, для функции $f(z)=e^z-1-z$ будем иметь центр в точке О, если взять $(a+ib)f(z)+iAz$ с достаточно большим А $\gg \sqrt{a^2+b^2}$. Действительной частью этой функции является $X = e^x\cos(y)-1-x$, мнимой – функция $Y = e^x \sin(y) - y$.

Добавление в состав одного из слагаемых, которые не входят в состав гармонических членов, делает траекторию отличной от центра, ибо в числителе появляется постоянная составляющая. ведущая к росту модуля производной.

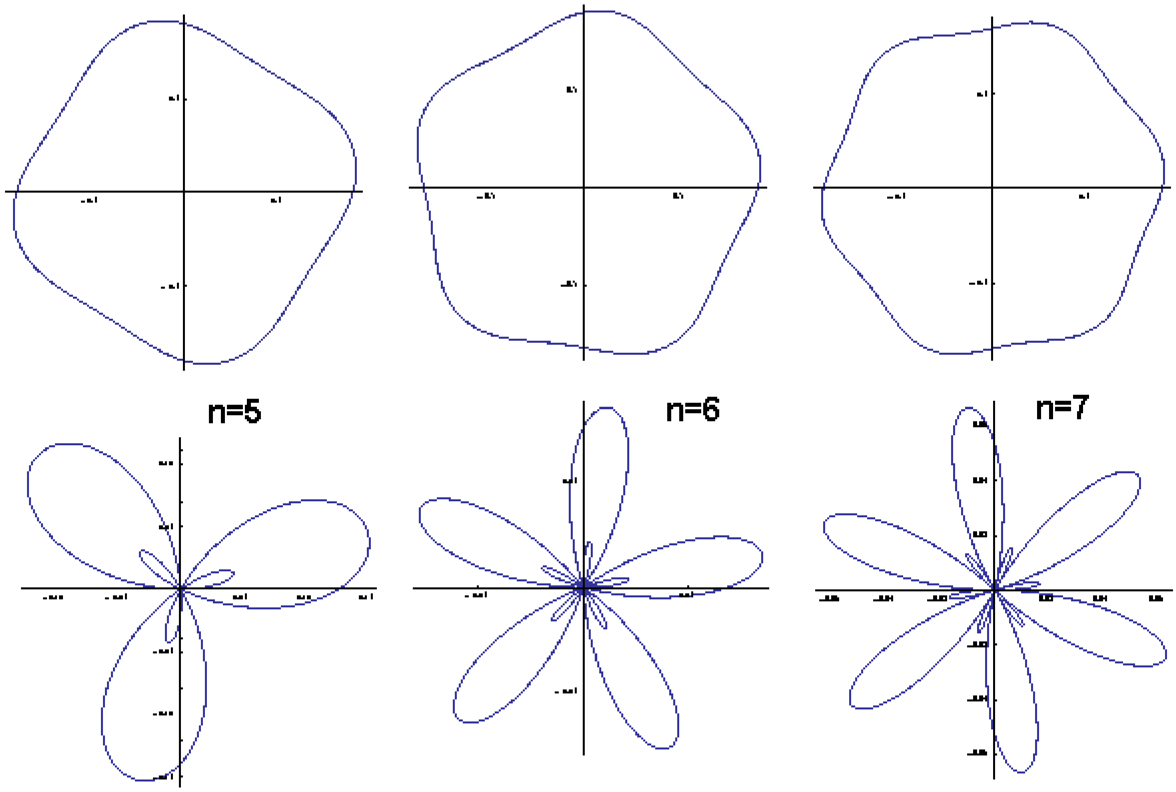

Рисунок 3а-- Центры при $n = 5{,}6{,}7$. Количество «лепестков» и «сторон» многоугольника равно $n-1$.

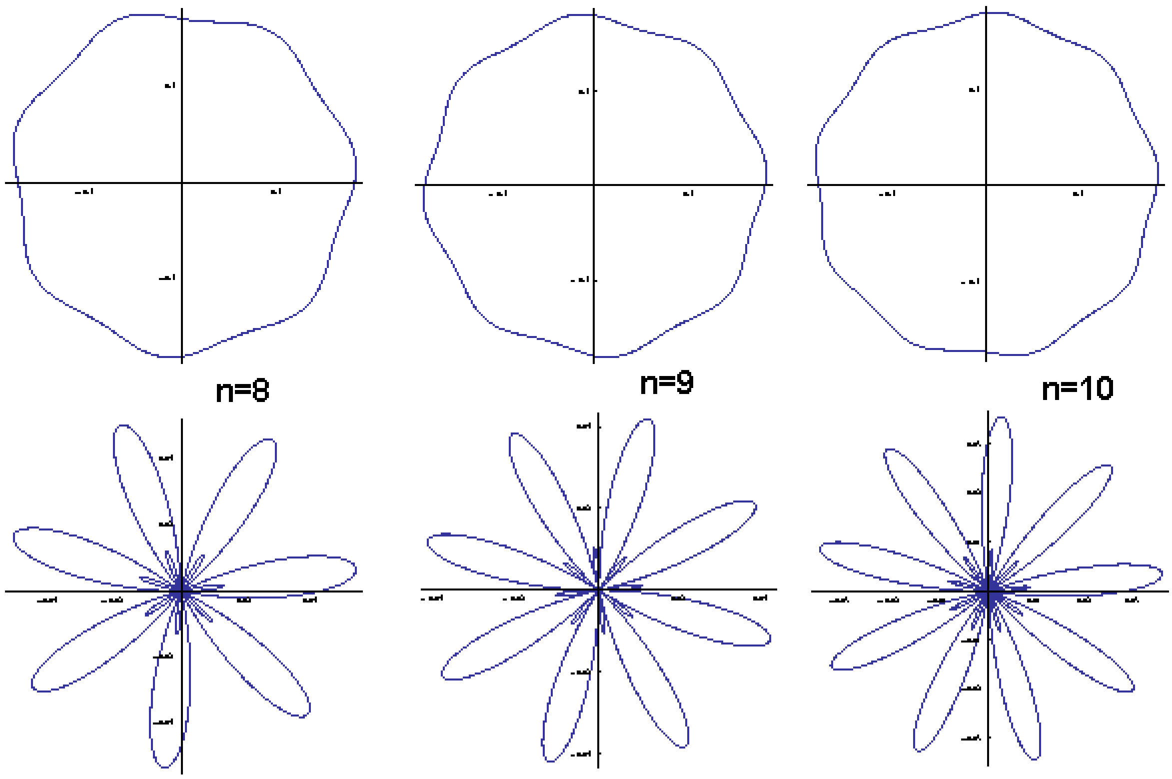

Рисунок 3б-- Центры при $n = 8{,}9{,}10$. Число «лепестков» и «сторон» многоугольника также равно $n-1$.

В уравнении (2) необходимо взять вместо x, y выражения $r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi$ соответственно, а член A заменить на Ar.

На рис. 4а построены траектории центров для системы уравнений $\dot{x} = e^x \cos(y) - x - 1, \dot{y} = e^x \sin(y) - y,$ а на рис. 4б) – для системы $\dot{x} = \sin(x)ch(y) - x, \dot{y} = \cos(x)sh(y) - y.$

В этих системах правые части являются действительными и мнимыми частями комплексных функций $e^z - z - 1$ и $\sin(z) - z$ соответственно. Вычитаемые x и y необходимы, чтобы члены соответствующих рядов начинались с $n = 2$. Без них особая точка О будет фокусом.

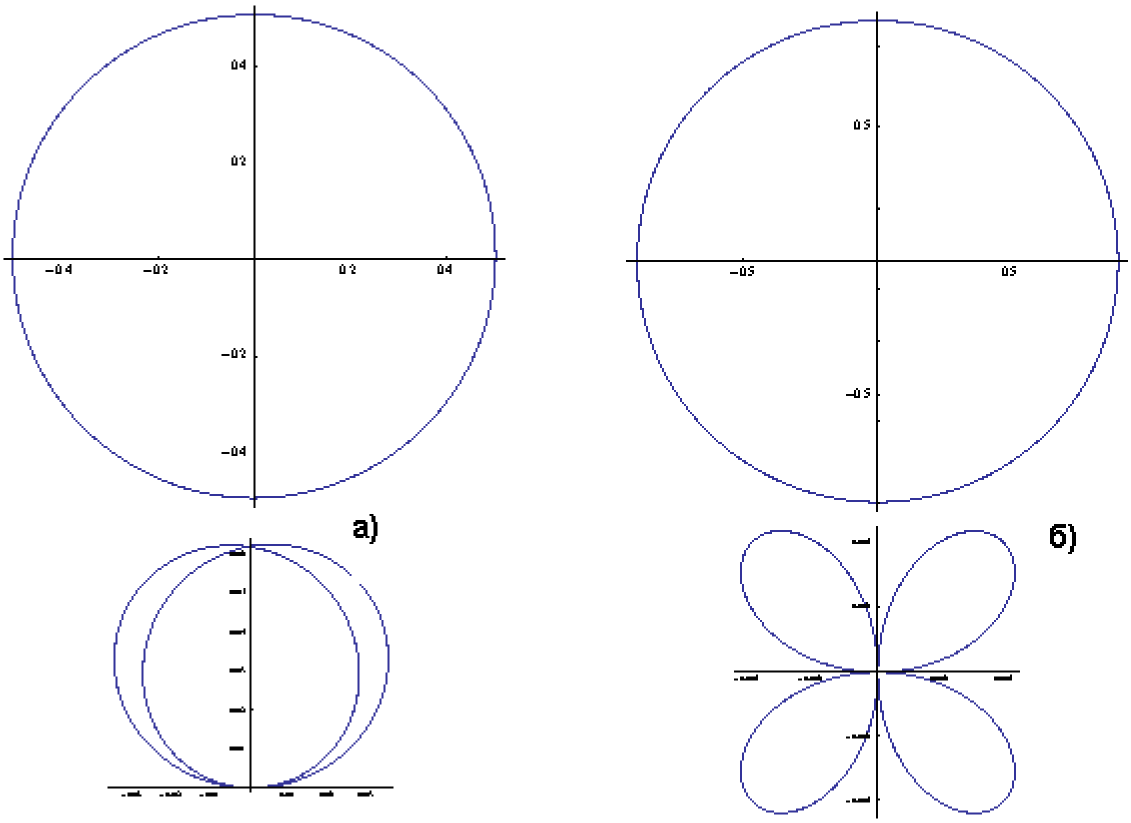

Рис.4.а) $f(z) = e^z - z - 1$; 4б) $f(z) = \sin(z) - z.$

Выводы.

1. В нашей работе берутся члены ряда из однородных многочленов, как и в других работах [3 - 5], но эти члены *гармоничны*. Может этим и объясняются сложные необходимые условия в форме связей между коэффициентами в статьях Альмухамедова и И.С. Куклеса [3, С. 87].

Между тем, в работах А.Пуанкаре есть условие центра $\dfrac{\partial X}{\partial x} - \dfrac{\partial Y}{\partial y} = 0,$, вытекающее из условий полного дифференциала, совпадающее с одним из условий Коши – Римана для гармонических функций.

2. В работе используются современные программные комплексы, позволяющие проверять и иллюстрировать полученные аналитически результаты.

Литература

1. Пуанкаре А.Избранные труды в 3 томах. Том III. Математика. Теоретическая физика. Анализ математических и естественно - научных работ Анри Пуанкаре. М.: Наука, 1974. – 772 с.

2. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М.-Л.: ГИТ-ТЛ, 1947. – 392 с.

3. Немыцкий В.В и Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.-Л.: ГИТ-ТЛ, 1947. - 448 с.

4. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений/ Н.П.Еругин, Й.З.Штокало, П.С.Бондаренко, И.А.Павлюк др. – К.: Вища школа, 1974. – 472 с.

5. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: ГИФ-МЛ, 1961. – 312 с.

Филер З.Е., Андрюхин А.И. Компьютерные расчеты и визуализации характеристик устойчивости систем: проблема центра-фокуса и аналитические функции *Эта работа относится к известной проблеме определения параметров устойчивости систем. Теоретические обоснования решения этой задачи рассматриваются для случая центра. Решения для линейных и гармоничных функций,а также однородных многочленов высших степеней обсуждаются. Результаты компьютерных расчетов приведены. В расчетах использовался пакет Mathematica.*

Ключевые слова*:проблема центра-фокуса, устойчивость системы , визуализация, компьютер.*

Filer Z.E., Andryukhin AI Computer calculations and visualization systems stability characteristics: the center-focus problem and analytical functions. *This work refers to the well-known problem of determining the parameters of the systems stability. Theoretical basis of solving this problem are being considered for the center of the case. Solutions for linear and harmonic functions, as well as the homogeneous polynomials of higher degrees are discussed. computer calculation results are given. The calculations used Mathematica package.*

Keywords: *center-focus problem, system stability, visualization, computer.*

Статья поступила в редакцию 20.11.2016
Рекомендована к публикации д-ром физ.-мат.. наук С.Н. Судаковым